

On some variational inequality problems

横浜創学館高等学校 窪田 理英子 (Rieko Kubota)

YOKOHAMA SO-GAKUKAN HIGH SCHOOL

1 Introduction and Preliminaries

本稿は 東京工業大学 高橋 渉 先生, 高橋非線形解析研究所 竹内 幸雄 氏との共著論文 [12]

” The Structure of Projection Methods

for Variational Inequality Problems and Weak Convergence Theorems ”

の概略とその簡単な解説である.

本稿では, R を実数の集合, N を正の整数の集合とする. H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積, $\| \cdot \|$ を内積によって定まるノルムとする. 以下, H を単に Hilbert 空間と記述する.

C を H の部分集合とし T を C から H への写像とする. $F(T)$ を T の不動点の集合とする. 任意の $x, y \in C$ について $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$ となる正の数 k が存在するとき, T を k -Lipschitz continuous という. 特に, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ であるとき非拡大写像という. $F(T) \neq \emptyset$ であり, 任意の $x \in C, v \in F(T)$ について $\|Tx - v\| \leq \|x - v\|$ となるとき, T を quasi-nonexpansive と呼ぶ. $\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty, x - y \rangle$ が任意の $x, y \in C$ について成り立つとき, T を firmly nonexpansive という. T が firmly nonexpansive ならば非拡大である.

記法の習慣に従って T を A に置き換え, A を C から H への写像とする. I を H 上の恒等写像とする. 任意の $x, y \in C$ について $\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq 0$ となるとき, A は単調であるという. 任意の $x, y \in C$ について, $\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$ となるような $\alpha \in (0, \infty)$ が存在するとき, A を α -逆単調写像という (Liu and Nashed [14] を参照). A が α -逆単調写像であるならば, 明らかに A は単調かつ $1/\alpha$ -Lipschitz continuous である. $a \in (0, 2\alpha)$ の場合, $I - aA$ は非拡大写像で, 任意の $x, y \in C$ について次の不等式が成り立つ.

$$\|(I - aA)x - (I - aA)y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - a(2\alpha - a)\|Ax - Ay\|^2.$$

C を閉凸集合とする. このとき, 任意の $x \in H$ について $\|x - x_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$ となる唯一の $x_0 \in C$ が存在する. H の要素 x について, $P_C x = x_0$ で定義される H から C の上への写像 P_C は距離射影と呼ばれる. H から C への写像 T が C への距離射影であることと, $x \in H, y \in C$ について $0 \leq \langle x - Tx, Tx - y \rangle$ が成り立つことは同値である. P_C は $x \in H, y \in C$ について $\|x - P_C x\|^2 + \|P_C x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2$ を満たし firmly nonexpansive である.

A を C から H への写像とし, 次の様に集合 $VI(C, A)$ を定義する.

$$VI(C, A) = \{x \in C : \langle y - x, Ax \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in C\}.$$

$VI(C, A)$ の要素 x を求める問題は変分不等式問題と呼ばれる.

C を n 次元ユークリッド空間 R^n の閉凸部分集合とする. A を C から R^n への単調な k -Lipschitz 連続写像とし $VI(C, A) \neq \emptyset$ とする. $a \in (0, 1/k)$ について, C 上の自己写像 V_a と U_a を次のように定義する.

$$V_ax = P_C(I - aA)x, \quad U_ax = P_C(I - aAV_a)x \quad \text{for } x \in C.$$

$x_1 \in C$ とし, C の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を次の様に生成する.

$$y_n = V_ax_n, \quad x_{n+1} = U_ax_n \quad \text{for } n \in N.$$

この Extragradient method と呼ばれる反復法は Korpelevich [9] によって導入された. これらの条件の下で, 彼は $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が $VI(C, A)$ の同一の点に収束することを示した.

Takahashi and Toyoda [24] は 2003 年に Theorem 1.1 を証明し, Nadezhkina and Takahashi [17] は 2006 年に Extragradient method と関連する Theorem 1.2 を証明した.

Theorem 1.1. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H . Let A be an α -inverse-strongly-monotone mapping of C into H . Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c_1, d_1]$ as $0 < c_1 \leq d_1 < 2\alpha$. For each $n \in N$, let V_{a_n} be a self-mapping on C defined by $V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x$ for $x \in C$. Let S be a nonexpansive self-mapping on C . Assume $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[c_2, d_2]$ as $0 < c_2 \leq d_2 < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences in C defined by*

$$y_n = V_{a_n}x_n, \quad x_{n+1} = \alpha_n S V_{a_n}x_n + (1 - \alpha_n)x_n \quad \text{for } n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C, A)$.

