

On Some Examples of Modular QM-Abelian Surfaces

早大理工 長谷川雄之 (Yuji HASEGAWA)

1 準備

$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ を $\Gamma_1(N)$ 上の重さ 2 の newform とする. ここで, newform とは, すべての Hecke 作用素の同時固有形式で, $a_1 = 1$ となるように正規化されたものを指すことにする. このとき f の Fourier 係数の生成する $\mathbb{C}$ の部分体 $K_f := \mathbb{Q}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ は有限次代数体となる. $A_f/\mathbb{Q}$ を f に付随する Shimura の Abel 多様体とする ([13], [14]). 以下では, A_f に $\mathbb{Q}$ -同種な Abel 多様体を modular な Abel 多様体ということがある. A_f の次元は K_f の次元に一致し, しかも

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_f) \otimes \mathbb{Q} \cong K_f$$

という著しい性質をもつ. ここで $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_f) \otimes \mathbb{Q}$ は, A_f の $\mathbb{Q}$ 上の自己準同型のなす $\mathbb{Q}$ -多元環である. さらに, A_f の $\bar{\mathbb{Q}}$ 上の自己準同型のなす $\mathbb{Q}$ -多元環 $\mathfrak{A}_f = \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}}(A_f) \otimes \mathbb{Q}$ の構造の型も [9], [8] により決定されている.

さて, 以下では f に関して常に次のことを仮定する.

- (1) f は CM 型でない;
- (2) f は Haupt 型の重さ 2 の newform である (すなわち f はある N について $\Gamma_0(N)$ 上の重さ 2 の newform となっている);
- (3) K_f は 2 次体である.

(1) において, $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ が CM-型であるとは, ある自明でない Dirichlet 指標 ψ が存在して,

$$a_p = \psi(p)a_p$$

がほとんどすべての素数 p に対して成り立つことをいう. (このとき A_f はある CM-型楕円曲線の直積 $E \times E$ に $\bar{\mathbb{Q}}$ 上同種となる.) 以下ではこの場合は取り扱わない. また, 上記の仮定 (2) から K_f は総実な代数体となるから,

仮定 (3) とあわせて結局 K_f は実 2 次体となる. したがって, A_f は $\mathbb{Q}$ 上で実 2 次体 K_f の作用を受ける Abel 曲面である. 次に $\mathfrak{X}_f$ であるが, これは, K_f , $M_2(\mathbb{Q})$ または $\mathbb{Q}$ 上の不定符号四元数体のいずれかとなる. これらのうちのどれになるかは, いわゆる extra twist に関する情報で決まる ([9], [8]).

定義 f は上の仮定のとおりとし, χ を Dirichlet 指標とする. f が χ による extra twist をもつとは,

$$a_p^\sigma = \chi(p)a_p$$

がほとんどすべての素数 p について成り立つことをいう. ここで σ は $K_f/\mathbb{Q}$ の自明でない自己同型とする.

$S_2^0(N)$ を $\Gamma_0(N)$ 上の重さ 2 の newforms の張る空間とし, $f \in S_2^0(N)$, σ を上の定義のとおりとすると, $f^\sigma = \sum a_n^\sigma q^n$ も $S_2^0(N)$ に属する newform である. また, χ を導手 r をもつ任意の Dirichlet 指標とすると, 条件「 $(p, r) = 1$ なる素数 p に対して $b_p = \chi(p)a_p$ 」により一意に定まる newform $g = \sum b_n q^n$ が存在するが, この g を $f \otimes \chi$ と書くと, f が χ による extra twist をもつということとは

$$f^\sigma = f \otimes \chi$$

が成り立つこととすることができる. χ は仮定 (1) から一意的に定まる. また, このとき χ は 2 次指標で, その導手を r とすると $r^2 | N$ である. さらに任意の n に対して $a_n^\sigma = \chi(n)a_n$ が成り立つ. 以下, χ は一般に 2 次指標を表すこととし, その導手を明示するときは, $\chi = \chi_r$ と書くことにする.

命題 1 f は上の仮定のとおりとし, $\chi = \chi_r$ による extra twist をもつとする. このとき,

$$\mathfrak{X}_f = \left(\frac{d, \chi(-1)r}{\mathbb{Q}} \right).$$

ここで, $\left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}} \right)$ は $\mathbb{Q}$ 上の四元数環で, その被約ノルム形式が $x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2$ により与えられるものを表す. また, d は K_f の判別式である.

