

回転円筒間の流れの非軸対称攪乱に対する安定解析

航技研 伊藤信教 (Nobutake Itoh)

電通大院 岡本克己 (Katsumi Okamoto)

電通大 大路通雄 (Michio Ohji)

1. はじめに

回転二重円筒間の流れの示す挙動は両円筒の回転条件によって多様な形態をとることが知られている。図1は、電通大 大路研究室で行なわれた実験から得られた遷移過程で(大路ほか 1987)、外筒を代表するレイノルズ数の値によ、ておよそ

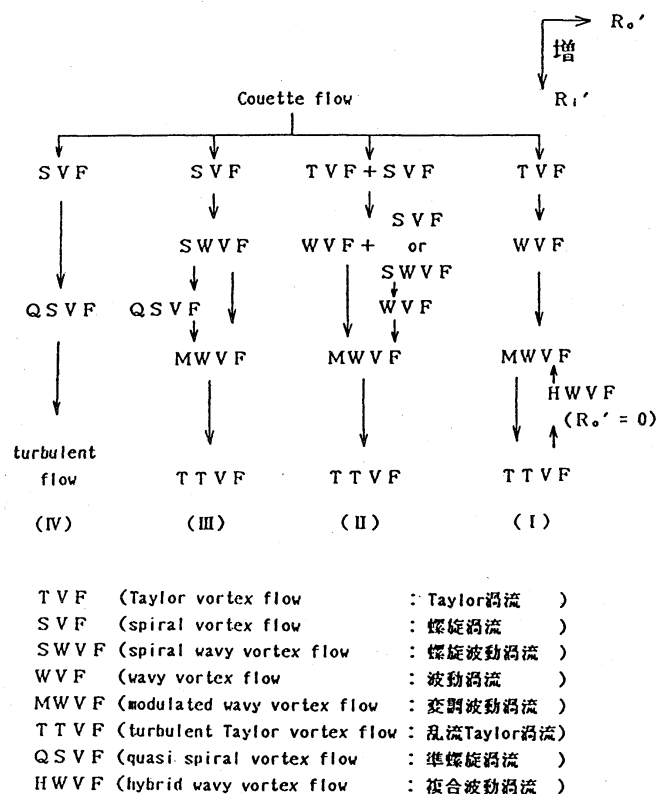


図 1 遷移過程

4通りに分けられる。第一遷移で3通りに分類された流れは、内筒のレイノルズ数を増加してゆくと共にそれぞれ特有の遷移過程をとり、乱流に至る。このように実験的研究では分岐現象のかなり詳しい様子が明らかにされているけれども、理論的研究によつて今まで説明された現象は、第一遷移の段階と第二遷移のほんの一部にすぎない。すなわち、G.I. Taylor (1923) による有名な研究につづく軸対称攪乱すなわち Taylor 渦型の攪乱に対する線形安定計算では、固有値問題を解くためのより優れたテクニックを扱ったものや、磁場や温度などの複雑な条件を考慮したものがあるけれども、非軸対称攪乱に対する安定計算については、両内筒が同方向回転をしている場合について調べた Di Prima (1961) の研究と、両内筒が逆方向に回転している場合についての Krueger et al. (1966) の研究があるにすぎない。