Theorem 1.2. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and A be a monotone and k -Lipschitz continuous mapping of C into H . Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c_1, d_1]$ as $0 < c_1 \leq d_1 < 1/k$. For each $n \in N$, let V_{a_n} and U_{a_n} be a self-mappings on C defined by*

$$V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x, \quad U_{a_n}x = P_C(I - a_nAV_{a_n})x \quad \text{for } x \in C.$$

Let S be a nonexpansive self-mapping on C . Assume $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[c_2, d_2]$ as $0 < c_2 \leq d_2 < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ be sequences in C defined by

$$y_n = V_{a_n}x_n, \quad z_n = U_{a_n}x_n, \quad x_{n+1} = \alpha_n S U_{a_n}x_n + (1 - \alpha_n)x_n \quad \text{for } n \in N.$$

Then $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C, A)$.

Takahashi and Toyoda [24] と Nadezhkina and Takahashi [17] に動機を得て, 変分不等式問題の projection method を考察する. 私たちが使用したほとんどのテクニックは [24] と [17] で既に準備されていた. しかし, 彼らは method の構造を必ずしも明らかにしていない. 私たちのアプローチは, 彼らの手法とは異なり method の構造を重視する. 私たちの目的は, この構造を明らかにし構造に則した自然な手法で Theorem 1.1, 1.2 を拡張することである.

2 Lemmas

この節では, H を Hilbert 空間, I を H 上の恒等写像, P_C を H から閉凸集合 C への距離射影とする. Hilbert 空間 H は次の Opial property [18] を持つ.

If $\{x_n\}$ is a sequence in H which converges weakly to $u \in H$, then

$$\liminf_n \|x_n - u\| < \liminf_n \|x_n - v\| \quad \text{for } v \in H \text{ with } v \neq u.$$

S を部分集合 C から H への写像とする. $I - S$ が demiclosed at 0 とは

If $\{x_n\}$ is a sequence in C which converges weakly to $u \in C$ and satisfies

$$\lim_n \|Sx_n - x_n\| = 0, \text{ then } u \in F(S).$$

が満たされることである. 最初に本稿の議論で必要とした2つの概念を提示した.

次に示す lemma は変分不等式問題では基本的で良く知られている.

Lemma 2.1. *Let A be a mapping of C into H with $VI(C, A) \neq \emptyset$. Let $a \in (0, \infty)$ and let V_a be a self mapping on C defined by $V_ax = P_C(I - aA)x$ for $x \in C$. Then $F(V_a) = VI(C, A)$.*

簡単な計算で次の lemma を導くことができる. この lemma によって, 本稿で考察する method では $VI(C, A)$ の要素に代えて $vi(C, A)$ の要素を求めれば良いことが分る.

Lemma 2.2. *Let C be a convex subset of a Hilbert space H . Let A be a mapping of C into H and let $vi(C, A) = \{v \in C : \langle z - v, Az \rangle \geq 0 \text{ for all } z \in C\}$. Then, the followings hold:*

- (1) *If A is continuous, then $vi(C, A) \subset VI(C, A)$.*
- (2) *If A is monotone then $\langle y - u, Ay \rangle \geq \langle y - u, Au \rangle \geq 0$ for $u \in VI(C, A)$ and $y \in C$.
That is, if A is monotone then $VI(C, A) \subset vi(C, A)$.*
- (3) *If A is monotone and continuous, then $VI(C, A) = vi(C, A)$.*

本稿の結果を得るために, 次の Lemma 2.3 が重要である.

Lemma 2.3. *Let $c > 0$ and $\{a_n\} \subset [c, \infty)$. Let A be a monotone and k -Lipschitz continuous mapping of C into H with $VI(C, A) \neq \emptyset$. For each $n \in \mathbb{N}$, let V_{a_n} be a self mapping on C defined by $V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x$ for $x \in C$. Let $\{x_n\}$ be a bounded sequence in C . If $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$ then the weak limit of any weakly convergent subsequence of $\{x_n\}$ is in $VI(C, A)$.*

この lemma は, projection method において $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$ という条件が非常に重要であることを示唆する. Takahashi-Toyoda [24] の method では, Lemma 2.3, 2.4 が中心的な役割を果たす. Lemma 2.4 は $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$ を得るための条件を提示している.

Lemma 2.4. *Let A be an α -inverse-strongly-monotone mapping of C into H with $VI(C, A) \neq \emptyset$. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c, d]$ as $0 < c \leq d < 2\alpha$. For each $n \in N$, let V_{a_n} be a self mapping on C defined by $V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x$ for $x \in C$. Suppose $\{x_n\}$ is a sequence in C such that $\lim_n \|x_n - u\| = \lim_n \|V_{a_n}x_n - u\|$ for $u \in VI(C, A)$. Then, $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$.*

Nadezhkina-Takahashi [17] の method では, Lemma 2.3, 2.5 が重要な役割を果たす. Lemma 2.5 は, $\{U_{a_n}\}$ の性質を明らかにし, この method で $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$ を得るための条件を提示している. 従来 $\{U_{a_n}\}$ の性質は明確に記述されていなかった.

