

Construction of the confidence interval of exact level for discrete distributions

筑波大・数理物質科学 柿爪 智行 (Tomoyuki Kakizume)
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

2 項確率 p の信頼区間の構成については、従来からよく論じられていて、よく知られている標準的な信頼区間は、簡便で分かり易いが、 p が 0 や 1 に近いときには良くないことが分かっている。そのための改良が漸近的にいろいろ行われてきている。また、最近、医学の分野では、 p が 0 や 1 に近い場合に正確な信頼区間を求めることが要請され、その方法についても再検討を迫られている (たとえば [BCD01], [BCD02], [IH01] 参照)。

本論ではそのような要請を踏まえて、いくつかの離散型分布の場合に正確な信頼区間を構成する方法を提案する。たとえば、実際に標本の大きさ n が 10 から 50 まで動くときに、 p の正確な 95% 信頼区間の上端、下端の値の表を作成する。その際に、従来の漸近信頼区間および正確な信頼区間の構成法について述べ、それらの信頼区間の被覆確率、区間の幅等に関して数値比較を行うとともに、ここで、提案した新しい正確な信頼区間との比較も数値的に行う。また、ポアソン分布、負の 2 項分布の母数の正確な信頼区間も構成する。さらに高次の漸近信頼区間の構成について論じ、それらの信頼区間の数値比較を行う。

2 問題設定

確率変数 X が確率量関数 (probability mass function 略して p.m.f.) $f(x, \theta)$ をもつ分布に従うとする。ただし、 θ は未知で、 $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$ とする。このとき、 $0 < \alpha < 1$ について、 X に基づく $l(X)$, $u(X)$ が存在して、任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$P\{l(X) \leq \theta \leq u(X)\} \geq 1 - \alpha \quad (2.1)$$

が成り立つとき、区間 $[l(X), u(X)]$ を θ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間といい、 $X = x$ について区間 $[l(x), u(x)]$ を θ の $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間という。

確率変数 X が $B(n, p)$ に従うとき、 p に対する信頼区間の求め方についてはさまざまな方法があるが、大きくは漸近理論に基づき求める方法と正確に (2.1) を満たすように求める方法の 2 通りに分けることができる。本論では、前者については Brown, Cai and DasGupta ([BCD01], [BCD02]) に従って、従来の方法および Akahira, Takahashi and Takeuchi [ATT97] によるランダム信頼区間を求める方法を紹介し、また、後者については Clopper-Pearson [CP34], Crow [C56], Blyth & Still [BS83] に従って紹介し、さらに、今回、提案する新しい方法について述べる ([AKT02])。また、ポアソン分布 $Po(\lambda)$ 、負の 2 項分布 $NB(k, p)$ の場合についても、同様の方法でそれぞれ λ , p の信頼区間を構成する。

3 2 項確率 p に対する漸近信頼区間

まず、 X が 2 項分布 $B(n, p)$ に従うとき、 $\hat{p} := X/n$, $\hat{q} := 1 - \hat{p}$ とすると、

$$P\left\{-u_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}} \leq u_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$CI_S := \left[\hat{p} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right] \quad (3.1)$$

が p の漸近的な $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間になり, これを $100(1 - \alpha)\%$ 標準区間という. ただし, $u_{\alpha/2}$ を標準正規分布 $N(0, 1)$ の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点とする.

また, $\tilde{X} := X + u_{\alpha/2}^2/2$, $\tilde{n} := n + u_{\alpha/2}^2$, $\tilde{p} := \tilde{X}/\tilde{n}$ とすると,

$$P \left\{ -u_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{\tilde{n}}(\tilde{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \leq u_{\alpha/2} \right\} \approx 1 - \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

より

$$CI_W := \left[\tilde{p} - \frac{u_{\alpha/2}\sqrt{\tilde{n}}}{\tilde{n}} \sqrt{\hat{p}\hat{q} + \frac{u_{\alpha/2}^2}{4n}}, \tilde{p} + \frac{u_{\alpha/2}\sqrt{\tilde{n}}}{\tilde{n}} \sqrt{\hat{p}\hat{q} + \frac{u_{\alpha/2}^2}{4n}} \right] \quad (3.2)$$

が p の漸近的な $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間になる. この信頼区間の構成方法は Wilson[W27] により提案されたので, これを $100(1 - \alpha)\%$ Wilson 区間という.

上記の 2 つの区間について, 標準区間 (3.1) は単純な形をしているが p が 0 または 1 に近いときには信頼区間としてはあまり良い性質をもっていない, 一方, Wilson 区間 (3.2) は比較的良好な性質をもっているが, 複雑な形をしている (第 5.1 節参照). よって, (3.1) において n , $\hat{p}$, $\hat{q}$ の代わりに, それぞれ $\tilde{n}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q} := 1 - \tilde{p}$ を用いた区間

$$CI_{AC} := \left[\tilde{p} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{p}\tilde{q}}{\tilde{n}}}, \tilde{p} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{p}\tilde{q}}{\tilde{n}}} \right] \quad (3.3)$$

において, $\alpha = 0.05$ について $u_{\alpha/2} \approx 1.96$ となるため, その代わりに 2 を用いたものが, Agersti & Coull[AC98] によって提案されたので, この区間を $100(1 - \alpha)\%$ Agresti & Coull 区間という.

前出の 3 つの区間は非 Bayes 的観点から得たが, Bayes 的観点から信頼区間を導出することもできる. まず, 2 項分布に対する共役分布であるベータ分布を事前分布としてとる. すなわち事前分布として確率密度関数 (probability density function 略して p.d.f.)

$$\pi(p) = \pi^{-1} p^{-1/2} (1-p)^{-1/2} \quad (0 < p < 1)$$

をもつベータ分布 $Be(1/2, 1/2)$ をとる. これを Jeffreys 事前分布という. このとき, $B(n, p)$ の p.m.f. を p を与えたときの X の条件付確率量関数 (conditional(c.)p.m.f.) $f(x|p) = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x}$ と見なすと, $X = x$ を与えたときの p の事後分布はベータ分布 $Be(x + (1/2), n - x + (1/2))$ になる. ここで, $Be(x + (1/2), n - x + (1/2))$ 分布の上側 $100(\alpha/2)\%$ 点を $b_{\alpha/2}$, 下側 $100(\alpha/2)\%$ 点を $b_{1-\alpha/2}$ で表わして, Jeffreys 事前分布による $100(1 - \alpha)\%$ Jeffreys 区間を

$$CI_J := [l_J(x), u_J(x)] \quad (3.4)$$

とする. ただし,

$$l_J(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ b_{1-\alpha/2} & (\text{その他}), \end{cases} \quad u_J(x) = \begin{cases} 1 & (x = n), \\ b_{\alpha/2} & (\text{その他}) \end{cases}$$

次に, [ATT97] に基づきランダム信頼区間について述べる. まず, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ を互いに独立にいずれも未知の母数 p をもつベルヌーイ分布 $Ber(p)$ に従う確率変数列とする. また, $Ber(p)$ の r 次のキュムラントを $\kappa_r(p)$ ($r = 1, 2, \dots$) と表わす. 特に, 1 次, 2 次のキュムラントは

$$\kappa_1(p) = p, \quad \kappa_2(p) = pq \quad (q = 1 - p)$$

になる. いま, $T := \sum_{i=1}^n X_i$ とすると, T は十分統計量となり,

$$Z_n := \frac{T - np}{\sqrt{npq}}$$

のように規準化する. このとき, T の分布の n^{-1} のオーダーまでの Edgeworth 展開は

$$\begin{aligned} P_\theta\{T \leq t\} &= P_\theta\{Z_n \leq z\} \\ &= \Phi(z) - \phi(z) \left\{ \frac{\beta_3(p)}{6\sqrt{n}}(z^2 - 1) + \frac{\beta_4(p)}{24n}(z^3 - 3z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_3^2(p)}{72n}(z^5 - 10z^3 + 15z) - \frac{1}{24npq}z \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ただし,

$$z = \frac{t + (1/2) - p}{\sqrt{npq}}, \quad \beta_3(p) = \frac{q - p}{\sqrt{pq}}, \quad \beta_4(p) = \frac{1 - 6pq}{pq}$$

とする. このとき, 帰無仮説 $H: p = p_0$, 対立仮説 $K: p \neq p_0$ の水準 α の検定問題において一様最強力不偏ランダム検定関数

$$\phi(T) = \begin{cases} 1 & (T < t_1, T > t_2), \\ u_i & (T = t_i) \quad (i = 1, 2), \\ 0 & (t_1 < T < t_2) \end{cases} \quad (3.5)$$

が得られる (Lehmann[L86]). ここで, t_1, t_2, u_1, u_2 は条件

$$E_{p_0}[\phi(T)] = \alpha, \quad (3.6)$$

$$E_{p_0}[T\phi(t)] = n\alpha p_0 \quad (3.7)$$

から決定される. このとき, (3.6), (3.7) を満たす t_1, t_2, u_1, u_2 を選ぶ方法はたくさんあるが, ここでは

$$\begin{aligned} t_1 &:= \min \left\{ x \mid {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \geq \frac{\alpha}{2} \right\}, \\ t_2 &:= \min \left\{ x \mid {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} \end{aligned}$$

とし, 条件 (3.6), (3.7) より u_1, u_2 を決定する. いま, U を T と独立に $[0, 1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする. ここで, $Y := T + U$ とすると,

$$\phi^*(Y) = \begin{cases} 1 & (Y < t_1 + u_1, Y > t_2 - u_2 + 1), \\ 0 & (t_1 + u_1 < Y < t_2 - u_2 + 1) \end{cases}$$

のように Y の関数として (3.5) を考えることができる. そこで, 連続補正を考慮に入れ,

$$\begin{aligned} \underline{y}(p_0) &:= t_1 + u_1 - \frac{1}{2}, \\ \bar{y}(p_0) &:= t_2 - u_2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

とおく. このとき方程式

$$\bar{y}(p) = Y, \quad \underline{y}(p) = Y$$

を解くことにより水準 $1 - \alpha$ の p のランダム信頼区間 $[\underline{p}(Y), \bar{p}(Y)]$ を得る. このとき, 次の定理が成り立つ ([ATT97]).

定理 3.1 $\underline{y}(p), \bar{y}(p)$ は

$$\begin{aligned} \underline{y}(p) &= np + \sqrt{npq}(-u_{\alpha/2} + \Delta_1), \\ \bar{y}(p) &= np + \sqrt{npq}(u_{\alpha/2} + \Delta_2) \end{aligned}$$

として $o(n^{-1})$ まで近似される. ただし,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\beta_3(p)}{6\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 + \frac{\beta_3^2(p)}{72n}(4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\ &\quad - \frac{\beta_4(p)}{24n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) - \frac{1}{24npq}\{12u_1(1 - u_1) - 1\}u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4npqu_{\alpha/2}}\{u_2(1 - u_2) - u_1(1 - u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \Delta_2 &= \frac{\beta_3(p)}{6\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 - \frac{\beta_3^2(p)}{72n}(4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\ &\quad + \frac{\beta_4(p)}{24n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) + \frac{1}{24npq}\{12u_2(1 - u_2) - 1\}u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4npqu_{\alpha/2}}\{u_2(1 - u_2) - u_1(1 - u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

証明は省略 ([ATT97] 参照). この近似式は数値的にかなりよいことが [ATT97] の表より分かる. ここで, 条件 (3.6), (3.7) より u_1, u_2 を求めるのは容易でないので, u_1, u_2 を

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= np - \sqrt{npq}u_{\alpha/2} + \frac{1}{6}(q - p)u_{\alpha/2}^2 - t_1 + \frac{1}{2}, \\ \hat{u}_2 &= -np - \sqrt{npq}u_{\alpha/2} - \frac{1}{6}(q - p)u_{\alpha/2}^2 + t_2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

に置き換えて

$$\underline{y}(p) = np + \sqrt{npq}(-u_{\alpha/2} + \hat{\Delta}_1), \tag{3.8}$$

$$\bar{y}(p) = np + \sqrt{npq}(u_{\alpha/2} + \hat{\Delta}_2) \tag{3.9}$$

とする. ただし,

$$\begin{aligned} \Delta_1^0 &:= \frac{\beta_3(p)}{6\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 + \frac{\beta_3^2(p)}{72n}(4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) - \frac{\beta_4(p)}{24n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}), \\ \Delta_2^0 &:= \frac{\beta_3(p)}{6\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 - \frac{\beta_3^2(p)}{72n}(4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) + \frac{\beta_4(p)}{24n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_1 &:= \Delta_1^0 - \frac{1}{24npq} \{12\hat{u}_1(1 - \hat{u}_1) - 1\}u_{\alpha/2} \\
&\quad - \frac{1}{4npqu_{\alpha/2}} \{\hat{u}_2(1 - \hat{u}_2) - \hat{u}_1(1 - \hat{u}_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
\hat{\Delta}_2 &:= \Delta_2^0 + \frac{1}{24npq} \{12\hat{u}_2(1 - \hat{u}_2) - 1\}u_{\alpha/2} \\
&\quad - \frac{1}{4npqu_{\alpha/2}} \{\hat{u}_2(1 - \hat{u}_2) - \hat{u}_1(1 - \hat{u}_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

とする. そこで, (3.8), (3.9) より方程式 $\bar{y}(\underline{p}) = Y$, $\underline{y}(\bar{p}) = Y$ の解 $\underline{p} = \underline{p}(Y)$, $\bar{p} = \bar{p}(Y)$ を求めて, 区間 $CI_R := [\underline{p}(Y), \bar{p}(Y)]$ を得る. [ATT97] によれば, この区間も数値的にかなり良いことが分かる.

4 2項確率 p の正確な信頼区間

Clopper and Pearson [CP34] では, 信頼係数の条件

$$P\{l(X) \leq p \leq u(X)\} \geq 1 - \alpha,$$

すなわち

$$P\{p < l(X)\} + P\{p > u(X)\} \leq \alpha$$

を

$$P\{p < l(X)\} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P\{p > u(X)\} \leq \frac{\alpha}{2}$$

に置き換えた. このとき, $X = x$ について, p の $100(1 - \alpha)\%$ Clopper-Pearson 区間を

$$CI_{CP} := [l_{CP}(x), u_{CP}(x)]$$

で定義する. ただし

$$\begin{aligned}
l_{CP}(x) &= \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \sup\{p \mid P\{X \geq x\} \leq \alpha/2\} & (\text{その他}), \end{cases} \\
u_{CP}(x) &= \begin{cases} 1 & (x = n), \\ \inf\{p \mid P\{X \leq x\} \leq \alpha/2\} & (\text{その他}) \end{cases}
\end{aligned}$$

とする. また, ベータ分布 $Be(a, b)$ 分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $B(\alpha; a, b)$, すなわち

$$\int_0^{B(\alpha; a, b)} \frac{1}{B(a, b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp = 1 - \alpha$$

とすると,

$$\begin{aligned}
\sup\left\{p \mid P\{X \geq x\} \leq \frac{\alpha}{2}\right\} &= \left\{p \mid P\{X \geq x\} = \frac{\alpha}{2}\right\} = B(1 - \alpha/2; x, n - x + 1), \\
\inf\left\{p \mid P\{X \leq x\} \leq \frac{\alpha}{2}\right\} &= \left\{p \mid P\{X \leq x\} = \frac{\alpha}{2}\right\} = B(\alpha/2; x + 1, n - x)
\end{aligned}$$

次に, Crow [C56] は, 0 や 1 に近い p に対してはなるべく X のとり得る範囲が狭くなるような信頼区間を考えた. [C56] の方法は分かりにくいため, 本論では異なるアルゴリズムを構成した. まず, $0 \leq p < 1/2$ とする.