本研究では、二内筒が逆方向に回転し、その角速度の比がある程度大きいときに、定常 Couette 流が Spiral 渦流へ遷移するという実験的事実

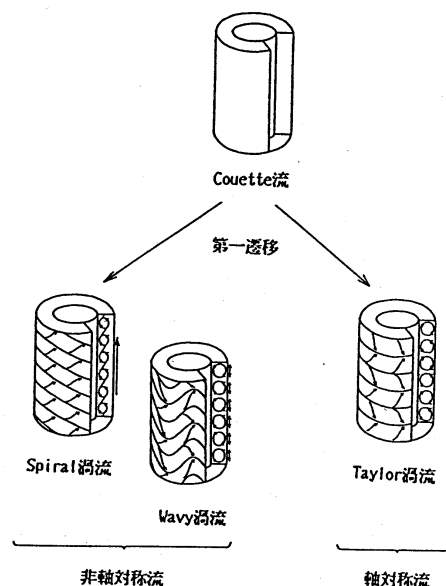


図 2 流れの模式図

に対して理論的説明を与える。図2に示されるように、Taylor渦流が軸対称な定常波であるのに対して、Spiral渦流は非軸対称な進行波である。

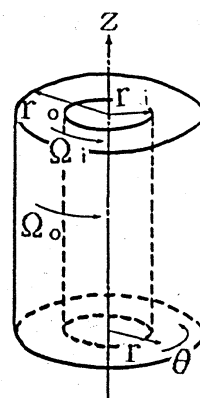


図 3 座標系

2. 攪乱方程式

円筒の共通軸をz軸とする円筒座標系。

(r, θ, z) を用い(図3参照)、各座標方向の速度および圧力を定常流と攪乱とを重ね合わせに形に書く。

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad p = \bar{p} + p' \quad (1)$$

ただし、 $\bar{\psi} = \{0, \bar{v}_\theta(r), 0\}$, $\bar{p}$ は定常流、 $\psi' = \{u_r', u_\theta', u_z'\}$, p' は攪乱を表わす。諸量を、円筒間の幅($r_o - r_i = d$)と円筒の回転速度($r_i \Omega_i$)とを基準尺度としてつぎのように無次元化をする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{r_o} &= 1 - Ky^*, \quad \frac{z}{d} = z^*, \quad \theta = K\chi^*, \quad \frac{1-K}{K} \Omega_i t = t^* \\ \frac{\bar{v}_\theta}{r_i \Omega_i} &= U^*, \quad \frac{u_r'}{r_i \Omega_i} = -U^*, \quad \frac{u_\theta'}{r_i \Omega_i} = u^*, \quad \frac{u_z'}{r_i \Omega_i} = w^* \\ \frac{d}{r_o} &= K, \quad \frac{\Omega_o}{\Omega_i} = \mu, \quad \frac{dr_i \Omega_i}{\nu} = R_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

以後、*印は省略する。攪乱は同方向と軸方向に周期的に変化するものと仮定し、 θ と z 座標に関して二重フーリエ級数に展開する。

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(\eta) \exp\{im(\alpha z - \omega t) + in\beta z\} \quad (3)$$

ただし、 $\psi_{(-m)n} = \tilde{\psi}_{mn}$ 、 $\psi_{m(-n)} = \psi_{mn}^*$ 、 $\sim$ は複素共役、 $*$ は ω の符号逆転を意味する。 α, β は実数で θ, z 方向の波数を表わし、 ω は複素数でその実部 ω_r が振動数、虚部 ω_i が時間的増幅率を表わす。以上を Navier - Stokes 方程式と連続の式に代入し、定常層流がそれぞれ自身で方程式を満たすことを考慮すると、非線形攪乱方程式が得られる。さらに、二円筒間の幅が円筒の半径に比べて十分小さい場合を考えると、

$$KR_i^2 = Ti, \quad \alpha R_i = \hat{\alpha}, \quad \omega R_i = \hat{\omega}, \\ \psi_{mn} R_i = \hat{\psi}_{mn}, \quad \omega_{mn} R_i = \hat{\omega}_{mn} \quad (4)$$

なる変換を行、以上で $K \rightarrow 0$ の極限を取ることができて、結局、つぎのような u と v に関する2階と4階の連立常微分方程式が得られる。

$$\left[D^2 - n^2 \beta^2 + im\hat{\omega} - im\hat{\alpha}U \right] u_{mn} - U' \hat{u}_{mn} = \hat{h}_{mn}^{(u)} \quad \Bigg|$$