証明 これは [9], [8] の結果より直ちに導かれる. ■

f が extra twist をもたなければ, $\mathfrak{X}_f = K_f$ である. f が extra twist をもつとき, 上の命題によって $A_f/\bar{\mathbb{Q}}$ は CM をもたない楕円曲線の直積に分解するか, $\mathbb{Q}$ 上の四元数体の作用を受ける単純な Abel 曲面となる.

定義 $\mathfrak{X}_f$ が四元数体のとき, A_f は QM (=quaternion multiplication) を

もつといい, A_f を (modular な) QM-型 Abel 曲面という.

命題 2 $f \in S_2^0(N)$ は上の仮定のとおりとし, 対応する A_f が QM をもつとする. N の各素因子 p に対して, $\nu = \nu_p$ を $p^\nu || N$ により定めると, 次が成り立つ.

(1) $p = 2$ のとき $2 \leq \nu \leq 10$,

(2) $p = 3$ のとき $2 \leq \nu \leq 5$,

(3) $p \geq 5$ のとき $\nu = 2$.

さらに, N は 2^5 で割れるか, あるいは少なくともひとつの素因子 p について $p \equiv 3 \pmod{4}$ が成り立つ.

証明 仮定により f は extra twist をもつ. もし N がある素数でちょうど割り切れていれば, $\mathfrak{X}_f = M_2(\mathbb{Q})$ である ([10], Theorem 2). したがって, A_f が QM をもつならば N の各素因子について $\nu \geq 2$ が満たされなければならない. 次に, N の各素因子 p に対して

$$s = s_p = \left\lfloor \frac{\nu}{2} - 1 - \frac{1}{p-1} \right\rfloor$$

とおく ($\lceil x \rceil$ は $n \geq x$ なる最小の整数 n を表す). このとき, [3] の Theorem 5.5 より $\mathfrak{X}_f$ の中心は $p > 2$ のとき $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$, $p = 2$ のとき $\mathbb{Q}(\zeta^2 + \zeta^{-2})$ を含む. ただし $\zeta = \exp(2\pi i/p^s)$ とする. これより ν の範囲がわかる. 命題の最後の部分は [10] の Theorem 2 および [1] の Theorem 7 より従う. ■

QM-型の modular な Abel 曲面 $A_f/\mathbb{Q}$ の例は, [7] に与えられている. この場合 $N = 243 = 3^5$, $K_f = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$, $\chi = \chi_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ \cdot \end{pmatrix}$ で, $\mathfrak{X}_f = \begin{pmatrix} 6, -3 \\ \cdot \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ は判別式が 6 の四元数体である. $N \leq 300$ においては, これが唯一の QM-型 Abel 曲面 $/\mathbb{Q}$ の例となっている. また, これ以外に A_f が QM-型 Abel 曲面となっている例は知られていないようなので, 他の例を与えてみるのは意味のあることである. そこで, $301 \leq N \leq 3000$ なる N に対してそのような例を探し求めた.

2 計算結果

$301 \leq N \leq 3000$ なる N で 命題 2 の条件を満たすものは全部で 41 個あるが, それらに対して, $S_2^0(N)$ を $\mathbb{Q}$ -単純な部分空間の和に分解した. 分解には, Hecke 作用素の跡公式を用いた ([6],[15],[11]). 表 1 はその結果である. 表の見方は [2] の Table 5 と全く同じであるが, ここでは紙面節約のため乗法

的に表した. 例えば, 「 $(1 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2^4 \cdot 3)$ 」は「 $(1+3+4, 1+2+2+2+2+3)$ 」と読み替える.