(i) $P\{1 \leq X \leq u_1\} \geq 1 - \alpha$
となる最小の u_1 ($u_1 = 0, 1, \dots$) を求める. また, その u_1 に対して

$$P\{1 \leq X \leq u_1\} = 1 - \alpha$$

を満たす p を $p_1 < p'_1$ とする.

(ii) 初めて $p_1 < p_{0,j}$ となるまで

$$P\{0 \leq X \leq j\} = 1 - \alpha$$

を満たす $p_{0,j}$ ($j = 0, 1, \dots$) を求める. このとき,

$$\begin{aligned} 0 \leq p \leq p_{0,0} & \text{ では } X = 0, \\ p_{0,0} \leq p \leq p_{0,1} & \text{ では } 0 \leq X \leq 1, \\ p_{0,1} \leq p \leq p_{0,2} & \text{ では } 0 \leq X \leq 2, \\ & \vdots \\ p_{0,j-1} \leq p \leq p_1 & \text{ では } 0 \leq X \leq j \end{aligned}$$

をとることにする.

(iii) ここまでに, $p = \bar{p}$ まで区間が決定しているとする. 各 i について $P\{i \leq X \leq u_i\} \geq 1 - \alpha$ となる最小の u_i を求め, $P\{i \leq X \leq u_i\} = 1 - \alpha$ を満たす p を $p_i < p'_i$ とする. また, $P\{i+1 \leq X \leq u_{i+1}\} \geq 1 - \alpha$ となる最小の u_{i+1} を求め, $P\{i+1 \leq X \leq u_{i+1}\} = 1 - \alpha$ を満たす p を $p_{i+1} < p'_{i+1}$ とする. このとき,

・ $p'_i > p_{i+1}$ かつ $u_i - i \geq u_{i+1} - (i+1)$ ならば,

$$\bar{p} \leq p \leq p_{i+1} \text{ では } i \leq X \leq u_i$$

とする.

・ $p'_i > p_{i+1}$ かつ $u_i - i < u_{i+1} - (i+1)$ ならば,

$$\bar{p} \leq p \leq p'_i \text{ では } i \leq X \leq u_i$$

とする.

・ $p'_i < p_{i+1}$ ならば,

$$\bar{p} \leq p \leq p'_i \text{ では } i \leq X \leq u_i$$

とする. さらに, $P\{i \leq X \leq u_i + k\} = 1 - \alpha$ を満たす p のうち大きい方を $p_{i,k}$ とする. $p_{i,k} > p_{i+1}$ となるまで, $k = 1, 2, \dots$ と増やしていき,

$$\begin{aligned} p'_i \leq p \leq p_{i,1} & \text{ では } i \leq X \leq u_i + 1, \\ p_{i,1} \leq p \leq p_{i,2} & \text{ では } i \leq X \leq u_i + 2, \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p_{i,k-1} \leq p \leq p_{i,k} & \text{ では } i \leq X \leq u_i + k & (u_i + k - i < u_{i+1} - (i+1)), \\ p_{i,k-1} \leq p \leq p_{i+1} & \text{ では } i \leq X \leq u_i + k & (u_i + k - i \geq u_{i+1} - (i+1)) \end{cases}$$

とする.

(iii) の手順を $p'_{i+1} > 1/2$ となるまで $i = 1, 2, \dots$ と続ける. そして, $p_{i+1} \leq p \leq 0.5$ では $i+1 \leq X \leq u_{i+1}$ とする.

さらに, $1/2 \leq p \leq 1$ については, (i)~(iii) で求めた区間と $p = 1/2$ で対称になるよう求める.

例 4.1 $n = 10$, $\alpha = 0.05$ の場合を考える. このとき, $P\{1 \leq X \leq u_1\} \geq 1 - \alpha$ となる最小の u_1 は $u_1 = 6$ であり, $P\{1 \leq X \leq 6\} = 1 - \alpha$ を満たす p_1, p'_1 はそれぞれ 0.267, 0.381 である. まず, 始めて 0.267 を超えるまで $P\{0 \leq X \leq j\} = 1 - \alpha$ を満たす p ($0 < p < 1$) を求めると,

$$\begin{aligned} p = 0.005 & \text{ で } P\{0 \leq X\} = 1 - \alpha, \\ p = 0.037 & \text{ で } P\{0 \leq X \leq 1\} = 1 - \alpha, \\ p = 0.087 & \text{ で } P\{0 \leq X \leq 2\} = 1 - \alpha, \\ p = 0.150 & \text{ で } P\{0 \leq X \leq 3\} = 1 - \alpha, \\ p = 0.222 & \text{ で } P\{0 \leq X \leq 4\} = 1 - \alpha, \\ p = 0.304 & \text{ で } P\{0 \leq X \leq 5\} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned} 0 \leq p \leq 0.005 & \text{ では } X = 0, \\ 0.005 \leq p \leq 0.037 & \text{ では } 0 \leq X \leq 1, \\ 0.037 \leq p \leq 0.087 & \text{ では } 0 \leq X \leq 2, \\ 0.087 \leq p \leq 0.150 & \text{ では } 0 \leq X \leq 3, \\ 0.150 \leq p \leq 0.222 & \text{ では } 0 \leq X \leq 4, \\ 0.222 \leq p \leq 0.267 & \text{ では } 0 \leq X \leq 5 \end{aligned}$$

となる.

次に, $P\{2 \leq X \leq u_2\} \geq 1 - \alpha$ となる最小の u_2 を求めると $u_2 = 8$ となり, $P\{2 \leq X \leq 8\} = 1 - \alpha$ を満たす p_2, p'_2 はそれぞれ 0.397, $0.603 < 1/2$ となる. 今, $p'_1 = 0.381 < p_2 = 0.397$ より,

$$0.267 \leq p \leq 0.381 \text{ では } 1 \leq X \leq 6$$

となる. さらに $P\{1 \leq X \leq u_1 + 1\} = P\{1 \leq X \leq 7\} = 1 - \alpha$ を満たす p のうち大きい方を求めると $p_{1,1} = 0.491$ となり, $p_{1,1} = 0.491 > p_2 = 0.397$ かつ $(u_1 + 1) - 1 = 6 = u_2 - 2$ より

$$\begin{aligned} 0.381 \leq p \leq 0.397 & \text{ では } 1 \leq X \leq 7, \\ 0.397 \leq p \leq 0.5 & \text{ では } 2 \leq X \leq 8 \end{aligned}$$

上記より, $1/2 < p \leq 1$ については

$0.5 < p \leq 0.603$ では $2 \leq X \leq 8$,
 $0.603 \leq p \leq 0.619$ では $3 \leq X \leq 9$,
 $0.619 \leq p \leq 0.733$ では $4 \leq X \leq 9$,
 $0.733 \leq p \leq 0.778$ では $5 \leq X \leq 10$,
 $0.778 \leq p \leq 0.850$ では $6 \leq X \leq 10$,
 $0.850 \leq p \leq 0.913$ では $7 \leq X \leq 10$,
 $0.913 \leq p \leq 0.963$ では $8 \leq X \leq 10$,
 $0.963 \leq p \leq 0.995$ では $9 \leq X \leq 10$,
 $0.995 \leq p \leq 1$ では $X = 10$

となる. 以上のことをまとめると, $X = x$ ($x = 0, 1, \dots, 10$) を与えたときの p に対する 95% Crow 区間の上端及び下端は表 4.1 のようになる.

表 4.1 95% Crow 信頼区間の上端及び下端 ($n = 10$).

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
下端	0	0.005	0.037	0.087	0.150	0.222	0.267	0.381	0.397	0.613	0.733
上端	0.267	0.397	0.603	0.619	0.733	0.778	0.850	0.913	0.963	0.995	1

この 95% Crow 区間について, 被覆確率と信頼区間のグラフは, 図 4.1 のようになる.

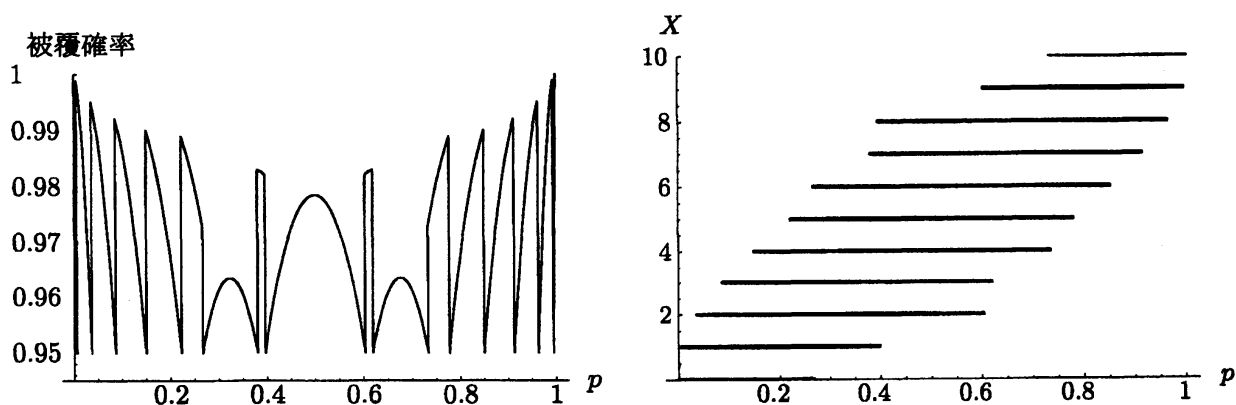


図 4.1 95% Crow 信頼区間とその被覆確率 ($n = 10$)

Blyth & Still [BS83] による p の信頼区間は, Crow 区間と本質的には同じだが, 確率が $1 - \alpha$ より大きいところで幅が同じものが重なり合っているときはその中点で切り替える. 例えば, $p_i \leq p \leq p_j$ で $P\{a \leq X \leq b\}$ と $P\{a+1 \leq X \leq b+1\}$ とが $1 - \alpha$ より大きいところで重なり合っていたとしたら, その中点 $\tilde{p} = \frac{1}{2}(p_i + p_j)$ を求め,

$$\begin{aligned}
 p_i \leq p \leq \tilde{p} & \text{ では } a \leq X \leq b, \\
 \tilde{p} \leq p \leq p_j & \text{ では } a+1 \leq X \leq b+1
 \end{aligned}$$

例 4.2 例 4.1 と同様, $n = 10$, $\alpha = 0.05$ の場合について考える. このとき, $0 \leq p < 1/2$ について, $0.267 \leq p \leq 0.304$ において $P\{0 \leq X \leq 5\}$ と $P\{1 \leq X \leq 6\}$ が 0.95 より上で重なり合っているため, 中点 0.285 で 2 つを切り替える. また, $0.397 \leq p \leq 0.491$ において $P\{1 \leq X \leq 7\}$ と $P\{2 \leq X \leq 8\}$ が 0.95 より上で重なり合っているため, 中点 0.444 で 2 つを切り替える. 後は, Crow 区間と同様にする. よって, $X = x$ ($x = 0, 1, \dots, 10$) を与えたときの p の 95%Blyth & Still 区間の上端及び下端は表 4.2 のようになる.

表 4.2 95%Blyth & Still 信頼区間の上端及び下端 ($n = 10$).

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
下端	0	0.005	0.037	0.087	0.150	0.222	0.285	0.381	0.444	0.556	0.715
上端	0.285	0.444	0.556	0.619	0.715	0.778	0.850	0.913	0.963	0.995	1

この 95%Blyth & Still 区間について, 被覆確率と信頼区間のグラフは, 図 4.2 のようになる.

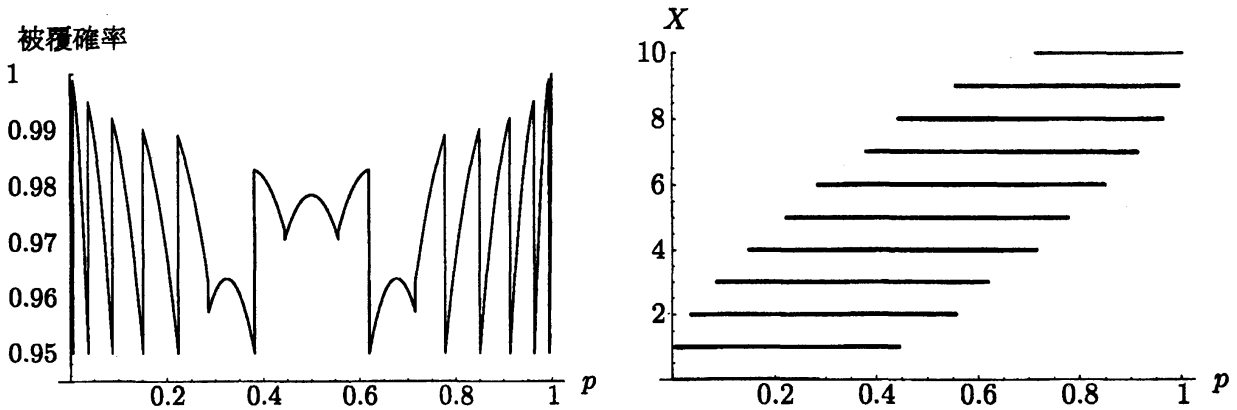


図 4.2 95%Blyth & Still 区間とその被覆確率 ($n = 10$)

次に, 今回提案する信頼区間の新たなアルゴリズムについて述べる ([AKT02]). まず, $1/2 \leq p \leq 1$ として, $p = 1/2$ から始める. いま, $p = 1/2$ に対して区間の幅が最も短くなる区間は, 通常

$$(a) \alpha^*(p) = (n/2) - m, \beta^*(p) = (n/2) + m,$$

または

$$(b) \alpha^*(p) = (n/2) - m + 1, \beta^*(p) = (n/2) + m \text{ または } \alpha^*(p) = (n/2) - m, \beta^*(p) = (n/2) + m - 1$$

のどちらかにより与えられる. ただし, m は $0 < m < n/2$ をみたす整数とする. (b) の場合

$$\begin{aligned} \alpha^*\left(\frac{1}{2} - 0\right) &= \frac{n}{2} - m, & \beta^*\left(\frac{1}{2} - 0\right) &= \frac{n}{2} + m - 1, \\ \alpha^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) &= \frac{n}{2} - m + 1, & \beta^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) &= \frac{n}{2} + m \end{aligned}$$

になることが分かる. そこで

$$\begin{aligned} Q(p) &:= P\left\{\alpha^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) \leq X \leq \beta^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) \middle| p\right\}, \\ S(p) &:= P\left\{\alpha^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) + 1 \leq X \leq \beta^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) \middle| p\right\}, \\ R(p) &:= P\left\{X = \alpha^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) \middle| p\right\} - P\left\{X = \beta^*\left(\frac{1}{2} + 0\right) + 1 \middle| p\right\} \end{aligned}$$

とおく. そして

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 - \alpha, \quad S\left(\frac{1}{2}\right) < 1 - \alpha, \quad R\left(\frac{1}{2} + 0\right) > 0$$