$$\left. \begin{aligned} & [D^4 - (2n^2\beta^2 - im\hat{\omega} + im\hat{\alpha}U)D^2 \\ & + n^2\beta^2(n^2\beta^2 - im\hat{\omega} + im\hat{\alpha}U) + im\hat{\alpha}U'']\hat{U}_{mn} + 2n^2\beta^2 T_i U U_{mn} \\ & = -im\hat{\alpha}D\hat{h}_{mn}^{(1)} - n^2\beta^2\hat{h}_{mn}^{(2)} - in\beta D\hat{h}_{mn}^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{mn}^{(1)} \\ \hat{h}_{mn}^{(2)} \\ \hat{h}_{mn}^{(3)} \end{bmatrix} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left((ip\hat{\alpha}U_{m-p, n+q}) + \hat{U}_{m-p, n+q}D + i\beta\hat{U}_{m-p, n+q} \right) \begin{bmatrix} U_{pq} \\ \hat{U}_{pq} \\ \hat{W}_{pq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T^2 U_{m-p, n+q} U_{pq} \\ 0 \end{bmatrix},$$

また境界条件は内外円筒壁面で速度成分が0になることから、

$$U_{mn} = \hat{U}_{mn} = D\hat{U}_{mn} = 0 \quad \text{at} \quad \gamma = 0, 1 \quad (6)$$

で与えられる。ここで演算子 D^n は $\alpha^n/\alpha\gamma^n$ を表わす。このように small-gap 近似を用いると、方程式が非常に簡略化されるとともに2つのパラメータ K と R_i がテラー数 T_i としてまとめられ、パラメータが1つ減るという利点がある。

3. 線形安定計算

前節では非線形項まで含めた一般的な方程式を導びいたが、この節では線形問題を考える。そのときは、フーリエ級数(3)

における一つの成分

$$\psi = \psi_{11}(\eta) \exp\{i(\alpha x + \beta z - \omega t)\} \quad (7)$$

について安定性を調べればよく、方程式(5)と境界条件(6)はつぎのように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} [D^2 - \beta^2 + i\hat{\omega} - i\hat{\alpha}\Pi] \psi_{11} - \Pi' \psi_{11} &= 0, \\ [D^4 - (2\beta^2 - i\hat{\omega} + i\hat{\alpha}\Pi)D^2 \\ &+ \beta^2(\beta^2 - i\hat{\omega} + i\hat{\alpha}\Pi) + i\hat{\alpha}\Pi'] \psi_{11} + 2\beta^2 T_i \Pi \psi_{11} = 0, \\ \psi_{11} = \psi_{11}' = D\psi_{11} &= 0 \quad \text{at } \eta = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

同次の連立常微分方程式を同次の境界条件のもとに解くことは固有値問題を形成し、複素振動数 ω を4つのパラメータ $\mu, \hat{\alpha}, \beta, T_i$ の関数として定める。

$$\omega = \Omega(\mu, \hat{\alpha}, \beta, T_i) \quad (9)$$

特に $\hat{\alpha} = 0$ の軸対称擾乱に対しては、 ω は純虚数となり、時間的増減率 ω_i が μ, β, T_i の関数として定まる。

図4には、軸対称擾乱($\hat{\alpha} = 0$)に対する中立安定曲線の臨界値、すなわち $\omega_i = 0, \partial\omega_i/\partial\beta = 0$ を満たす値を内外円筒のレイノルズ数 $R_i' (= \frac{1}{2}k\sqrt{K})$, $R_o' (= \frac{R_i'}{1-K}\mu)$ 平面に対して示した。