Lemma 2.5. *Let A be a monotone k -Lipschitz continuous mapping of C into H . Assume that $VI(C, A) \neq \emptyset$. Let $0 < d < 1/k$ and $\{a_n\}$ be a sequence in $(0, d]$. For $n \in N$, let V_{a_n} and U_{a_n} be self mappings on C defined by*

$$V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x, \quad U_{a_n}x = P_C(I - a_nAV_{a_n})x \quad \text{for } x \in C.$$

Then, the followings hold:

- (1) $F(V_{a_n}) = F(U_{a_n}) = VI(C, A)$ for $n \in N$.
- (2) Each U_{a_n} is quasi-nonexpansive with $F(U_{a_n}) = VI(C, A)$.
- (3) Suppose $\{x_n\}$ is a sequence such that

$$\lim_n \|x_n - u\| = \lim_n \|U_{a_n}x_n - u\| \quad \text{for } u \in VI(C, A).$$

Then $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$.

3 Main results

前節で準備した lemma を使用して次の 2 つの定理を証明できる. Theorem 3.1 は Takahashi-Toyoda [24] の Theorem 1.1 の拡張であり, Theorem 3.2 は Nadezhkina-Takahashi [17] の Theorem 1.2 の拡張である. 彼らは S を非拡大写像としたが, S が quasi-nonexpansive で $I - S$ が demiclosed at 0 であれば充分であることが自然な考え方によって導かれる.

Theorem 3.1. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H . Let A be an α -inverse-strongly-monotone mapping of C into H . Let S be a self-mapping on C . Assume that $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$, S is quasi-nonexpansive and $I - S$ is demiclosed at 0. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c, d]$ as $0 < c \leq d < 2\alpha$. For each $n \in N$, let V_{a_n} be a self-mapping on C defined by $V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x$ for $x \in C$. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[a, b]$ as $0 < a \leq b < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences in C defined by*

$$y_n = V_{a_n}x_n, \quad x_{n+1} = \alpha_n S V_{a_n}x_n + (1 - \alpha_n)x_n \quad \text{for } n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C, A)$.

Theorem 3.2. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and A be a monotone and k -Lipschitz continuous mapping of C into H . Let S be a self-mapping on C . Assume that $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$, S is quasi-nonexpansive and $I - S$ is demiclosed at 0. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c, d]$ as $0 < c \leq d < 1/k$. For each $n \in N$, let V_{a_n} and U_{a_n} be self-mappings on C defined by*

$$V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x, \quad U_{a_n}x = P_C(I - a_nAV_{a_n})x \quad \text{for } x \in C.$$

Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[a, b]$ as $0 < a \leq b < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ be sequences defined by

$$y_n = V_{a_n}x_n, \quad z_n = U_{a_n}x_n, \quad x_{n+1} = \alpha_n S U_{a_n}x_n + (1 - \alpha_n)x_n \quad \text{for } n \in N.$$

Then $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C, A)$.

4 Applications

C を Hilbert 空間 H の部分集合, T を C から H への写像とする. 2010 年に, Kocourek, Takahashi and Yao [10] によって generalized hybrid と呼ばれる写像族が導入された. 次の条件を満たす実数 α, β が存在するとき, T は generalized hybrid であるという.

$$\alpha \|Tx - Ty\|^2 + (1 - \alpha) \|x - Ty\|^2 \leq \beta \|Tx - y\|^2 + (1 - \beta) \|x - y\|^2 \quad \text{for } x, y \in C.$$

この写像族は, 非拡大写像族, nonspreading 写像族, hybrid 写像族を含む有用な非線形写像の族である. generalized hybrid 写像 T は, $F(T) \neq \emptyset$ であるならば quasi-nonexpansive である. 更に, Takahashi, Wong and Yao [25] は次の lemma を証明した.

Lemma 4.1. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and let T be a generalized hybrid self-mapping on C . Let $\{x_n\}$ be a sequence in C which converges weakly to $u \in C$ and satisfies $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$. Then $u \in F(T)$.*

2008 年に, Suzuki [19] は新しい写像族を導入した. H の部分集合 C 上の写像 T が, 次の条件を満たすとき, Condition (C) を満たす写像という.

$$(C) \quad \frac{1}{2} \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \quad \text{implies} \quad \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \text{for } x, y \in C.$$

本稿では, この写像族を Class(C) と呼ぶ. また, ある $s \in [0, \infty)$ が存在して,

$$(E) \quad \|x - Ty\| \leq s \|x - Tx\| + \|x - y\| \quad \text{for } x, y \in C$$

であるとき, T を Condition (E) を満たす写像という (Falset et.al. [6] を参照).