より, $p^*(> 1/2)$ を

$$p^* := \begin{cases} \inf\{p | S(p) > 1 - \alpha\} & (S(p) > 1 - \alpha \text{ となる } p \text{ が存在するとき}), \\ \inf\{p | Q(p) < 1 - \alpha \text{ or } R(p) < 0\} & (\text{その他のとき}) \end{cases} \quad (4.1)$$

と定義する. もし, $S(p^* + 0) > 1 - \alpha$ ならば,

$$\alpha^*(p^* + 0) = \alpha^*\left(\frac{1}{2}\right) + 1, \quad \beta^*(p^* + 0) = \beta^*\left(\frac{1}{2}\right)$$

とする. $S(p^* + 0) < 1 - \alpha$, $Q(p^* + 0) < 1 - \alpha$, $R(p^* + 0) > 0$ ならば,

$$\alpha^*(p^* + 0) = \alpha^*\left(\frac{1}{2}\right), \quad \beta^*(p^* + 0) = \beta^*\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \quad (4.2)$$

とする. また, $S(p^* + 0) < 1 - \alpha$, $Q(p^* + 0) > 1 - \alpha$, $R(p^* + 0) < 0$ ならば,

$$\alpha^*(p^* + 0) = \alpha^*\left(\frac{1}{2}\right) + 1, \quad \beta^*(p^* + 0) = \beta^*\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

とする. そして再び, $p > p^*$ に対し

$$\begin{aligned} Q(p) &= P\{\alpha^*(p^* + 0) \leq X \leq \beta^*(p^* + 0) | p\}, \\ S(p) &= P\{\alpha^*(p^* + 0) + 1 \leq X \leq \beta^*(p^* + 0) | p\}, \\ R(p) &= P\{X = \alpha^*(p^* + 0) | p\} - P\{X = \beta^*(p^* + 0) + 1 | p\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

とし,

$$p^{**} := \begin{cases} \inf_{p > p^*} \{p | S(p) > 1 - \alpha\} & (S(p) > 1 - \alpha \text{ となる } p \text{ が存在するとき}), \\ \inf_{p > p^*} \{p | Q(p) < 1 - \alpha \text{ or } R(p) < 0\} & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と定義する. もし, $S(p^{**} + 0) > 1 - \alpha$ ならば,

$$\alpha^*(p^{**} + 0) = \alpha^*(p^*) + 1, \quad \beta^*(p^{**} + 0) = \beta^*(p^*)$$

とする. $S(p^{**} + 0) < 1 - \alpha$, $Q(p^{**} + 0) < 1 - \alpha$, $R(p^{**} + 0) > 0$ ならば,

$$\alpha^*(p^{**} + 0) = \alpha^*(p^*), \quad \beta^*(p^{**} + 0) = \beta^*(p^*) + 1 \quad (4.4)$$

とする. また, $S(p^{**} + 0) < 1 - \alpha$, $Q(p^{**} + 0) > 1 - \alpha$, $R(p^{**} + 0) < 0$ ならば,

$$\alpha^*(p^{**} + 0) = \alpha^*(p^*) + 1, \quad \beta^*(p^{**} + 0) = \beta^*(p^*) + 1$$

とする. 上記のようにして $1/2 \leq p \leq 1$ について $\alpha^*(p)$ や $\beta^*(p)$ を求めることができる. また, $0 \leq p < 1/2$ については対称的に

$$\alpha^*(p) = 1 - \beta^*(1 - p), \quad \beta^*(p) = 1 - \alpha^*(1 - p)$$

として求める.

例 4.3 例 4.1, 4.2 と同様, $n = 10$, $\alpha = 0.05$ のときを考える. まず,

$$P\{2 \leq X \leq 8 | p = 1/2\} = 0.979 \geq 0.95,$$

$$P\{3 \leq X \leq 8 | p = 1/2\} = P\{2 \leq X \leq 7 | p = 1/2\} = 0.935 < 0.95$$

となるから, $\alpha^*(\frac{1}{2} + 0) = 2$, $\beta^*(\frac{1}{2} + 0) = 8$ となる. また, $p > 1/2$ に対して

$$S(p) = P\{3 \leq X \leq 8 | p\} \geq 0.95$$

を満たす p は存在せず, また

$$\inf\{p | Q(p) = P\{2 \leq X \leq 8 | p\} < 0.95\} = 0.603,$$

$$\inf\{p | R(p) = P\{X = 2 | p\} - p\{X = 9 | p\} < 0\} = 0.554$$

となるため, (4.1) より

$$p^* = 0.554$$

となる. そして, (4.4) より, $p^* = 0.554$ において

$$\alpha^*(0.554 + 0) = 3, \quad \beta^*(0.554 + 0) = 9$$

となる.

次に, $p > 0.556$ に対して, $0.619 \leq p \leq 0.733$ において

$$S(p) = P\{4 \leq X \leq 9 | p\} \geq 1 - \alpha$$

となるから,

$$p^{**} = 0.619$$

になり,

$$\alpha^*(0.619 + 0) = 4, \quad \beta^*(0.619 + 0) = 9$$

になる.

さらに, $p > 0.619$ に対して

$$S(p) = P\{5 \leq X \leq 9 | p\} \geq 0.95$$

を満たす p は存在せず, また

$$\inf\{p | Q(p) = P\{4 \leq X \leq 9 | p\} < 0.95\} = 0.733,$$

$$\inf\{p | R(p) = P\{X = 4 | p\} - P\{X = 10 | p\} < 0\} = 0.709$$

となるから,

$$p^{***} = 0.709$$

になり,

$$\alpha^*(0.709 + 0) = 5, \quad \beta^*(0.709 + 0) = 10$$

になる. $\beta^*(p) = 10$ となったため, 後は

$$P\{i \leq X \leq 10\} = 0.95 \quad (i = 6, 7, \dots, 10)$$

となる p を求めればよい. 一方, $0 \leq p < 1/2$ については

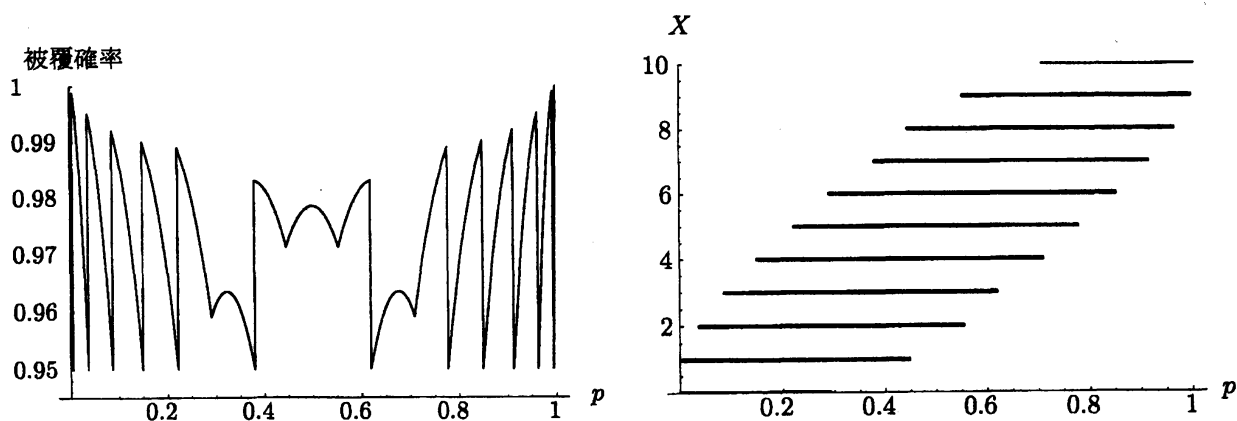
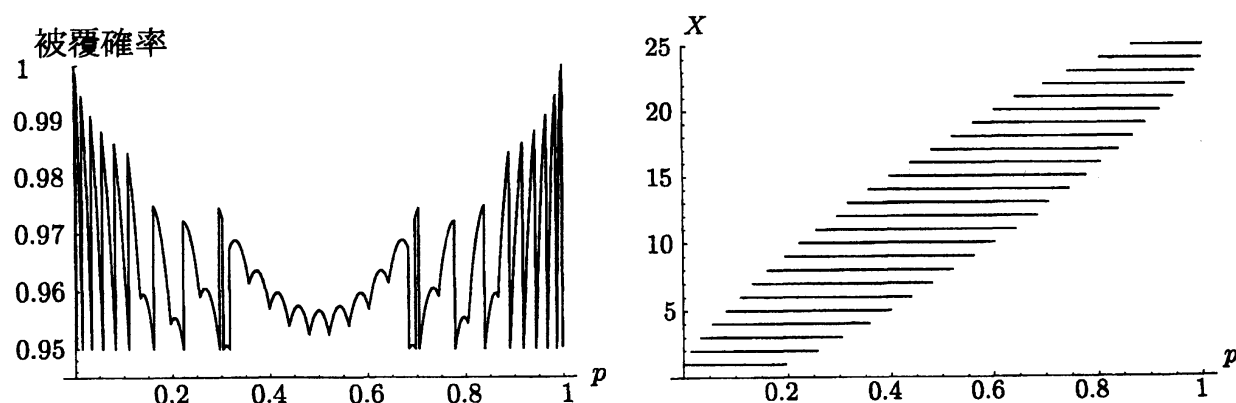
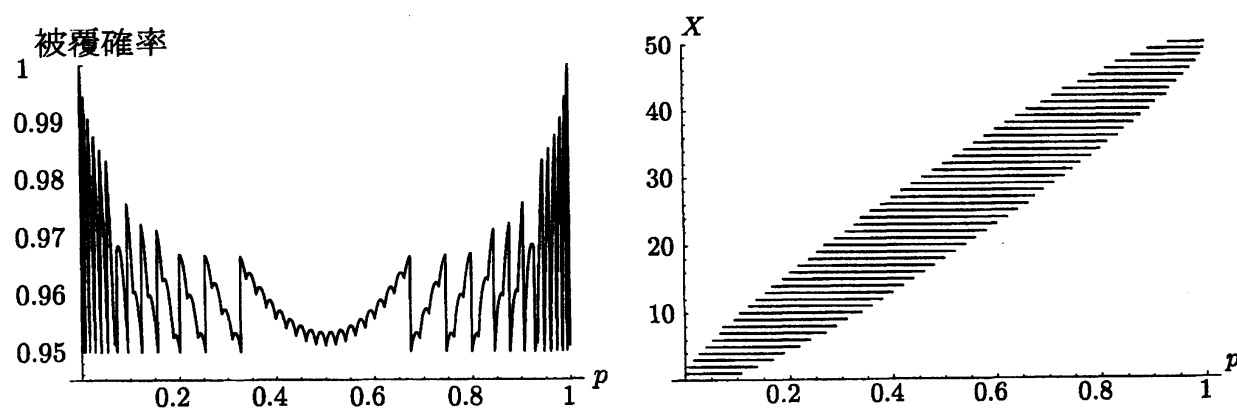
$$\alpha^*(p) = 1 - \beta^*(1 - p), \quad \beta^*(p) = 1 - \alpha^*(1 - p)$$

とすればよい. 以上より, p についての新しい 95% 信頼区間は表 4.3 のようになる.

表 4.3 新しい 95% 信頼区間の上端及び下端 ($n = 10$).

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
下端	0	0.005	0.037	0.087	0.150	0.222	0.291	0.381	0.446	0.554	0.709
上端	0.291	0.446	0.554	0.619	0.709	0.778	0.850	0.913	0.963	0.995	1

この信頼区間の被覆確率と信頼区間のグラフを図 4.3 に与える. また, $n = 10(1)50$ のときの新しい 95% 信頼区間の上端, 下端の値を表 4.4, 4.5 において与える. さらに, $n = 25, 50$ のときのこの信頼区間の被覆確率と信頼区間のグラフを図 4.4, 4.5 において与える.

図 4.3 新しい 95% 信頼区間とその被覆確率 ($n = 10$)図 4.4 新しい 95% 信頼区間とその被覆確率 ($n = 25$)図 4.5 新しい 95% 信頼区間とその被覆確率 ($n = 50$)

5 2項確率 p の信頼区間の数値的比較

本節において第3節の漸近信頼区間の比較および第4節の正確な信頼区間の比較を数値的観点から行う。

5.1 漸近信頼区間の数値的比較

ここでは、第3節で紹介した標準、Wilson、Agresti & Coull、Jeffreys 区間の4つの(信頼)区間 CI を数値的に比較する。

まず、それぞれの区間の被覆確率 (coverage probability) $P\{p \in CI\}$ について、それを p の関数とみなし、特に $n = 10, 50, 100, \alpha = 0.05$ の場合の標準区間、Wilson 区間、Agresti & Coull 区間、Jeffreys 区間それぞれのグラフは図 5.1~図 5.3 のようになる。

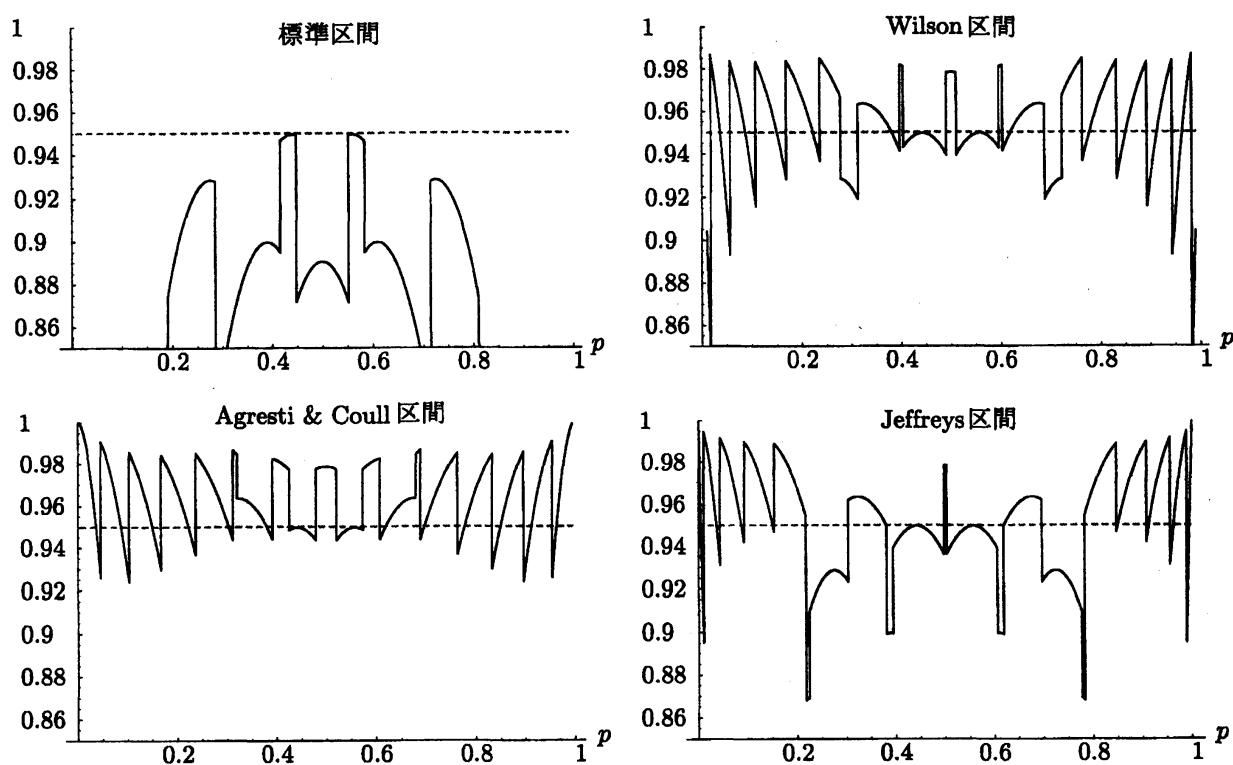


図 5.1 標準、Wilson、Agresti & Coull、Jeffreys 区間の被覆確率 ($n = 10, \alpha = 0.05$)