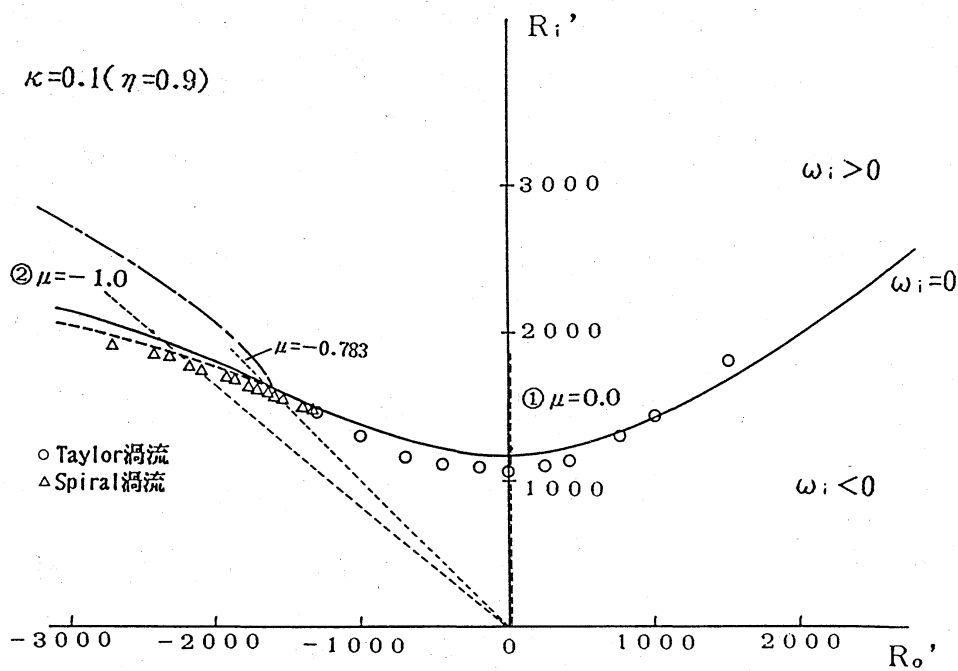


図 4 中立安定曲線(---)と $(\partial^2 \omega_i / \partial \alpha^2)_{\alpha=0} = 0$ 曲線(---) (○と△は大路研実験果)