T が非拡大写像ならば Class (C) である. Suzuki[19] は, T が Class (C) ならば $s = 3$ として Condition (E) を満たすことを示し, また Lemma 4.2 を実質的に証明した. Condition (E) を満たす写像 T が $F(T) \neq \emptyset$ を満たせば quasi-nonexpansive であることを注意しておく.

Lemma 4.2. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and let T be a self-mapping on C which satisfies condition (E). Let $\{x_n\}$ be a sequence in C which converges weakly to $u \in C$ and satisfies $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$. Then $u \in F(T)$.*

このような研究の成果によって, generalized hybrid 写像族や condition (E) を満たす写像族など, 広範な写像族が Theorem 3.1 と Theorem 3.2 の仮定を満たすことがわかる.

Acknowledgements

東京工業大学 高橋 渉 先生 の丁寧なご指導に感謝いたします. また, この論稿を発表する機会を与えていただいた 新潟大学 田中 環 先生 にお礼申し上げます.

References

- [1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, “Fixed point and ergodic theorems for λ -hybrid mappings in Hilbert spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.* **11** (2010), 335–343.
- [2] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application atix équations intégrales”, *Fund. Math.*, **3** (1922), 133–181.
- [3] F. E. Browder, “Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces”, *Nonlinear functional analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol XVIII, Part2, Chicago, III., (1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1973), 251–262.*
- [4] R. E. Bruck, “A simple proof of the mean ergodic theorems for nonlinear contractions in Banach spaces”, *Israel J. Math.* **32** (1974), 107–116.
- [5] P.E. Combettes and S.A. Hirstoaga, “Equilibrium programing in Hilbert spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.* **6** (2005), 117–136.
- [6] J. G. Falset, E. L. Fuster, and T. Suzuki, “Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings”, *J. Math. Anal. Appl.* **375** (2011) 185–195.
- [7] H. Iiduka, W. Talahashi, and M. Toyodai, “Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings”, *Panamer. Math. J.* **14** (2004), no. 2, 49–61.
- [8] F. Kohsaka and W. Takahashi, “Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces”, *SIAM. J. Optim.* **19** (2008), 824–835.
- [9] G. M. Korpelevich, “The extragradient method for finding saddle points and other problems”, *Matecon* **12** (1976), 747–756.
- [10] P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, “Fixed point theorems and weak convergence theorems for genelalized hybrid mappings in Hilbert spaces”, *Taiwanese J. Math.* **14** (2010), 2497–2511. *J. Nonlinear Convex Anal.* **6** (2005), 505–523.
- [11] M. A. Krasnoselskii, “Two remarks on the method of successive approximations”, *Uspehi Mat. Nauk* **10** (1955), 123–127 (Russian).
- [12] R. Kubota, W. Takahashi and Y. Takeuchi, “The Structure of Projection Methods for Variational Inequality Problems and Weak Convergence Theorems”, submitted.
- [13] R. Kubota and Y. Takeuchi, “On Ishikawa’s strong convergence theorem”, to appear.

- [14] F. Liu and M. Z. Nashed, "Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates", *Set-valued Anal.* **6** (1998), 313-344.
- [15] W. R. Mann, "Mean value methods in iteration", *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 506-510.
- [16] N. Nadezhkina and W. Takahashi, "Strong convergence theorem by the hybrid and extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings", *Kyoto University Research Information Repository*, 1396 (2004), 42-48.
- [17] N. Nadezhkina and W. Takahashi, "Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings", *J. Optim. Theory Appl.*, **128** (2006), 191-201.
- [18] Z. Opial, "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings", *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 591-597.
- [19] T. Suzuki, "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.* **340**, (2008) 1088-1095.
- [20] W. Takahashi, "Nonlinear Functional Analysis", Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [21] W. Takahashi, "Introduction to Nonlinear and Convex Analysis", Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
- [22] W. Takahashi, "Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space", *J. Nonlinear Convex Anal.* **11** (2010), 79-88.
- [23] W. Takahashi and Y. Takeuchi, "Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space", *J. Nonlinear Convex Anal.* **12 No 2** (2011), 399-406.
- [24] W. Takahashi and M. Toyoda, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings", *J. Optim. Theory Appl.*, **118** (2003), 417-428.
- [25] W. Takahashi, N.-C. Wong, and J.-C. Yao, "Attractive points and Halpern's type strong convergence theorems in Hilbert spaces", *J. Nonlinear Convex Anal.* **13** (2012).