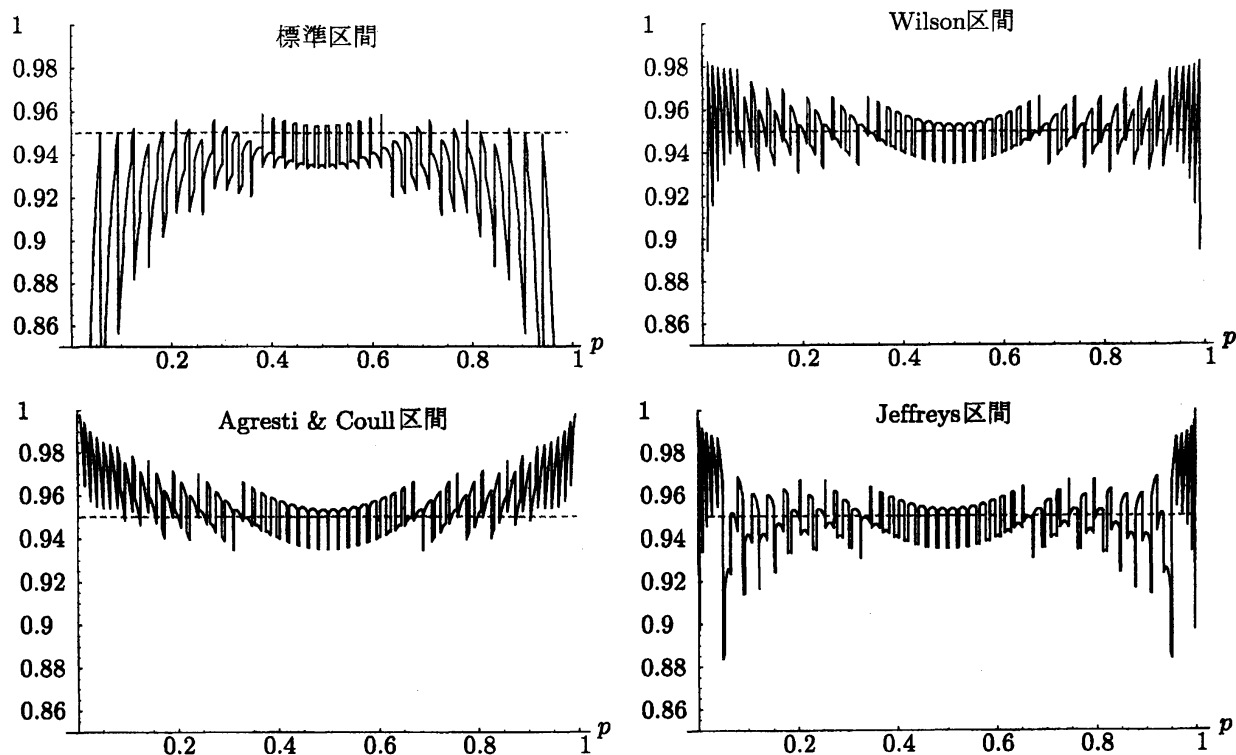


図 5.2 標準, Wilson, Agresti & Coull, Jeffreys 区間の被覆確率 ($n = 50$, $\alpha = 0.05$)

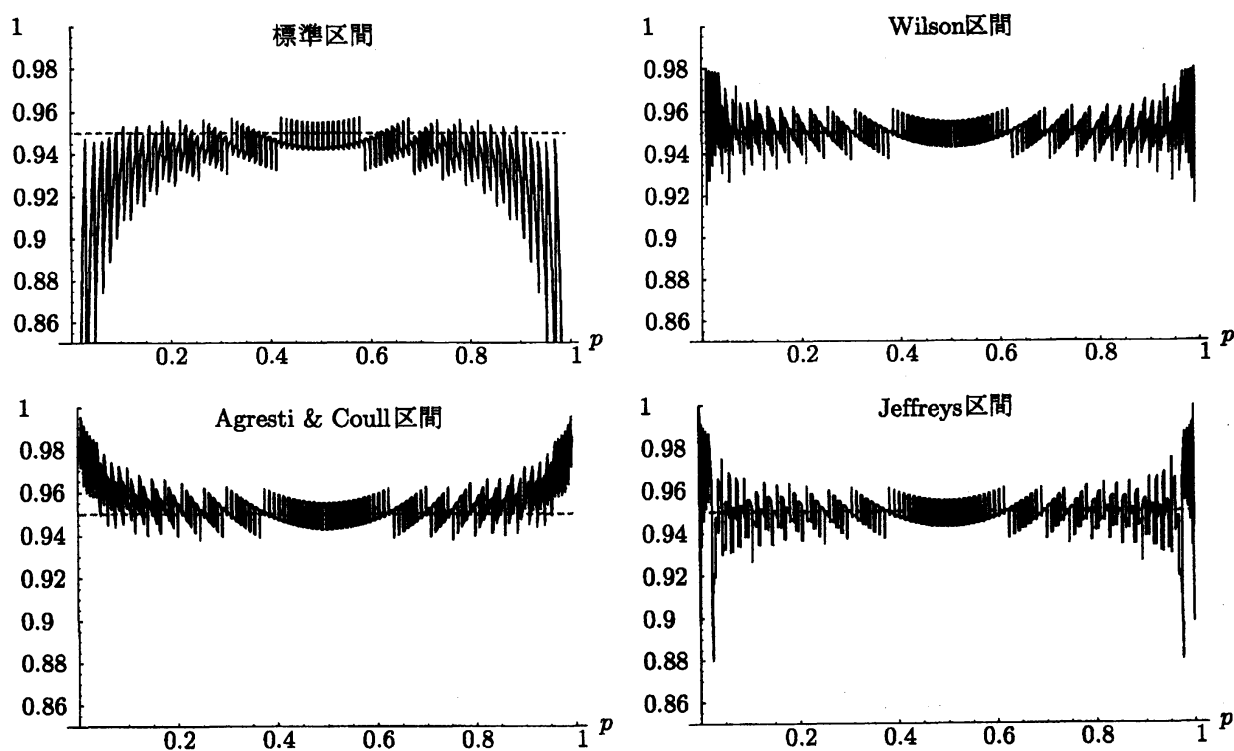


図 5.3 標準, Wilson, Agresti & Coull, Jeffreys 区間の被覆確率 ($n = 100$, $\alpha = 0.05$)

これより、標準区間は被覆確率がかなり悪いので、信頼区間として用いるのにはあまり適していないことが分かる。また、Wilson, Jeffreys 区間は $0, 1$ 近くの p を除けばほぼ $1 - \alpha$ 付近で振動しているこ

とがわかり, Agersti & Coull 区間は 0, 1 近くの p に対しても $1 - \alpha$ より大きくなっていることがわかる.

次に, 信頼区間 CI の被覆確率を p について 0 から 1 まで積分した平均被覆確率 (average coverage probability, 略して a.c.p.)

$$\int_0^1 P\{p \in CI\} dp$$

について数値的に比較する.

表 5.1 標準, Wilson, Agersti & Coull, Jeffreys 区間の a.c.p. ($n = 10, 25, 50, 100, 200$; $\alpha = 0.05$)

	CI_S	CI_W	CI_{AC}	CI_J
$n = 10$	0.76926	0.95408	0.96453	0.95316
$n = 25$	0.86295	0.95265	0.96091	0.95074
$n = 50$	0.90060	0.95178	0.95803	0.95014
$n = 100$	0.92225	0.95114	0.95551	0.94995
$n = 200$	0.93457	0.95070	0.95357	0.94991

表 5.1 から標準区間の a.c.p. は $1 - \alpha$ 未満であるから, ここからも信頼区間としての性能は良くないということが分かる. Agersti & Coull 区間は Wilson 区間と比べるとやや大きい値になってしまっているが, それは 0, 1 に近い p において前者の方が $1 - \alpha$ を上回っているのに対し, 後者は激しく振動しているためと思われる.

また, 信頼区間の満たすべき条件として,

$$P\{p \in CI\} \geq 1 - \alpha \quad (0 \leq p \leq 1)$$

があるため, p のできるだけ広い区間で被覆確率が $1 - \alpha$ を超えていることが良い信頼区間であるとして考えられる.

そこで, 表 5.1 と同様, $n = 10, 25, 50, 100, 200$; $\alpha = 0.05$ の場合に, $P\{p \in CI\} \geq 1 - \alpha$ を満たす p の区間幅 $W_{1-\alpha}$ を数値的に求める.

表 5.2 標準, Wilson, Agersti & Coull, Jeffreys 区間に対する $W_{1-\alpha}$ ($n = 10, 25, 50, 100, 200$; $\alpha = 0.05$)

	CI_S	CI_W	CI_{AC}	CI_J
$n = 10$	0	0.55431	0.74075	0.55037
$n = 25$	0.02101	0.63895	0.80619	0.56526
$n = 50$	0.09128	0.60079	0.78111	0.53335
$n = 100$	0.11898	0.56060	0.68509	0.49821
$n = 200$	0.19231	0.54350	0.66472	0.48545

表 5.2 から標準区間が信頼区間としてはあまり良くないことが, また, Agersti & Coull 区間は Wilson 区間より $1 - \alpha$ を超える p の区間幅が大きいことが分かる.

最後に, 被覆確率の平均絶対誤差 (mean absolute errors, 略して m.a.e.)

$$\int_0^1 |P\{p \in CI\} - (1 - \alpha)| dp$$

について数値的に比較する.

ここでも, 表 5.1, 5.2 と同様に, $n = 10, 25, 50, 100, 200$; $\alpha = 0.05$ の場合に, 各区間の m.a.e. を数値的に求める.

表 5.3 標準, Wilson, Agersti & Coull, Jeffreys 区間の m.a.e. ($n = 10, 25, 50, 100, 200; \alpha = 0.05$)

	CI_S	CI_W	CI_{AC}	CI_J
$n = 10$	0.18076	0.01679	0.01746	0.01920
$n = 25$	0.08730	0.01217	0.01400	0.01460
$n = 50$	0.05006	0.00857	0.01074	0.00988
$n = 100$	0.02844	0.00604	0.00807	0.00682
$n = 200$	0.01633	0.00439	0.00565	0.00477

表 5.3 から標準区間は信頼区間としてあまり良くないことが分かり, また Wilson 区間, Agresti & Coull 区間, Jeffreys 区間はほぼ同程度であることが分かる.

次に, 信頼区間の長さについて比較する. いま, 区間の期待幅 (expected length, 略して e.l.)

$$\sum_{x=0}^n \{u(x, n) - l(x, n)\} P\{X = x|p\}$$

を考える. ただし, $u(x, n)$, $l(x, n)$ はそれぞれ信頼区間の上端および下端とする. そして, 区間の期待幅を p について 0 から 1 まで積分した値, すなわち平均期待幅 (average expected length, 略して a.e.l.)

$$\int_0^1 \sum_{x=0}^n \{u(x, n) - l(x, n)\} P\{X = x|p\} dp$$

について 4 つの信頼区間を数値的に比較する.

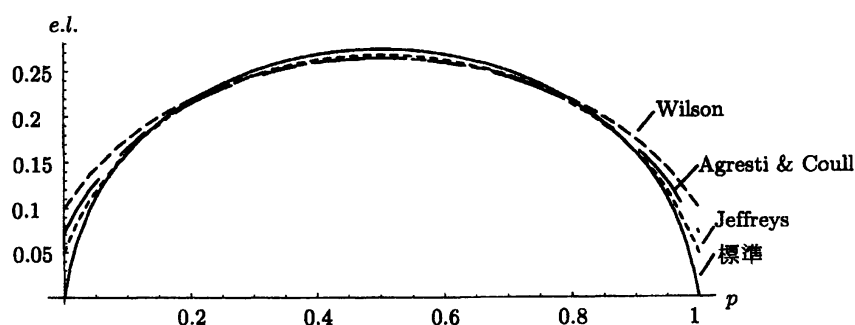
図 5.2 標準, Wilson, Agersti & Coull, Jeffreys 区間の e.l. ($n = 50, \alpha = 0.05$)

図 5.4 から, 0 や 1 に近い p に対しては標準区間が最も小さいことがわかるが, そのあたりの標準区間の被覆確率はまったく $1 - \alpha$ に達していないため, 好ましくない.

また, 信頼区間の a.e.l. を数値的に求める.

表 5.4 標準, Wilson, Agersti & Coull, Jeffreys 区間の a.e.l. ($n = 10, 25, 50, 100, 200; \alpha = 0.05$)

	CI_S	CI_W	CI_{AC}	CI_J
$n = 10$	0.42781	0.43544	0.46507	0.43253
$n = 25$	0.29353	0.29434	0.30650	0.29197
$n = 50$	0.21279	0.21294	0.21833	0.21170
$n = 100$	0.15225	0.15228	0.15448	0.15172
$n = 200$	0.10827	0.10827	0.10913	0.10805

表 5.4 より, 標準区間, Wilson 区間の a.e.l. はほぼ等しく, Jeffreys 区間の a.e.l. はそれらにひけをとらないことが分かる. また, Agresti & Coull 区間の a.e.l. は n が小さいときは他の信頼区間より際立って長いことが分かる.

以上のことから, Agresti & Coull 区間と Jeffreys 区間が信頼区間としては比較的良好な区間であると思われるが, 信頼区間は計算したり覚えておくのに容易であるような単純な形の方が良いと考えられるため, その意味では Agresti & Coull 区間がこの 4 つの区間の中では最良であると考えられる.

次に, 第 3 節で述べたランダム信頼区間と Agresti & Coull 区間, Jeffreys 区間を数値的に比較する. まず, ランダム信頼区間の被覆確率のグラフを描く.

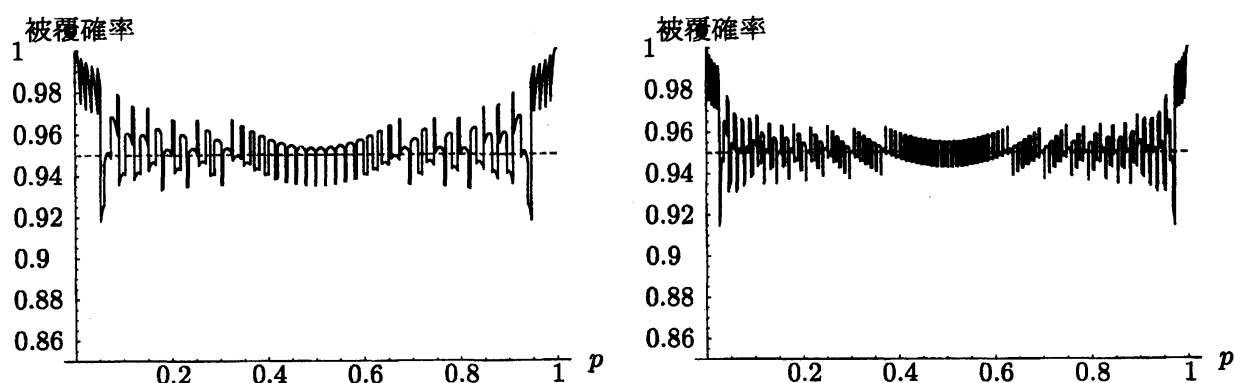


図 5.5 ランダム信頼区間の被覆確率 ($n = 50, 100; \alpha = 0.05$)

また, 3 つの区間の a.c.p., $W_{1-\alpha}$, m.a.e., a.e.l. を数値的に求める.