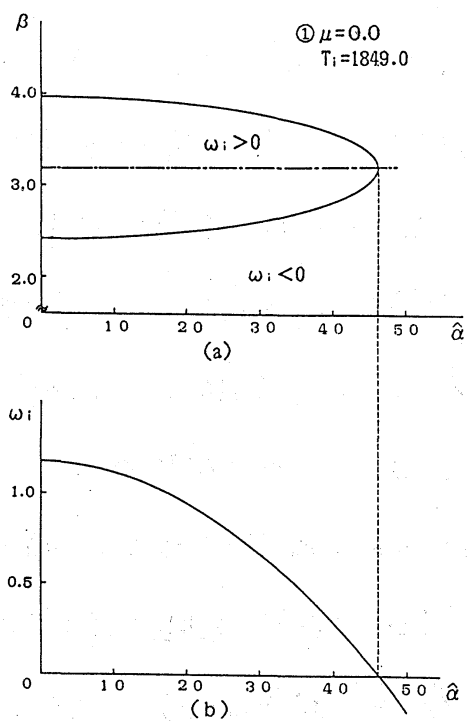


図 5 中立安定曲線と最大増幅率曲線

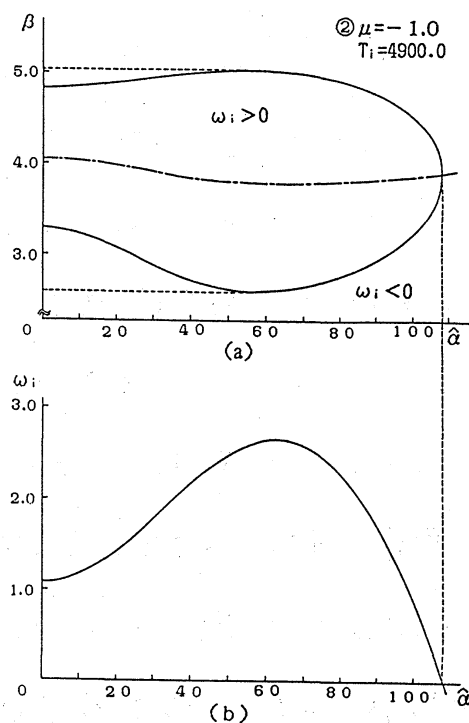


図 6 中立安定曲線と最大増幅率曲線

また、図5(a), 図6(a)には外筒静止状態 $\mu=0$ 及び、内外筒が逆方向に同角速度で回転をしている状態 $\mu=-1.0$ の二通りについて、臨界値よりもわずかに高いテラー数を選び、 $\hat{\alpha}$ を増した場合の中立曲線を示した。実線で囲まれた内側が増幅領域を表わす。この領域内で増幅率が最大になる点を各 $\hat{\alpha}$ について求めたものが一実線であり、それに沿って増幅率の $\hat{\alpha}$ に対する変化を示したものが図5(b), 図6(b)である。 $\mu=0$ の場合には、 ω_i は $\hat{\alpha}=0$ で最大値をとり、 $\hat{\alpha}$ が増すにつれて減少する。この結果は、図4の実線上で Couette 流が軸対称攪乱に対して不安定となることを示す。一方 $\mu=-1.0$ の場合には、 ω_i は $\hat{\alpha}$ がある値を持つ時に最大値をとり、その値は $\hat{\alpha}=0$ のときよりも大きい。この場合には、図4の実線よりも下で Couette 流は非軸対称攪乱に対して不安定になることがわかる。図4に示した破線は非軸対称攪乱に対する臨界曲線で、軸対称攪乱に対する臨界曲線(実線)との分岐を示す μ の値はおよそ -0.78 である。この値は Krueger et al. (1966) の結果と一致している。また、同図中の $\circ$ と Δ は実験値を示し、全体的に低めの値が得られているが、傾向としてはよく一致している。超臨界領域において軸対称攪乱と非軸対称攪乱とのどちらが励起され易いかをみるために、 $\hat{\alpha}=0$ における $\partial^2 \omega_i / \partial \hat{\alpha}^2$ の符号を調べ、この値がちょうど0で

あるような曲線を描いたものが図4の一点鎖線である。上側では軸対称攪乱が、下側では非軸対称攪乱がそれぞれ卓越した増幅率をもつ。

4. 非線形解析 — Wavy mode と Spiral mode

実験では予-遷移で観測される非軸対称な流れは Spiral 型であるけれども、線形理論では Spiral 型と Wavy 型とを区別することができない。方程式の中に軸方向の波数 β が必ず β^2 の形で現われるからである。どちらが現われるかを判定するために非線形解析を行う。

フーリエ級数(3)において ψ_{11} と $\psi_{1(-1)}$ (およびその複素共役成分) のみが卓越した大きさを持つ場合を考え、二つの基本波の振幅を A と B で表わす。図7には基本波とその複素共