表 1: Q-simple splitting of $S_2^0(N)$

$N = \prod p^\nu$	splitting of $S_2^0(N)$
$324=2^2 3^4$	$(0, 0, 1^3, 1)$
$361=19^2$	$(1 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2^4 \cdot 3)$
$392=2^3 7^2$	$(1, 1^2 \cdot 2, 1 \cdot 2, 1^2)$
$432=2^4 3^3$	$(1, 1^3, 1^2, 1^2)$
$441=3^2 7^2$	$(1, 1 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^2, 1^3)$
$484=2^2 11^2$	$(0, 0, 2^3, 1 \cdot 2)$
$512=2^9$	$(2^3, 2^3 \cdot 4)$
$529=23^2$	$(4^2 \cdot 5, 2^5 \cdot 3 \cdot 5)$
$576=2^6 3^2$	$(1, 1^3, 1^3, 1^2)$
$648=2^3 3^4$	$(1^2, 2^2, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2)$
$675=3^3 5^2$	$(1^2 \cdot 2, 1^2 \cdot 2^3, 1^4 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^2)$
$784=2^4 7^2$	$(1^2 \cdot 2, 1^4 \cdot 2, 1 \cdot 2^2, 1^3)$
$800=2^5 5^2$	$(1^3, 1^2 \cdot 2^2, 1^2 \cdot 2^2, 1^2 \cdot 2)$
$864=2^5 3^3$	$(1^3, 1^3 \cdot 2, 1^3 \cdot 2, 1^3)$
$900=2^2 3^2 5^2$	$(0, 0, 0, 0, 1^2, 1, 1^2, 1^3)$
$961=31^2$	$(2^2 \cdot 8 \cdot 16, 2^4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12)$
$968=2^3 11^2$	$(1 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^2 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 4, 1^2 \cdot 2^2)$
$972=2^2 3^5$	$(0, 0, 1^2 \cdot 2 \cdot 3, 1^2 \cdot 3)$
$1024=2^{10}$	$(2^2 \cdot 4^2, 2^4 \cdot 4^2)$
$1089=3^2 11^2$	$(2 \cdot 4, 1^4 \cdot 2^2 \cdot 4, 1 \cdot 2^4 \cdot 4, 1^6 \cdot 2^2)$
$1152=2^7 3^2$	$(1^4, 1^7, 1^4, 1^5)$
$1225=5^2 7^2$	$(2^3 \cdot 3 \cdot 4, 1^4 \cdot 2^4 \cdot 3, 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 4^2, 1^4 \cdot 2^3 \cdot 3)$
$1296=2^4 3^4$	$(1^3 \cdot 2, 1 \cdot 2^3, 1^6, 1^2 \cdot 2)$
$1323=3^3 7^2$	$(1 \cdot 3 \cdot 4^2, 1^9 \cdot 2^2 \cdot 3, 1^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2, 1^7 \cdot 2 \cdot 3)$
$1444=2^2 19^2$	$(0, 0, 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8, 1^2 \cdot 2^2 \cdot 6)$
$1521=3^2 13^2$	$(1^2 \cdot 2 \cdot 6, 2 \cdot 4^2 \cdot 6, 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^3)$
$1568=2^5 7^2$	$(2^4, 1^6 \cdot 2^3, 2^4 \cdot 4, 1^3 \cdot 2^3)$
$1600=2^6 5^2$	$(1^8, 1^6 \cdot 2^2, 1^5 \cdot 2^2, 1^6 \cdot 2)$
$1728=2^6 3^3$	$(1^5 \cdot 2, 1^7 \cdot 2, 1^9, 1^7)$

表 1: $\mathbf{Q}$ -simple splitting of $S_2^0(N)$ (continued)

$N = \prod p^\nu$	splitting of $S_2^0(N)$
$1764 = 2^2 3^2 7^2$	$(0, 0, 0, 0, 1 \cdot 4, 1^2, 1^2 \cdot 2, 1^6)$
$1800 = 2^3 3^2 5^2$	$(1^2, 1^3, 1^4, 1^3, 1^2, 1^3, 1^3, 1^4)$
$1849 = 43^2$	$(1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 20, 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 18 \cdot 20^2)$
$1936 = 2^4 11^2$	$(1^2 \cdot 2^3 \cdot 4, 1^3 \cdot 2^4 \cdot 4, 1 \cdot 2^6, 1^6 \cdot 2^2)$
$1944 = 2^3 3^5$	$(1^2 \cdot 2^2 \cdot 3, 1^3 \cdot 6, 1^2 \cdot 2^2 \cdot 6, 1^3 \cdot 3)$
$2025 = 3^4 5^2$	$(1^5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 4, 2^2 \cdot 4^4, 1 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 4, 4^4)$
$2116 = 2^2 23^2$	$(0, 0, 6 \cdot 8 \cdot 10, 1^4 \cdot 2^2 \cdot 10)$
$2209 = 47^2$	$(16 \cdot 24 \cdot 33, 1^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 33)$
$2304 = 2^8 3^2$	$(1^2 \cdot 2^2, 1^6 \cdot 2^3, 1^2 \cdot 2^2 \cdot 4, 1^6 \cdot 2^2)$
$2592 = 2^5 3^4$	$(1^3 \cdot 2^4, 1 \cdot 2^2 \cdot 4^2, 1^3 \cdot 2^3 \cdot 4, 1 \cdot 2^3 \cdot 4)$
$2601 = 3^2 17^2$	$(1^4 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 6, 1^2 \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot 8, 1^6 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 6, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 6)$
$2888 = 2^3 19^2$	$(1^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 8, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6 \cdot 9, 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9, 1^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6)$