表 5.5 ランダム信頼区間, Agresti & Coull, Jeffreys 区間の a.c.p., $W_{1-\alpha}$, m.a.e., a.e.l. ($n = 10, 25, 50, 100, 200; \alpha = 0.05$)

		$n = 10$	$n = 25$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
a.c.p.	CI_R	0.96975	0.95976	0.95558	0.95302	0.95174
	CI_{AC}	0.96453	0.96091	0.95803	0.95551	0.95357
	CI_J	0.95316	0.95074	0.95014	0.94995	0.94991
$W_{1-\alpha}$	CI_R	0.75091	0.74777	0.67570	0.61026	0.56552
	CI_{AC}	0.74075	0.80619	0.78111	0.68509	0.66472
	CI_J	0.55037	0.56526	0.53335	0.49821	0.48545
m.a.e.	CI_R	0.02476	0.01596	0.01078	0.00751	0.00514
	CI_{AC}	0.01746	0.01400	0.01074	0.00807	0.00565
	CI_J	0.01920	0.01460	0.00988	0.00682	0.00477
a.e.l.	CI_R	0.46808	0.30322	0.21613	0.15341	0.10875
	CI_{AC}	0.46507	0.30650	0.21833	0.15448	0.10913
	CI_J	0.43253	0.29197	0.21170	0.15172	0.10805

図 5.1, 5.5 よりランダム信頼区間の被覆確率は Jeffreys 区間のそれによく似ていることが分かる. また表 5.5 からランダム信頼区間, Agresti & Coull 区間, Jeffreys 区間はほぼ同程度の良さを持っていると考えられる.

5.2 正確な信頼区間の数値的比較

ここでは, 第 3 節で述べた Crow 区間, Blyth & Still 区間, 新しい信頼区間の 3 つの区間を数値的に比較する. まず, 各区間の被覆確率のグラフを描く.

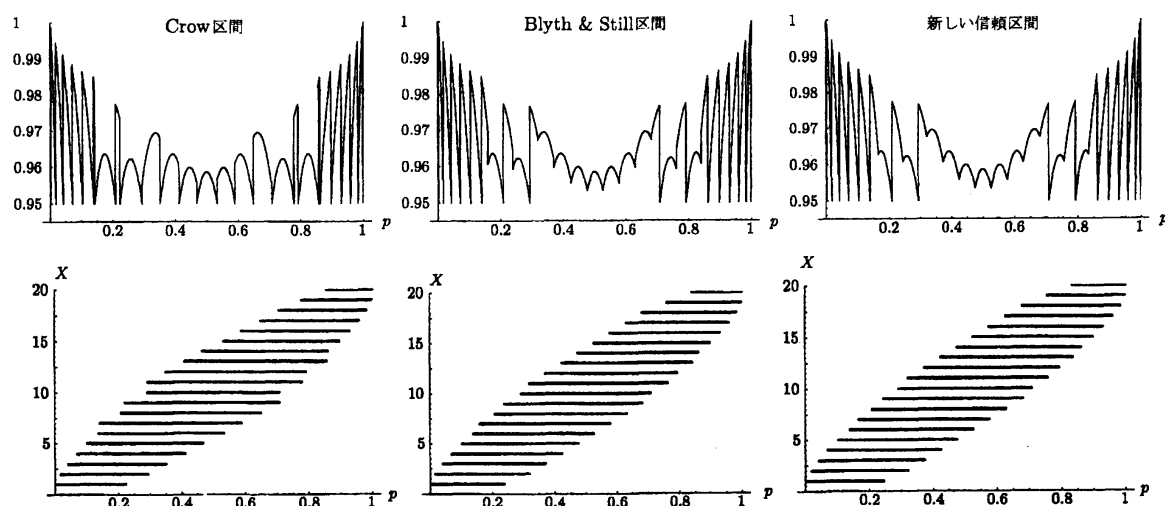


図 5.6 Crow 区間, Blyth & Still 区間, 新しい信頼区間とその被覆確率 ($n = 20, \alpha = 0.05$)

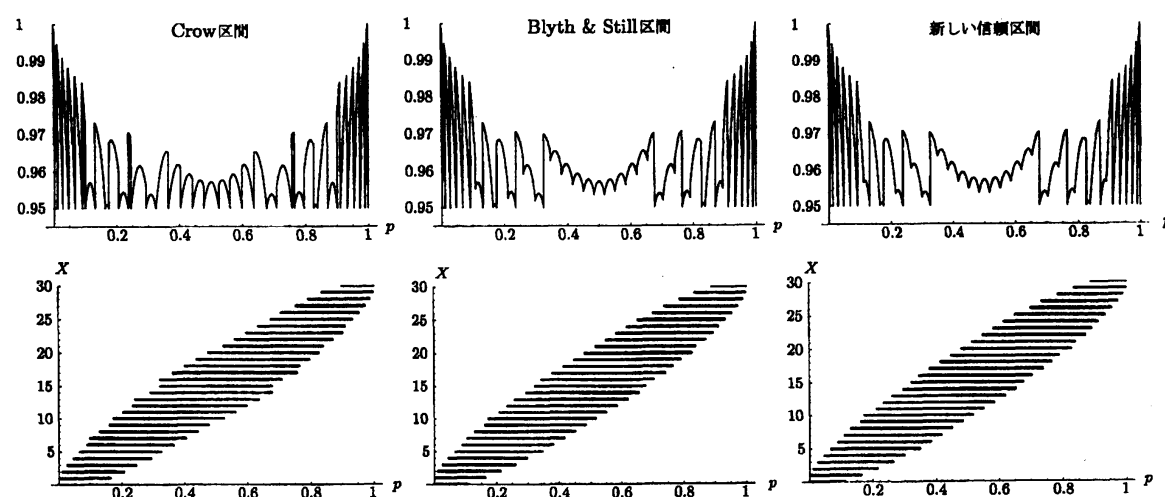


図 5.7 Crow 区間, Blyth & Still 区間, 新しい信頼区間とその被覆確率 ($n = 30, \alpha = 0.05$)

図 5.6, 5.7 より, 新しい信頼区間は Blyth & Still 区間とかなり良く似ていることが分かり, それらは被覆確率の意味では Crow 区間よりも望ましいように思える.

また, 各区間の平均被覆確率 (a.c.p.) の値を求める.

表 5.6 Crow 区間, Blyth & Still 区間, 新しい信頼区間の a.c.p. ($n = 10(10)40; \alpha = 0.05$)

	Crow	Blyth & Still	new
$n = 10$	0.97135	0.97343	0.97346
$n = 20$	0.96421	0.96655	0.96665
$n = 30$	0.96156	0.96256	0.96306
$n = 40$	0.96029	0.96245	0.96255

表 5.6 から, a.c.p. に関しては, 3 つの区間はほぼ同じであることがわかる.

次に, 各信頼区間の期待幅 (e.l.) のグラフを描く.

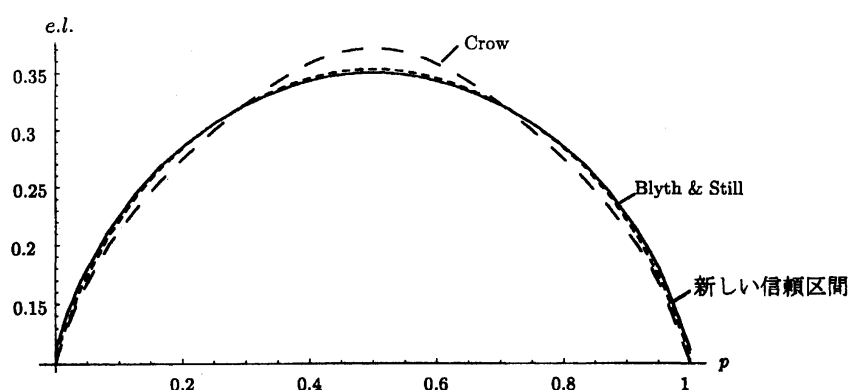


図5.8 Crow 区間, Blyth & Still 区間, 新しい信頼区間の e.l. ($n = 30, \alpha = 0.05$.)

図 5.8 から新しい信頼区間は Blyth & Still 区間とほぼ同じ e.l. をもち, Crow 区間とは少しずれがある.

また, 各区間の平均期待幅 (a.e.l.) を数値的に求める.

表 5.7 Crow 区間, Blyth & Still 区間, 新しい信頼区間の a.e.l. ($n = 10(10)40; \alpha = 0.05$)

	Crow	Blyth & Still	new
$n = 10$	0.47596	0.47596	0.47596
$n = 20$	0.34482	0.34482	0.34482
$n = 30$	0.28302	0.28299	0.28299
$n = 40$	0.24761	0.24761	0.24761

表 5.7 から, 3 つの区間がほぼ同じであるといえる.

最後に, [BS83] では, 信頼区間であるために望ましい性質として, 次のことを挙げている.

(イ) X の範囲 $A(p) \leq X \leq B(p)$ の上限および下限 $A(p), B(p)$ は p について非減少.

(ロ) $p = \frac{1}{2}$ に関して対称.

(ハ) $X = x$ ($x = 0, 1, \dots, n$) が与えられたときの p の範囲

$$l(x) \leq p \leq u(x), \quad l(x+1) \leq p \leq u(x+1)$$

について

$$l(x) < l(x+1), \quad u(x) < u(x+1)$$

である.

(二) $X = x$ を固定したとき, 標本の大きさが n のときの p の範囲

$$l_n(x) \leq p \leq u_n(x)$$

であり, 標本の大きさが $n+1$ のときの p の範囲

$$l_{n+1}(x) \leq p \leq u_{n+1}(x)$$

について,

$$l_n(x) > l_{n+1}(x), \quad u_n(x) > u_{n+1}(x)$$

上記に関して Crow 区間はたとえば, $n = 15$, $\alpha = 0.05$ のとき, $X = 6, 7$ の区間はそれぞれ $[0.19087, 0.66768]$, $[0.19087, 0.70609]$ となってしまうため, 条件 (ハ) を満たさない. そのため, Crow 区間は信頼区間としてはあまり好ましくないといえる. また, 新しい信頼区間は条件 (二) を満たさない. 一方, Blyth & Still 区間はすべての条件を満たす. ($n \leq 30$) しかし, 新しい信頼区間の方は単純なアルゴリズムで求められるのに対し, Blyth & Still 区間は計算するには難しい. 前述したように信頼区間は求めるのに容易であるような単純な形であるほうが望ましいと考えられるため, 新しい信頼区間の方が良いと思われる.

5.3 3 次の Edgeworth 展開による比較

本節では, Brown, Cai and DasGupta [BCD02] に従って, 標準, Wilson, Agresti & Coull, Jeffreys 区間の被覆確率を $1/n$ のオーダーまで漸近展開した 3 次の Edgeworth 展開を用い, それぞれの区間を漸近的に比較する. まず, 次の補題が成り立つ.

補題 5.1 確率変数 X について

$$X \sim B(n, p), \quad \hat{p} := \frac{X}{n}, \quad q = 1 - p$$

とする. また,

$$g(p, z) := (np + z(npq)^{1/2}) - [np + z(npq)^{1/2}],$$

とし,

$$Z_n := \frac{n^{1/2}(\hat{p} - p)}{(pq)^{1/2}},$$

$$F_n(z) := P(Z_n \leq z)$$

と表す. ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数とする. このとき,

$$z = \lambda_1 + \lambda_2 n^{-1/2} + \lambda_3 n^{-1} + O(n^{-3/2}) \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 : \text{定数})$$

とすれば,

$$\begin{aligned} F_n(z) = & \Phi(\lambda_1) + \left\{ \lambda_2 (pq)^{1/2} + \frac{1}{6} (1 - 2p)(1 - \lambda_1^2) \right\} \phi(\lambda_1) (npq)^{-1/2} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} - g(p, z) \right\} \phi(\lambda_1) (npq)^{-1/2} \\ & + \left\{ \lambda_3 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2^2 + \frac{1}{6} (1 - 2p)(pq)^{-1/2} \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - 3) \right\} \phi(\lambda_1) n^{-1} \\ & + \{ (4pq - 1) \lambda_1^5 + (7 - 22pq) \lambda_1^3 + (6pq - 6) \lambda_1 \} \phi(\lambda_1) (72npq)^{-1} \\ & + \left[\left\{ \frac{1}{6} (1 - 2p)(\lambda_1^2 - 3) - (pq)^{1/2} \lambda_2 \right\} \left\{ \frac{1}{2} - g(p, z) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \left\{ \frac{1}{2} g^2(p, z) - \frac{1}{2} g(p, z) + \frac{1}{12} \right\} \right] \lambda_1 \phi(\lambda_1) (npq)^{-1} \\ & + O(n^{-3/2}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

近似 (5.1) は標本の大きさが小さいときも非常に正確である. この定理を用いると, それぞれの区間の被覆確率の 3 次の Edgeworth 展開を得ることができる. いま,

$$\begin{aligned}\omega &:= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36pq}\right) u_{\alpha/2}^5 + \left(\frac{7}{36pq} - \frac{11}{18}\right) u_{\alpha/2}^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6pq}\right) u_{\alpha/2}, \\ Q_{21}(l, u) &:= 1 - g(p, l) - g(p, u), \\ Q_{22}(l, u) &:= \frac{1}{2} \left\{ -g^2(p, l) - g^2(p, u) + g(p, l) + g(p, u) - \frac{1}{3} \right\}\end{aligned}$$

とおく. このとき, 標準区間 CI_S の被覆確率の 3 次の Edgeworth 展開は次の定理で与えられる.

定理 5.1

$$0 < p < 1, \quad 0 < \alpha < 1$$

とする. また,

$$\begin{aligned}l_S &:= \frac{(1-2p)u_{\alpha/2}^2 n^{1/2} - \{u_{\alpha/2}^2 n(4npq + u_{\alpha/2}^2)\}^{1/2}}{2(pq)^{1/2}(n + u_{\alpha/2}^2)}, \\ u_S &:= \frac{(1-2p)u_{\alpha/2}^2 n^{1/2} + \{u_{\alpha/2}^2 n(4npq + u_{\alpha/2}^2)\}^{1/2}}{2(pq)^{1/2}(n + u_{\alpha/2}^2)},\end{aligned}$$

とし,

$$np + l_S(npq)^{1/2} \notin \mathbf{Z}$$

とする. このとき, CI_S の被覆確率は

$$\begin{aligned}P_S &= P_p(p \in CI_S) \\ &= (1 - \alpha) + \{g(p, l_S) - g(p, u_S)\} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1/2} \\ &\quad + \left\{ -\frac{(1-2p)^2}{12pq} u_{\alpha/2}^5 - \frac{1}{4pq} u_{\alpha/2}^3 + \omega \right\} \phi(u_{\alpha/2}) n^{-1} \\ &\quad + \left\{ -(1-2p) \left(\frac{u_{\alpha/2}^2}{3} + \frac{1}{2} \right) Q_{21}(l_S, u_S) + Q_{22}(l_S, u_S) \right\} u_{\alpha/2} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1} \\ &\quad + O(n^{-3/2})\end{aligned}\tag{5.2}$$

である.