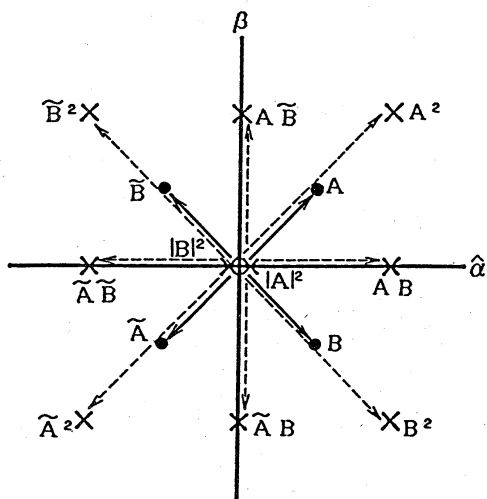


図 7 基本波とその一次干渉

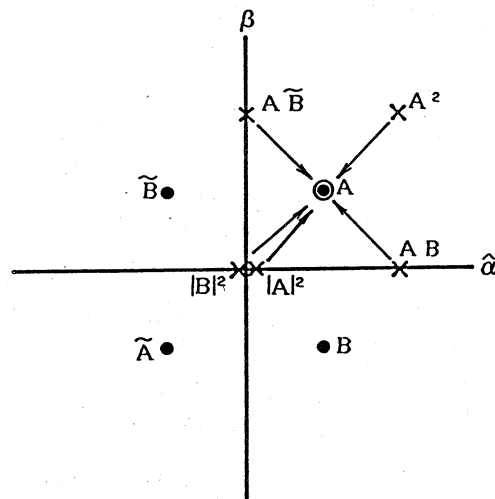


図 8 二次干渉

役な波を ● で表わし、その一次干渉によって生じる10個の高調波成分を × 印で表わしてある。高調波成分は振幅の4次以上の微小項を無視するとき、

$$\left. \begin{aligned} \psi_{22} &= A^2 \psi_{22}^{(\omega)} & , & & \psi_{00} &= |A|^2 \psi_{00}^{(\omega)} & , & & \hat{\psi}_{00} &= |B|^2 \hat{\psi}_{00}^{(\omega)} \\ \psi_{20} &= AB \psi_{20}^{(\omega)} & , & & \psi_{02} &= A\tilde{B} \psi_{02}^{(\omega)} & \text{-----} & & & \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

のように書ける。振幅展開の係数はそれぞれ既知の強制項を持つ特異性のない方程式に支配され、境界条件を満たす解が一意に定まる。例えば、 $\psi_{22}^{(\omega)}$ 成分に対する方程式と境界条件はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} [D^2 - 4\beta^2 - i2\hat{\alpha}U + i2\hat{\omega}] \psi_{22}^{(\omega)} - U' \psi_{22}^{(\omega)} &= N_1(\psi_{11}^{(\omega)}, \psi_{11}^{(\omega)}), \\ [D^4 - (8\beta^2 - i2\hat{\omega} + i2\hat{\alpha}U)D^2 \\ + 4\beta^2(4\beta^2 - i2\hat{\omega} + i2\hat{\alpha}U) + i2\hat{\alpha}U''] \psi_{22}^{(\omega)} + 8\beta^2 T_i U \psi_{22}^{(\omega)} &= N_2(\psi_{11}^{(\omega)}, \psi_{11}^{(\omega)}), \\ \psi_{22}^{(\omega)} = \psi_{22}^{(\omega)} = D\psi_{22}^{(\omega)} = 0 &\quad \text{at} \quad y = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし、 N_1, N_2 は非線形項に対応する既知関数を表わす。つぎに、一次干渉で生じた高調波と元々ある基本波との二次干渉を考えると(図8参照)、振幅の3次項が生じる。これを線形解に加え、振幅の5次以上の微小項を無視すると解は、

$$\left. \begin{aligned} \psi_{ii} &= A \{ \psi_{ii}^{(\omega)} + |A|^2 \psi_{ii}^{(\omega)} + |B|^2 \hat{\psi}_{ii}^{(\omega)} \} , \\ \psi_{i(-i)} &= B \{ \psi_{ii}^{(\omega)} + |A|^2 \hat{\psi}_{ii}^{(\omega)} + |B|^2 \psi_{ii}^{(\omega)} \} , \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -iA \{ \omega + \lambda |A|^2 + \hat{\lambda} |B|^2 \} , \\ \frac{dB}{dt} &= -iB \{ \omega + \hat{\lambda} |A|^2 + \lambda |B|^2 \} , \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