また, Wilson 区間 CI_W の被覆確率の 3 次の Edgeworth 展開は次の定理で与えられる.

定理 5.2

$$\begin{aligned}0 &< p < 1, \quad 0 < \alpha < 1 \\ np - u_{\alpha/2}(npq)^{1/2} &\notin \mathbf{Z}\end{aligned}$$

とする. このとき, CI_W の被覆確率は

$$\begin{aligned}
 P_W &= P_p(p \in CI_W) \\
 &= (1 - \alpha) + \{g(p, -u_{\alpha/2}) - g(p, u_{\alpha/2})\} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1/2} \\
 &\quad + \omega \phi(u_{\alpha/2})n^{-1} \\
 &\quad + \left\{ (1 - 2p) \left(\frac{u_{\alpha/2}^2}{6} - \frac{1}{2} \right) Q_{21}(-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}) + Q_{22}(-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}) \right\} u_{\alpha/2} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1} \\
 &\quad + O(n^{-3/2})
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

である.

また, Agresti & Coull 区間 CI_{AC} の被覆確率の 3 次の Edgeworth 展開は次の定理で与えられる.

定理 5.3

$$0 < p < 1, \quad 0 < \alpha < 1$$

とする. また,

$$\begin{aligned}
 l_{AC} &:= \frac{(2p - 1)u_{\alpha/2}^4 - [u_{\alpha/2}^2(n + u_{\alpha/2}^2)^2\{4npq + (1 + 4pq)u_{\alpha/2}^2\}]^{1/2}}{2(npq)^{1/2}(n + 2u_{\alpha/2}^2)} \\
 u_{AC} &:= \frac{(2p - 1)u_{\alpha/2}^4 + [u_{\alpha/2}^2(n + u_{\alpha/2}^2)^2\{4npq + (1 + 4pq)u_{\alpha/2}^2\}]^{1/2}}{2(npq)^{1/2}(n + 2u_{\alpha/2}^2)}
 \end{aligned}$$

とし,

$$np + l_{AC}(npq)^{1/2} \notin \mathbf{Z}$$

とする. このとき, CI_{AC} の被覆確率は

$$\begin{aligned}
 P_{AC} &= P_p(p \in CI_{AC}) \\
 &= (1 - \alpha) + \{g(p, l_{AC}) - g(p, u_{AC})\} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1/2} \\
 &\quad + \left\{ \left(\frac{1}{4pq} - 1 \right) u_{\alpha/2}^3 + \omega \right\} \phi(u_{\alpha/2})n^{-1} \\
 &\quad + \left\{ (1 - 2p) \left(\frac{u_{\alpha/2}^2}{6} - \frac{1}{2} \right) Q_{21}(l_{AC}, u_{AC}) + Q_{22}(l_{AC}, u_{AC}) \right\} \\
 &\quad \cdot u_{\alpha/2} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1} \\
 &\quad + O(n^{-3/2})
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

である.

また, Jeffreys 区間 CI_J の被覆確率の 3 次の Edgeworth 展開は次の定理で与えられる.

定理 5.4 いま,

$$0 < p < 1, \quad 0 < \alpha < 1$$

とする. また,

$$l_J := \frac{\rho_1 - np}{(npq)^{1/2}}, \quad u_J := \frac{\rho_2 - np}{(npq)^{1/2}},$$

$$\rho_1 := \max \left\{ x \left| \int_0^p \frac{1}{B(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2})} p^{(x+\frac{1}{2})-1} (1-p)^{(n-x+\frac{1}{2})-1} dp \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \right. \right\},$$

$$\rho_2 := \max \left\{ x \left| \int_0^p \frac{1}{B(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2})} p^{(x+\frac{1}{2})-1} (1-p)^{(n-x+\frac{1}{2})-1} dp \leq \frac{\alpha}{2} \right. \right\}$$

$$(\rho_1, \rho_2 = 0, 1, \dots, n)$$

とし,

$$np + l_J(npq)^{1/2} \notin \mathbf{Z}$$

とする. このとき, CI_J の被覆確率は

$$\begin{aligned} P_J &= P_p(p \in CI_J) \\ &= (1 - \alpha) + \{g(p, l_J) - g(p, u_J)\} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1/2} \\ &\quad - \frac{1}{12pq} u_{\alpha/2} \phi(u_{\alpha/2}) n^{-1} \\ &\quad + \left\{ \frac{2p-1}{3} Q_{21}(l_J, u_J) + Q_{22}(l_J, u_J) \right\} u_{\alpha/2} \phi(u_{\alpha/2})(npq)^{-1} \\ &\quad + O(n^{-3/2}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

である.

以上の補題, 定理の証明については [BCD02] を参照のこと.

さて, これらの展開を用いて 4 つの区間の比較を行う. まず (5.2)~(5.5) より, それぞれの区間 CI の被覆確率の 3 次の Edgeworth 展開は

$$\begin{aligned} P_p(p \in CI) &= (1 - \alpha) + \text{“}n^{-1/2}\text{のオーダーの振動項”} \\ &\quad + \text{“}n^{-1}\text{のオーダーの非振動項”} \\ &\quad + \text{“}n^{-1}\text{のオーダーの振動項”} \\ &\quad + O(n^{-3/2}) \end{aligned}$$

と 5 つの部分に分解して考えることができる. いま “平均的に” という意味で振動項は非振動項よりも低いオーダーであることが示されている ([BCD02] 参照). よって, ここではそれぞれの区間の非振動項の比較を行う. そこで, (5.2)~(5.5) より

$$P_{AC} - P_S = \left\{ \frac{(1-2p)^2}{12pq} u_{\alpha/2}^5 + \left(\frac{1}{2pq} - 1 \right) u_{\alpha/2}^3 \right\} \phi(u_{\alpha/2}) n^{-1} + \text{“振動項”} \quad (5.6)$$

$$P_{AC} - P_W = \left(\frac{1}{4pq} - 1 \right) u_{\alpha/2}^3 \phi(u_{\alpha/2}) n^{-1} + \text{“振動項”} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} P_{AC} - P_J &= \left\{ -\frac{(1-2p)^2}{36pq} u_{\alpha/2}^5 + \left(\frac{4}{9pq} - \frac{29}{18} \right) u_{\alpha/2}^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12pq} \right) u_{\alpha/2} \right\} \\ &\quad \cdot \phi(u_{\alpha/2}) n^{-1} \\ &\quad + \text{“振動項”} \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる。また、 $P_S - P_W$, $P_S - P_J$, $P_W - P_J$ も (5.6)~(5.8) から容易に求めることができる。

これらからいくつかのことがわかる。まず、(5.6), (5.7) より、任意の $0 < p < 1$, $u_{\alpha/2}$ に対して $P_{AC} > P_S$, $P_{AC} > P_W$ であることがわかる。また、(5.8) より $0 < u_{\alpha/2} < 0.323$, $1 < u_{\alpha/2} < 3.976$, $u_{\alpha/2} \neq \sqrt{(29 + \sqrt{817})/4} \doteq 3.794$ ならば任意の $0 < p < 1$ に対して $P_{AC} > P_J$ であることがわかる。

*) いま、 $u_{\alpha/2} \doteq 1.96$ より、これら 4 つの区間では Agresti & Coull 区間が最も大きい被覆確率をもつということがわかる。

また、 $\alpha = 0.05$ のときのそれぞれの区間の “ n^{-1} のオーダーの非振動項” を p の関数として見たときのグラフを描く。

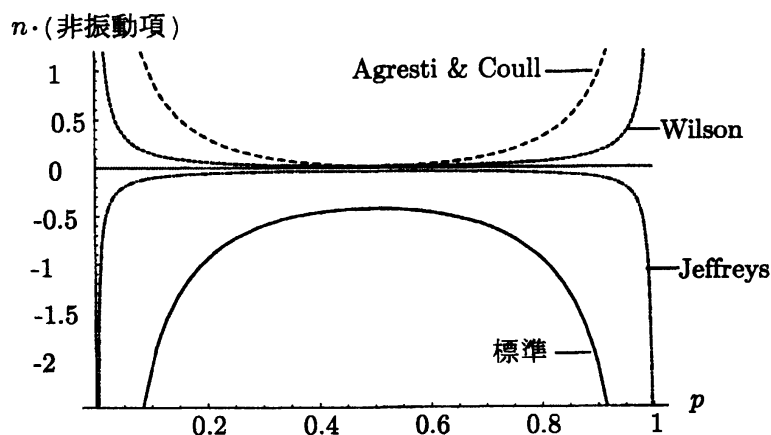


図 5.9 CI_S , CI_W , CI_{AC} , CI_J の n^{-1} のオーダーの非振動項の比較 ($\alpha = 0.05$)

図 5.9 から、標準区間は大きい負の偏りをもつことが分かる。また、 $p = 0, 1$ の近くを除けば CI_{AC} , CI_W , CI_J はほとんど同等である。特に $p = 0, 1$ の近くでは CI_W , CI_J は CI_S よりも少ないが CI_{AC} より偏りが大きくなる。 CI_{AC} は全体的に他の区間より正の偏りが大きいため、ここからも他の区間より被覆確率が大きくなることがわかる。

6 ポアソン分布および負の 2 項分布の母数の信頼区間

今回提案した新たな信頼区間のアルゴリズムは、ポアソン分布 $Po(\lambda)$ や負の 2 項分布 $NB(k, p)$ にも応用できる。

まず、ポアソン分布の場合について述べる。 $\lambda = (0, \infty)$ より、 $\lambda = +0$ から始める。この場合、区間の幅が最も狭くなる区間は

$$\alpha^*(+0) = 0, \quad \beta^*(+0) = 0$$

である。そこで、

$$\lambda^* := \inf\{\lambda | P\{X = 0\} < 1 - \alpha\},$$

また、

$$\alpha^*(\lambda^* + 0) = \alpha^*(+0), \quad \beta^*(\lambda^* + 0) = \beta^*(+0) + 1$$

*) [BCD02] では $u_{\alpha/2} \leq 3.95$ となっているが、これは計算ミスのように見える。

$$\begin{aligned}
Q(\lambda) &:= P\{\alpha^*(\lambda^* + 0) \leq X \leq \beta^*(\lambda^* + 0) | \lambda\} \\
S(\lambda) &:= P\{\alpha^*(\lambda^* + 0) + 1 \leq X \leq \beta^*(\lambda^* + 0) | \lambda\} \\
R(\lambda) &:= P\{X = \alpha^*(\lambda^* + 0) | \lambda\} - P\{X = \beta^*(\lambda^* + 0) + 1 | \lambda\}
\end{aligned}$$

とおく. そして,

$$\lambda^{**} := \begin{cases} \inf\{\lambda | S(\lambda) > 1 - \alpha\} & (S(\lambda) > 1 - \alpha \text{ となる } \lambda \text{ が存在するとき}), \\ \inf\{\lambda | Q(\lambda) < 1 - \alpha \text{ or } R(\lambda) < 0\} & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と定義する. もし, $S(\lambda^{**} + 0) > 1 - \alpha$ ならば,

$$\alpha^*(\lambda^{**} + 0) = \alpha^*(\lambda^*) + 1, \quad \beta^*(\lambda^{**} + 0) = \beta^*(\lambda^*)$$

とする. $S(\lambda^{**} + 0) < 1 - \alpha$, $Q(\lambda^{**} + 0) < 1 - \alpha$, $R(\lambda^{**} + 0) > 0$ ならば,

$$\alpha^*(\lambda^{**} + 0) = \alpha^*(\lambda^*), \quad \beta^*(\lambda^{**} + 0) = \beta^*(\lambda^*) + 1$$

とする. また, $S(\lambda^{**} + 0) < 1 - \alpha$, $Q(\lambda^{**} + 0) > 1 - \alpha$, $R(\lambda^{**} + 0) < 0$ ならば,

$$\alpha^*(\lambda^{**} + 0) = \alpha^*(\lambda^*) + 1, \quad \beta^*(\lambda^{**} + 0) = \beta^*(\lambda^*) + 1$$

とする. そして再び $\lambda > \lambda^{**}$ に対し,

$$\begin{aligned}
Q(\lambda) &:= P\{\alpha^*(\lambda^{**} + 0) \leq X \leq \beta^*(\lambda^{**} + 0) | \lambda\} \\
S(\lambda) &:= P\{\alpha^*(\lambda^{**} + 0) + 1 \leq X \leq \beta^*(\lambda^{**} + 0) | \lambda\} \\
R(\lambda) &:= P\{X = \alpha^*(\lambda^{**} + 0) | \lambda\} - P\{X = \beta^*(\lambda^{**} + 0) + 1 | \lambda\}
\end{aligned}$$

とし,

$$\lambda^{***} := \begin{cases} \inf_{p > p^{**}} \{\lambda | S(\lambda) > 1 - \alpha\} & (S(\lambda) > 1 - \alpha \text{ となる } \lambda \text{ が存在するとき}), \\ \inf_{p > p^{**}} \{\lambda | Q(\lambda) < 1 - \alpha \text{ or } R(\lambda) < 0\} & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と定義する. この操作を繰り返すことにより, ポアソン分布の正確な水準をもつ信頼区間を得ることができる. ポアソン分布の 95%信頼区間と被覆確率を図 6.1 に示し, その区間の上端, 下端の値を表 6.1 において与える.

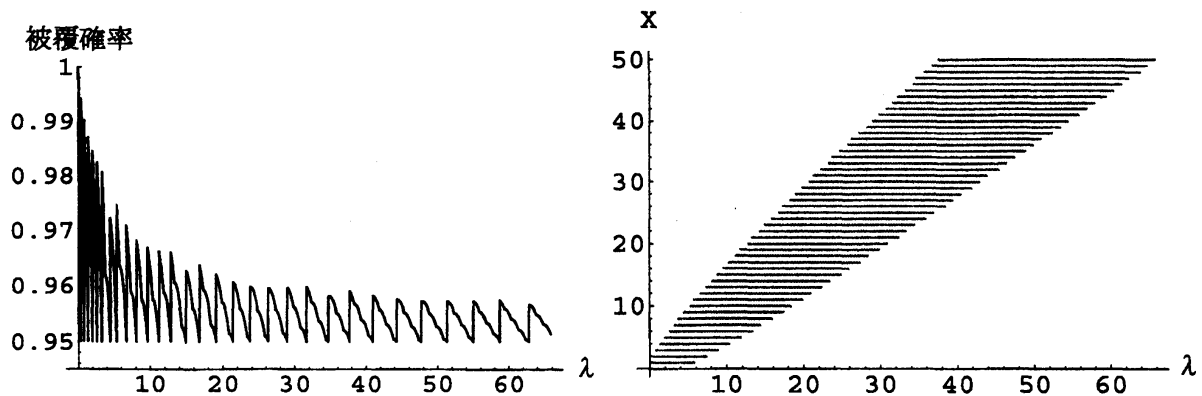


図 6.1 ポアソン分布の新しい信頼区間とその被覆確率 ($\alpha = 0.05$).