のように書ける。ここで、 ω は線形解の固有値、 λ と $\hat{\lambda}$ は、 $\psi_{ii}^{(\omega)}$ と $\hat{\psi}_{ii}^{(\omega)}$ を支配する非同次方程式の可解条件から定まるラウレンダウ型定数である。 $\psi_{ii}^{(\omega)}$ に関する方程式と境界条件を示すおつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} &[D^2 - \beta^2 - i\hat{\alpha}U + i(\hat{\omega} + i2\hat{\omega}_i)]U_{ii}^{(\omega)} - U'U_{ii}^{(\omega)} \\ &\quad = N_1(\psi_{ii}^{(\omega)}, \tilde{\psi}_{ii}^{(\omega)}, \psi_{00}^{(\omega)}, \psi_{22}^{(\omega)}) - i\lambda R U_{ii}^{(\omega)} , \\ &[D^4 - (2\beta^2 + i\hat{\alpha}U)D^2 + \beta^2(\beta^2 + i\hat{\alpha}U) \\ &\quad + i\hat{\alpha}U'' + i(\hat{\omega} + i2\hat{\omega}_i)(D^2 - \beta^2)]U_{ii}^{(\omega)} + 2\beta^2 T_i U U_{ii}^{(\omega)} \\ &\quad = N_2(\psi_{ii}^{(\omega)}, \tilde{\psi}_{ii}^{(\omega)}, \psi_{00}^{(\omega)}, \psi_{22}^{(\omega)}) - i\lambda R(D^2 - \beta^2)U_{ii}^{(\omega)} , \\ &U_{ii}^{(\omega)} = U_{ii}^{(\omega)} = DU_{ii}^{(\omega)} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, 1 . \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ω および λ 、 $\hat{\lambda}$ はいずれも複素数($\omega = \omega_r + i\omega_i$, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_r + i\hat{\lambda}_i$)になるから、 A と B も複素数であるが、(13)式

とその複素共役式とを用いることによつて、つぎの実数方程式が導かれる。

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2|A|^2 \{ \omega_i + \lambda_i |A|^2 + \hat{\lambda}_i |B|^2 \} \quad (15)$$

$$\frac{d|B|^2}{dt} = 2|B|^2 \{ \omega_i + \hat{\lambda}_i |A|^2 + \lambda_i |B|^2 \} \quad (16)$$

上式は $|A|^2$ と $|B|^2$ を座標軸とする位相平面上に解曲線群を定義する。この問題では、超臨界状態で線形解の増幅特性が非線形効果によつて抑圧されるから、 $\omega_i > 0$, $\lambda_i < 0$, $\hat{\lambda}_i < 0$ という関係が存在し、解曲線の形状を支配する量は λ_i と $\hat{\lambda}_i$ との大小関係だけになる。図9に示されるように、(15)式と(16)式の右辺をそれぞれ0に等しいと置くことによつて定まる二つの直線の関係は、 $\lambda_i < \hat{\lambda}_i$ のときと $\lambda_i > \hat{\lambda}_i$ のときでち