負の 2 項分布 $NB(k, p)$ については, $p = 1$ から始める. この場合も, 区間の幅が最短になる区間は

$$\alpha^*(1-0) = 0, \quad \beta^*(1-0) = 0$$

である.

$$p^* = \sup\{p | P\{X = 0\} < 1 - \alpha\},$$

また,

$$\alpha^*(p^* - 0) = \alpha^*(1-0), \quad \beta^*(p^* - 0) = \beta^*(1-0) + 1$$

とし,

$$\begin{aligned} Q(p) &:= P\{\alpha^*(p^* - 0) \leq X \leq \beta^*(p^* - 0) | p\} \\ S(p) &:= P\{\alpha^*(p^* - 0) + 1 \leq X \leq \beta^*(p^* - 0) | p\} \\ R(p) &:= P\{X = \alpha^*(p^* - 0) | p\} - P\{X = \beta^*(p^* - 0) + 1 | p\} \end{aligned}$$

とおく. そして,

$$p^{**} := \begin{cases} \sup\{p | S(p) > 1 - \alpha\} & (S(p) > 1 - \alpha \text{ となる } p \text{ が存在するとき}), \\ \sup\{p | Q(p) < 1 - \alpha \text{ or } R(p) < 0\} & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と定義する. もし, $S(p^{**} - 0) > 1 - \alpha$ ならば,

$$\alpha^*(p^{**} - 0) = \alpha^*(p^*) + 1, \quad \beta^*(p^{**} - 0) = \beta^*(p^*)$$

とする. $S(p^{**} - 0) < 1 - \alpha$, $Q(p^{**} - 0) < 1 - \alpha$, $R(p^{**} - 0) > 0$ ならば,

$$\alpha^*(p^{**} - 0) = \alpha^*(p^*), \quad \beta^*(p^{**} - 0) = \beta^*(p^*) + 1$$

とする. また, $S(p^{**} - 0) < 1 - \alpha$, $Q(p^{**} - 0) > 1 - \alpha$, $R(p^{**} - 0) < 0$ ならば,

$$\alpha^*(p^{**} - 0) = \alpha^*(p^*) + 1, \quad \beta^*(p^{**} - 0) = \beta^*(p^*) + 1$$

とする. そして再び $p < p^{**}$ に対し,

$$\begin{aligned} Q(p) &:= P\{\alpha^*(p^{**} - 0) \leq X \leq \beta^*(p^{**} - 0) | p\} \\ S(p) &:= P\{\alpha^*(p^{**} - 0) + 1 \leq X \leq \beta^*(p^{**} - 0) | p\} \\ R(p) &:= P\{X = \alpha^*(p^{**} - 0) | p\} - P\{X = \beta^*(p^{**} - 0) + 1 | p\} \end{aligned}$$

とし,

$$p^{***} := \begin{cases} \sup_{p < p^{**}} \{p | S(p) > 1 - \alpha\} & (S(p) > 1 - \alpha \text{ となる } p \text{ が存在するとき}), \\ \sup_{p < p^{**}} \{p | Q(p) < 1 - \alpha \text{ or } R(p) < 0\} & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と定義する. この操作を繰り返していくことにより, 負の 2 項分布の正確な水準をもつ信頼区間を構成することができる.

図 6.2, 図 6.3 に $k = 10, 20$; $\alpha = 0.05$ のときの新しい信頼区間のグラフを示し, その区間の上端, 下端の値を表 6.2, 表 6.3 において与える.

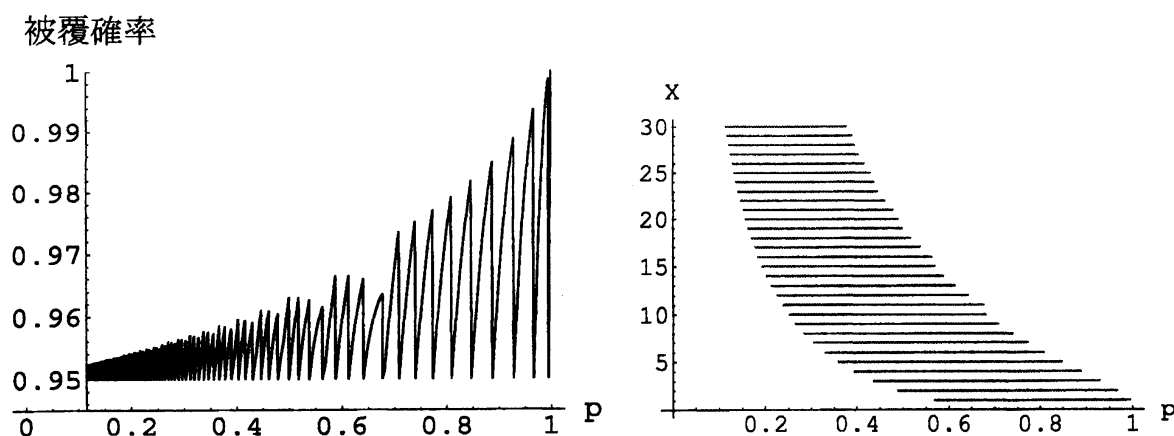


図 6.2 負の 2 項分布の新しい信頼区間とその被覆確率 ($k = 10, \alpha = 0.05$).

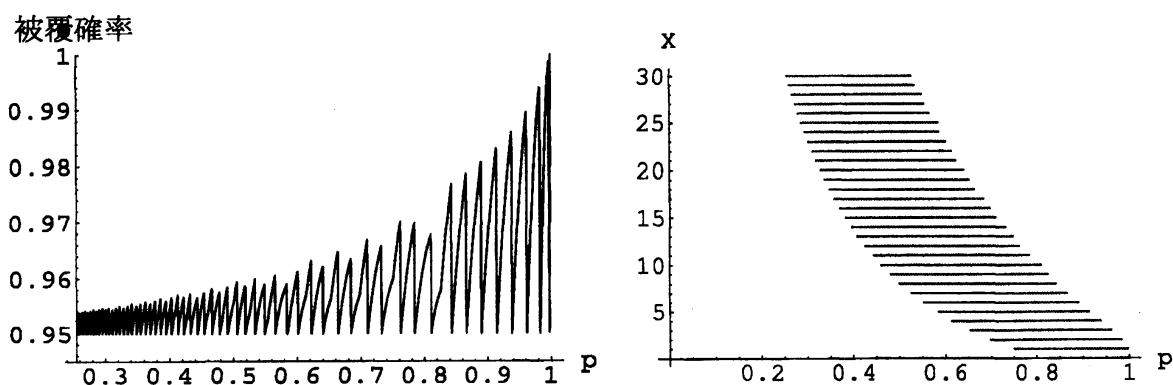


図 6.3 負の 2 項分布の新しい信頼区間とその被覆確率 ($k = 20, \alpha = 0.05$).

このように新たな信頼区間のアルゴリズムは負の 2 項分布にも応用できるが、 k が小さいときにはうまくいかなかったので、改良が必要と思われる。

7 まとめ

本論において、従来の 2 項確率 p についての漸近信頼区間および正確な信頼区間の構成法について述べ、それらの信頼区間の被覆確率、区間の幅等に関する数値比較を行った。また、新しい正確な信頼区間の構成法を提案し、その区間が従来の正確な信頼区間の中で比較的良好な Blyth & Still 区間に引けをとらないことが分かり、また新しい信頼区間は従来の区間よりも構成が比較的単純であるという長所をもつことも分かった。今後は正確な信頼区間とほぼ同等な漸近的構成法の導出について検討する必要がある。さらに、今回提案した 2 項確率 p の新しい信頼区間の構成法はポアソン分布や負の 2 項分布に応用し、それらの正確な信頼区間を導出した。今後は他の離散型分布への応用や、 k が少ないときの負の 2 項分布への改良が課題として挙げられる。

参考文献

- [AC98] Agresti, A. and Coull, B. A. (1998). Approximate is better than “exact” for interval estimation of binomial proportions. *Amer. Statist.* **52** 119 – 126.

- [AKT02] Akahira, M., Kakizume, T. and Takeuchi, K. (2002). A symmetric confidence interval of exact level for the binomial probability. *In preparation*.
- [ATT97] Akahira, M., Takahashi, K. and Takeuchi, K. (1997). Randomized confidence intervals of a parameter for a family of discrete exponential type distributions. *Commun. Statist.-Simula.* **26**(3) 1103 – 1128.
- [BS83] Blyth, C. R. and Still, H. A. (1983). Binomial confidence intervals. *J. Amer. Statist. Assoc.* **78** 108 – 116.
- [BCD01] Brown, L. D., Cai, T. T. and DasGupta, A. (2001). Interval estimation for a binomial proportion (with discussion). *Statist. Sci.* **16** 101 – 133.
- [BCD02] Brown, L. D., Cai, T. T. and DasGupta, A. (2002). Confidence intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions. *Ann. Statist.* **30** 160 – 201.
- [BR76] Bhattacharya, R. N. and Ranga Rao, R. (1976). *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*. Wiley, New York.
- [CP34] Clopper C. J. and Pearson, E. S. (1934). The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. *Biometrika* **26** 404 – 413.
- [C56] Crow, E. L. (1956). Confidence intervals for a proportion. *Biometrika* **43** 423 – 435.
- [IH01] Iwasaki, M. and Hidaka, N. (2001). Notes on the central and shortest confidence intervals of a binomial parameter. *Japanese Journal of Biometrics* **22** 1 – 13.
- [JKB95] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions* **2**, 2nd ed. Wiley, New York.
- [L86] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*(2nd ed.). Edward Arnold, London.
- [S54] Sterne, T. E. (1954). Some remarks on confidence or fiducial limits. *Biometrika* **41** 275 – 278.
- [W27] Wilson, E. B. (1927). Probable inference, the law of succession, and statistical inference. *J. Amer. Statist. Assoc.* **22** 209 – 212.

表 4.4 新しい 95%信頼区間の下端の値 ($n = 10(1)50$)

$x \setminus n$	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.00512	0.00465	0.00426	0.00394	0.00366	0.00341	0.00320
2	0.03677	0.03332	0.03046	0.02805	0.02600	0.02423	0.02268
3	0.08726	0.07882	0.07187	0.06605	0.06110	0.05685	0.05315
4	0.15003	0.13508	0.12285	0.11267	0.10405	0.09666	0.09025
5	0.22244	0.19958	0.18103	0.16566	0.15272	0.14166	0.13211
6			0.24267	0.22396	0.20607	0.19087	0.17777
7					0.23813	0.22222	0.20834
8							0.27197
$x \setminus n$	17	18	19	20	21	22	23
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.00301	0.00285	0.00270	0.00256	0.00244	0.00233	0.00223
2	0.02132	0.02011	0.01903	0.01807	0.01719	0.01640	0.01567
3	0.04990	0.04702	0.04446	0.04217	0.04001	0.03822	0.03652
4	0.08465	0.07970	0.07529	0.07135	0.06781	0.06460	0.06168
5	0.12377	0.11643	0.10991	0.10408	0.09884	0.09411	0.08981
6	0.16636	0.15634	0.14747	0.13955	0.13245	0.12603	0.12022
7	0.19611	0.18526	0.17555	0.16682	0.15893	0.15175	0.14519
8	0.25300	0.23645	0.22187	0.20893	0.19738	0.18699	0.17760
9		0.27137	0.25709	0.24426	0.23267	0.22213	0.21253
10				0.29271	0.27571	0.26042	0.24656
11						0.29079	0.27813
$x \setminus n$	24	25	26	27	28	29	30
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.00213	0.00205	0.00197	0.00190	0.00183	0.00177	0.00171
2	0.01501	0.01440	0.01384	0.01332	0.01284	0.01239	0.01198
3	0.03495	0.03352	0.03220	0.03098	0.02985	0.02880	0.02782
4	0.05901	0.05656	0.05431	0.05223	0.05031	0.04852	0.04685
5	0.08589	0.08229	0.07899	0.07594	0.07311	0.07049	0.06806
6	0.11491	0.11006	0.10560	0.10149	0.09768	0.09416	0.09087
7	0.13919	0.13366	0.12855	0.12383	0.11944	0.11535	0.11153
8	0.16908	0.16131	0.15420	0.14766	0.14163	0.13605	0.13088
9	0.20372	0.19562	0.18815	0.18123	0.17480	0.16882	0.16323
10	0.23394	0.22236	0.21168	0.20176	0.19247	0.18365	0.17506
11	0.26655	0.25590	0.24609	0.23700	0.22857	0.22073	0.21341
12	0.31009	0.29587	0.28205	0.26931	0.25752	0.24655	0.23629
13			0.30377	0.29249	0.28203	0.27231	0.26324
14					0.31907	0.30808	0.29783
15							0.32417

表 4.4(続) 新しい 95%信頼区間の下端の値 ($n = 10(1)50$)

$x \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.00165	0.00160	0.00155	0.00151	0.00147	0.00142	0.00139
2	0.01159	0.01122	0.01088	0.01055	0.01025	0.00996	0.00969
3	0.02690	0.02604	0.02524	0.02448	0.02377	0.02310	0.02246
4	0.04530	0.04385	0.04248	0.04120	0.03999	0.03885	0.03778
5	0.06578	0.06365	0.06166	0.05979	0.05802	0.05636	0.05479
6	0.08781	0.08495	0.08228	0.07976	0.07739	0.07517	0.07306
7	0.10796	0.10461	0.10146	0.09850	0.09570	0.09306	0.09060
8	0.12607	0.12158	0.11739	0.11346	0.10977	0.10630	0.10303
9	0.15763	0.15230	0.14731	0.14264	0.13825	0.13412	0.13024
10	0.16584	0.16618	0.16116	0.15643	0.15197	0.14777	0.14379
11	0.20656	0.20014	0.19411	0.18843	0.18249	0.17689	0.17162
12	0.22664	0.21747	0.20864	0.19987	0.18924	0.18997	0.18485
13	0.25476	0.24681	0.23935	0.23234	0.22572	0.21947	0.21356
14	0.28824	0.27850	0.26843	0.25898	0.25008	0.24168	0.23372
15	0.30974	0.29503	0.28458	0.27620	0.26831	0.26086	0.25381
16		0.32577	0.31588	0.30659	0.29783	0.28960	0.28176
17				0.33669	0.32708	0.31708	0.30641
18						0.33395	0.32198
$x \setminus n$	38	39	40	41	42	43	44
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.00135	0.00131	0.00128	0.00125	0.00122	0.00119	0.00117
2	0.00943	0.00919	0.00896	0.00874	0.00853	0.00833	0.00814
3	0.02186	0.02129	0.02075	0.02024	0.01975	0.01928	0.01884
4	0.03676	0.03580	0.03488	0.03402	0.03319	0.03240	0.03165
5	0.05331	0.05190	0.05057	0.04930	0.04810	0.04695	0.04586
6	0.07107	0.06919	0.06740	0.06570	0.06409	0.06256	0.06109
7	0.08820	0.08595	0.08382	0.08179	0.07985	0.07801	0.07624
8	0.09994	0.09702	0.09426	0.09163	0.08914	0.08677	0.08451
9	0.12657	0.12310	0.11981	0.11670	0.11374	0.11093	0.10825
10	0.14002	0.13644	0.13304	0.12981	0.12673	0.12379	0.12099
11	0.16665	0.16195	0.15751	0.15330	0.14931	0.14551	0.14190
12	0.17999	0.17539	0.17102	0.16686	0.16290	0.15912	0.15552
13	0.20797	0.20266	0.19762	0.19282	0.18825	0.18368	0.17906
14	0.22614	0.21890	0.21195	0.20519	0.19851	0.19153	0.18963
15	0.24714	0.24082	0.23481	0.22910	0.22365	0.21847	0.21352
16	0.27436	0.26734	0.26068	0.25434	0.24737	0.24065	0.23425
17	0.29623	0.28643	0.27687	0.26728	0.25606	0.25305	0.24730
18	0.31349	0.30544	0.29870	0.29054	0.28362	0.27703	0.27074
19	0.34041	0.33167	0.32338	0.31549	0.30798	0.30083	0.29400
20			0.34881	0.34030	0.33109	0.32129	0.31175
21					0.34581	0.33521	0.32777
22							0.35091

表 4.4(続) 新しい 95%信頼区間の下端の値 ($n = 10(1)50$)

$x \setminus n$	45	46	47	48	49	50
0	0	0	0	0	0	0
1	0.00114	0.00111	0.00109	0.00107	0.00105	0.00103
2	0.00795	0.00778	0.00761	0.00745	0.00730	0.00715
3	0.01842	0.01801	0.01762	0.01725	0.01689	0.01655
4	0.03093	0.03025	0.02959	0.02897	0.02836	0.02779
5	0.04482	0.04382	0.04286	0.04195	0.04108	0.04024
6	0.05970	0.05836	0.05708	0.05586	0.05469	0.05357
7	0.07456	0.07295	0.07141	0.06993	0.06851	0.06715
8	0.08236	0.08030	0.07834	0.07645	0.07465	0.07291
9	0.10570	0.10327	0.10094	0.09872	0.09659	0.09455
10	0.11831	0.11575	0.11330	0.11095	0.10869	0.10653
11	0.13846	0.13518	0.13205	0.12906	0.12620	0.12346
12	0.15207	0.14878	0.14562	0.14260	0.13970	0.13691
13	0.17466	0.17047	0.16647	0.16265	0.15899	0.15549
14	0.18542	0.18140	0.17755	0.17386	0.17032	0.16692
15	0.20879	0.20426	0.19993	0.19578	0.19180	0.18798
16	0.22814	0.22229	0.21669	0.21131	0.20614	0.20115
17	0.24181	0.23656	0.23153	0.22672	0.22210	0.21767
18	0.26473	0.25899	0.25349	0.24822	0.24317	0.23832
19	0.28748	0.28079	0.27363	0.26674	0.26010	0.25368
20	0.30230	0.29246	0.28507	0.27913	0.27344	0.26797
21	0.32048	0.31351	0.30683	0.30044	0.29431	0.28843
22	0.34310	0.33563	0.32849	0.32165	0.31509	0.30879
23		0.35768	0.35007	0.34278	0.33507	0.32653
24				0.35926	0.34822	0.33852
25						0.35882

表 4.5 新しい 95%信頼区間の上端の値 ($n = 10(1)50$)

$x \setminus n$	10	11	12	13	14	15	16
0	0.29087	0.26452	0.24267	0.22512	0.23813	0.22222	0.20834
1	0.44649	0.40447	0.37020	0.34154	0.31715	0.30207	0.30544
2	0.55351	0.5	0.45711	0.43393	0.42562	0.39671	0.37166
3	0.61941	0.59553	0.54289	0.51968	0.5	0.46572	0.43616
4	0.70914	0.66711	0.62981	0.58656	0.57438	0.53428	0.5
5	0.77756	0.73548	0.70604	0.65846	0.62890	0.60329	0.56384
6			0.75734	0.73959	0.68285	0.66768	0.62834
7					0.76188	0.70609	0.69456
8							0.72803
$x \setminus n$	17	18	19	20	21	22	23
0	0.19611	0.18526	0.17555	0.16682	0.15893	0.15175	0.14519
1	0.28737	0.27137	0.25709	0.24426	0.23267	0.22213	0.21253
2	0.34970	0.33026	0.31574	0.31999	0.30467	0.29079	0.27813
3	0.41656	0.41407	0.39197	0.37220	0.35439	0.33825	0.32354
4	0.48874	0.47143	0.44616	0.42359	0.40328	0.38899	0.38877
5	0.54420	0.52857	0.5	0.47457	0.45521	0.45343	0.43342
6	0.59372	0.58593	0.55384	0.52543	0.50605	0.5	0.47783
7	0.65030	0.62533	0.60803	0.57641	0.55104	0.54657	0.52217
8	0.71263	0.66974	0.65514	0.62780	0.59672	0.58239	0.56658
9		0.72863	0.68827	0.68001	0.64561	0.61747	0.61123
10				0.70729	0.69533	0.66175	0.63989
11						0.70922	0.67646
$x \setminus n$	24	25	26	27	28	29	30
0	0.13919	0.13366	0.12855	0.12383	0.11944	0.11535	0.11153
1	0.20372	0.19562	0.18815	0.18123	0.17480	0.16882	0.16323
2	0.26655	0.25590	0.24609	0.23700	0.22857	0.22073	0.21341
3	0.31009	0.30318	0.30377	0.29249	0.28203	0.27231	0.26324
4	0.37243	0.35745	0.34365	0.33090	0.31907	0.30808	0.29783
5	0.41517	0.39845	0.38305	0.36884	0.35713	0.35960	0.34755
6	0.45765	0.43917	0.42217	0.41478	0.40913	0.39492	0.38168
7	0.5	0.47974	0.46507	0.46227	0.44555	0.43004	0.41561
8	0.54235	0.52026	0.50559	0.5	0.48186	0.46505	0.44941
9	0.58483	0.56083	0.54213	0.53374	0.51814	0.5	0.48314
10	0.62757	0.60155	0.57783	0.57042	0.55445	0.53495	0.51686
11	0.66111	0.64255	0.61695	0.59815	0.59087	0.56996	0.55059
12	0.68992	0.68299	0.65635	0.63117	0.61942	0.60508	0.58439
13			0.69623	0.66910	0.68093	0.64040	0.61832
14						0.66090	0.65245
15							0.67583

表 4.5(続) 新しい 95%信頼区間の上端の値 ($n = 10(1)50$)

$x \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37
0	0.10796	0.10461	0.10146	0.09850	0.09570	0.09306	0.09057
1	0.16063	0.16618	0.16116	0.15643	0.15197	0.14777	0.14379
2	0.20656	0.20014	0.19411	0.18843	0.18763	0.18997	0.18485
3	0.25476	0.24681	0.23935	0.23234	0.22572	0.21947	0.21356
4	0.28824	0.28149	0.28458	0.27620	0.26831	0.26086	0.25381
5	0.33630	0.32577	0.31588	0.30659	0.29783	0.28956	0.28176
6	0.36932	0.35775	0.34690	0.33669	0.32708	0.32022	0.32198
7	0.40214	0.38953	0.37788	0.38061	0.36968	0.35937	0.34963
8	0.43482	0.42340	0.42311	0.41057	0.39877	0.38764	0.37713
9	0.46743	0.46221	0.45390	0.44043	0.42776	0.41581	0.40453
10	0.50023	0.5	0.48464	0.47023	0.45668	0.44391	0.43185
11	0.53257	0.52735	0.51536	0.5	0.48556	0.47197	0.45913
12	0.56518	0.55374	0.54610	0.52977	0.51444	0.5	0.48647
13	0.59786	0.58036	0.57689	0.55957	0.54332	0.52804	0.51370
14	0.63068	0.61047	0.59878	0.58943	0.57224	0.55609	0.54087
15	0.66370	0.64225	0.62239	0.61939	0.60123	0.58419	0.56815
16		0.67423	0.65311	0.63705	0.63032	0.61236	0.59547
17				0.66331	0.65134	0.64063	0.62287
18						0.66605	0.65037
$x \setminus n$	38	39	40	41	42	43	44
0	0.08820	0.08595	0.08382	0.08179	0.07985	0.07801	0.07624
1	0.14002	0.13644	0.13304	0.12981	0.12673	0.12379	0.12099
2	0.17999	0.17539	0.17102	0.16686	0.16290	0.15912	0.15552
3	0.20797	0.20266	0.19762	0.19282	0.18825	0.18498	0.18963
4	0.24714	0.24082	0.23481	0.22930	0.22365	0.21847	0.21352
5	0.27436	0.26734	0.26068	0.25434	0.25261	0.25305	0.24730
6	0.31349	0.30544	0.29780	0.29054	0.28362	0.27703	0.27074
7	0.34041	0.33167	0.32338	0.31549	0.30798	0.30083	0.29400
8	0.36718	0.35776	0.34881	0.34030	0.33480	0.33541	0.32777
9	0.39386	0.38374	0.37967	0.37666	0.36766	0.35909	0.35091
10	0.42096	0.42212	0.41150	0.40141	0.39182	0.38268	0.37396
11	0.45297	0.44811	0.43683	0.42611	0.41592	0.40621	0.39695
12	0.48667	0.47406	0.46211	0.45076	0.43997	0.42969	0.41989
13	0.51333	0.5	0.48737	0.47539	0.46399	0.45315	0.44280
14	0.53470	0.52594	0.51263	0.5	0.48800	0.47658	0.46790
15	0.55723	0.55189	0.53789	0.52461	0.51200	0.5	0.49209
16	0.57991	0.57788	0.56318	0.54924	0.53601	0.52342	0.51474
17	0.60615	0.59518	0.58850	0.57389	0.56003	0.54686	0.53618
18	0.63282	0.61626	0.61219	0.59859	0.58409	0.57031	0.55720
19	0.65959	0.64224	0.62841	0.62334	0.60818	0.59379	0.58011
20			0.65119	0.64095	0.63234	0.61732	0.60305
21					0.65419	0.64091	0.62604
22							0.64909

表 4.5(続) 新しい 95%信頼区間の上端の値 ($n = 10(1)50$)

$x \setminus n$	45	46	47	48	49	50
0	0.07456	0.07295	0.07141	0.06993	0.06851	0.06715
1	0.11831	0.11575	0.11330	0.11095	0.10869	0.10653
2	0.15207	0.14878	0.14562	0.14260	0.13970	0.13691
3	0.18542	0.18140	0.17755	0.17386	0.17032	0.16692
4	0.20879	0.20426	0.19993	0.19578	0.19180	0.18798
5	0.24181	0.23656	0.23153	0.22672	0.22210	0.21767
6	0.26473	0.25899	0.25349	0.24822	0.24317	0.23832
7	0.28748	0.28251	0.28507	0.27913	0.27344	0.26797
8	0.32048	0.31351	0.30683	0.30044	0.29431	0.28843
9	0.34310	0.33563	0.32849	0.32165	0.31509	0.30879
10	0.36564	0.35768	0.35007	0.34278	0.33734	0.33852
11	0.38811	0.37967	0.37523	0.37381	0.36616	0.35882
12	0.41105	0.41216	0.40335	0.39491	0.38683	0.37907
13	0.44024	0.43415	0.42486	0.41597	0.40745	0.39928
14	0.46633	0.45611	0.44635	0.43700	0.42805	0.41946
15	0.48878	0.47806	0.46782	0.45801	0.44862	0.43961
16	0.51122	0.5	0.48927	0.47901	0.46918	0.45975
17	0.53367	0.52194	0.51073	0.5	0.48973	0.47988
18	0.55462	0.54389	0.53218	0.52099	0.51027	0.5
19	0.57125	0.56585	0.55365	0.54199	0.53082	0.52012
20	0.58981	0.58784	0.57514	0.56300	0.55140	0.54025
21	0.61189	0.60228	0.59665	0.58403	0.57195	0.56039
22	0.63436	0.62033	0.61590	0.60509	0.59255	0.58054
23		0.64232	0.63020	0.62619	0.61317	0.60072
24				0.64074	0.63384	0.62093
25						0.64118

表 6.1 ポアソン分布の新しい 95% 信頼区間の上端, 下端の値

x	0	1	2	3	4	5	6	7
下端	0	0.05129	0.35536	0.81769	1.36632	1.97015	2.61301	3.28532
上端	3.76435	5.75593	7.29498	8.80770	10.3073	11.7992	13.2862	14.3402
x	8	9	10	11	12	13	14	15
下端	3.76435	4.46015	5.32332	5.75593	6.68578	7.29498	8.10208	8.80770
上端	15.8197	17.2978	18.3386	19.8137	20.8485	22.3219	23.3524	24.8249
x	16	17	18	19	20	21	22	23
下端	9.59844	10.3073	11.1772	11.7992	12.8174	13.2862	14.3402	14.9206
上端	25.8521	27.3241	28.3489	29.8205	30.8434	32.3149	33.3361	34.3561
x	24	25	26	27	28	29	30	31
下端	15.8197	16.7679	17.2978	18.3386	19.0505	19.8137	20.8485	21.3645
上端	35.8275	36.8463	38.3179	39.3357	40.3526	41.8243	42.8405	43.8559
x	32	33	34	35	36	37	38	39
下端	22.3219	23.3524	23.7618	24.8249	25.8521	26.3065	27.3241	28.3489
上端	45.3278	46.3427	47.3569	48.8291	49.8429	50.8561	52.3286	53.3414
x	40	41	42	43	44	45	46	47
下端	28.9661	29.8205	30.8434	31.6747	32.3149	33.3361	34.3561	34.6650
上端	54.3538	55.8266	56.8387	57.8503	59.3234	60.3349	61.3459	62.3566
x	48	49	50					
下端	35.8275	36.8463	37.6667					
上端	63.8301	64.8406	65.8508					

表 6.2 負の 2 項分布の新しい 95% 信頼区間の下端, 上端の値 ($k = 10$)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
下端	0.68126	0.56894	0.48978	0.43728	0.39515	0.36054	0.33156	0.30693
上端	1	0.99488	0.96668	0.92813	0.88733	0.84728	0.80914	0.77331
x	8	9	10	11	12	13	14	15
下端	0.28572	0.26727	0.25343	0.23883	0.22582	0.21416	0.20365	0.19412
上端	0.73989	0.70880	0.68126	0.67738	0.64086	0.61264	0.58819	0.56894
x	16	17	18	19	20	21	22	23
下端	0.18545	0.17870	0.17132	0.16453	0.15826	0.15245	0.14787	0.14278
上端	0.56329	0.53808	0.51746	0.49936	0.48978	0.47841	0.46117	0.44615
x	24	25	26	27	28	29	30	
下端	0.13804	0.13360	0.12944	0.12553	0.12240	0.11890	0.11559	
上端	0.43728	0.42979	0.41542	0.40287	0.39515	0.38962	0.37760	

表 6.3 負の 2 項分布の新しい 95% 信頼区間の下端, 上端の値 ($k = 20$)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
下端	0.82619	0.75072	0.69832	0.65330	0.61400	0.58590	0.55431	0.52601
上端	1	0.99744	0.98281	0.96178	0.93832	0.91411	0.88994	0.8623
x	8	9	10	11	12	13	14	15
下端	0.50050	0.48188	0.46042	0.44466	0.42636	0.40951	0.39702	0.38238
上端	0.84318	0.82619	0.81098	0.78466	0.76242	0.75072	0.73224	0.71057
x	16	17	18	19	20	21	22	23
下端	0.37149	0.35865	0.34906	0.33770	0.32919	0.31908	0.31148	0.30241
上端	0.69832	0.68437	0.66414	0.65330	0.64072	0.62252	0.61400	0.60127
x	24	25	26	27	28	29	30	
下端	0.29385	0.28740	0.27966	0.27381	0.26678	0.26145	0.25503	
上端	0.58590	0.58432	0.56585	0.55431	0.54932	0.53406	0.52601	