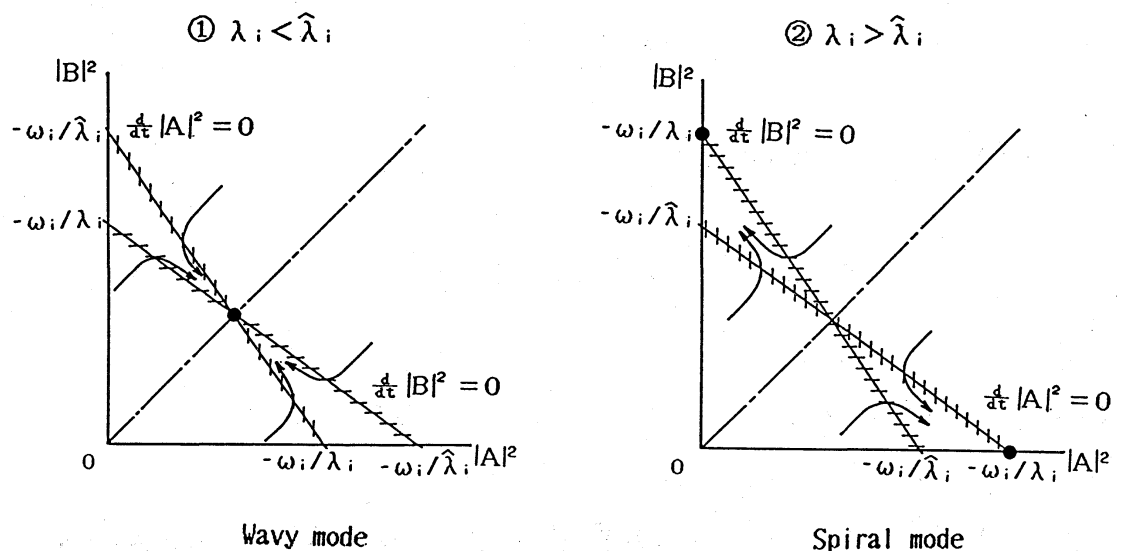


図 9 $|A|^2 - |B|^2$ 平面における解曲線の形状

うで逆になる。
 (それぞれの直
 線上で解曲線の
 勾配は $dA^2/dB^2=0$,
 $dB^2/dA^2=0$ である.)
 $\lambda_i < \hat{\lambda}_i$ ならば、
 解曲線は二直線
 の交点に収束し、
 AとBが同じ大

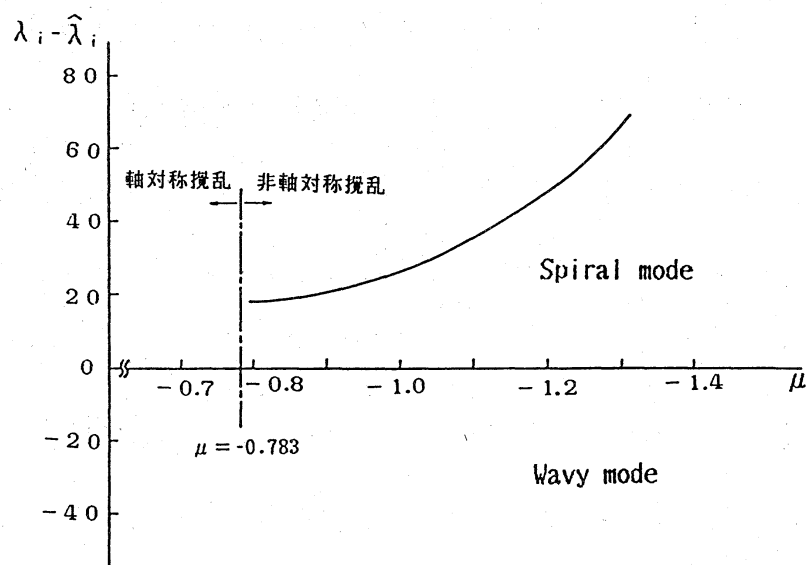


図 10 ランダウ型定数の計算結果

きさを持つ Wavy mode が形成される。逆に $\lambda_i > \hat{\lambda}_i$ ならば、
 A又はBのみの存在する状態に落ちつき、この場合には回転
 方向に対して傾いた波数ベクトルを持つ Spiral mode が生じ
 る。

実際にランダウ型定数を計算した結果が図10に示されてい
 る。線形計算より得られた -0.783 という臨界値よりも低
 い μ の値に対して、ランダウ型定数の差はすべて正になる。
 従、 τ 矛一遷移で観測される非軸対称流れは Spiral 渦流であ
 ると結論づけることができる。

5. おまけ

今回の解析によ、 τ 、矛一遷移の段階で Spiral 渦流へ遷移

する領域(回転条件)が存在することを確認できた。

今後は *Spiral* 渦流の波数や傾斜角の定量的な比較、超臨界領域における $(\partial^2 \omega_i / \partial \alpha^2)_{\alpha=0} = 0$ 曲線と実験結果の対応、

small-gap 近似や *end effect* 無視の影響等の検討を進める予定である。なお、実験では、矛-遷移の段階で、*Taylor* 渦流へ遷移する領域と *Spiral* 渦流へ遷移する領域との間に、*Spiral* 渦流と *Taylor* 渦流の混在する領域が確認されているけれども、その現象についてはもっと進んだ解析が必要であろう。

参考文献

Di Prima, R.C. 1961 *Phys. Fluids*, 4, 751.

Krueger, E.R., Gross, A. & Di Prima, R.C.

1966 *J. Fluid Mech.* 24, 521.

Taylor, G.I. 1923 *Phil. Trans. A*, 223, 289.

大路通雄 ほか 1987 矛19回乱流シンポジウム

講演論文集