表 1 中には 2 次元の $\mathbf{Q}$ -単純な部分空間が全部で 198 ある。このうちで、対応する Abel 曲面が QM-型となっているのは全部で 18 個ある。以下にそれらについて説明する。

(1) $N = 675 = 3^3 \cdot 5^2$ とする。このとき $\dim S_2^0(675) = 25$ であって、 $S_2^0(675)$ の $\mathbf{Q}$ -単純な各部分空間上での Hecke 作用素 $T(p)$ ($p \leq 19$) の特性多項式は表 2 のようになる (表中の符号は Atkin-Lehner の対合 W_{27} , W_{25} の固有値を表す)。それによると, extra twist をもつような $\mathbf{Q}$ -単純 2 次元部分空間が 4 つ存在することがわかる。そのうちの 2 つは, $K_f = \mathbf{Q}(\sqrt{7})$ で, $\chi_3 = \left(\frac{-3}{\cdot}\right)$ による extra twist をもつが, 命題 1 により $\mathfrak{F}_f = \left(\frac{7, -3}{\mathbf{Q}}\right) = M_2(\mathbf{Q})$ であることがわかる。次に, 残りの 2 つの部分空間に属する 4 つの newform のうちのひとつを $f = \sum a_n q^n$ と書くと, $K_f = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ で, f は表 3 で与えられる Fourier 係数をもつ。ほかの 3 つは $f \otimes \chi_3$, $f \otimes \chi_5$, $f \otimes \chi_{15}$ で与えられる。さらに, これら 4 つの newform の間には,

$$f^\sigma = f \otimes \chi_3, \quad (f \otimes \chi_5)^\sigma = f \otimes \chi_{15} = (f \otimes \chi_5) \otimes \chi_3$$

なる関係がある。したがって f および $g = f \otimes \chi_5$ は χ_3 による extra twist をもつから, 命題 1 により $\mathfrak{F}_f$, $\mathfrak{F}_g$ は判別式 6 の四元数体 $\left(\frac{2, -3}{\mathbf{Q}}\right)$ となる。すなわち, A_f , A_g は QM-型 Abel 曲面である。

表 2: Characteristic polynomials $\Phi_{T(p)}(X)$ of $T(p)|S_2^0(675)$

p	$(+, +)$			$(-, -)$		
2	X	$X+1$	X^2+X-3	X^2-2	$X-1$	X^2+3X+1
7	$X-1$	X	$X^2+2X-12$	$(X+3)^2$	X	X^2
11	X	$X+5$	$X^2+2X-12$	X^2-18	$X+5$	X^2
13	$X+5$	$X-5$	X^2+6X-4	$(X+3)^2$	$X+5$	X^2
17	X	$X+4$	X^2+4X-9	X^2-8	$X-4$	$X^2+12X+31$
19	$X+7$	$X+2$	X^2-13	$(X-1)^2$	$X+2$	$X^2+4X-41$
p	$(+, -)$					
2	X	X^2-2	X^2-7	$X+1$	X^2-3X+1	
7	$X+4$	$(X-3)^2$	$(X-3)^2$	X	X^2	
11	X	X^2-18	X^2-28	$X-5$	X^2	
13	$X-5$	$(X-3)^2$	$(X+2)^2$	$X+5$	X^2	
17	X	X^2-8	X^2-28	$X+4$	$X^2-12X+31$	
19	$X-8$	$(X-1)^2$	$(X-1)^2$	$X+2$	$X^2+4X-41$	
p	$(-, +)$					
2	X	X^2-7	$X+2$	$X-2$	$X-1$	X^2-X-3
7	$X-4$	$(X+3)^2$	$X-3$	$X-3$	X	$X^2+2X-12$
11	X	X^2-28	$X-2$	$X+2$	$X-5$	$X^2-2X-12$
13	$X+5$	$(X-2)^2$	$X-5$	$X-5$	$X-5$	X^2+6X-4
17	X	X^2-28	$X+8$	$X-8$	$X-4$	X^2-4X-9
19	$X-8$	$(X-1)^2$	$X-1$	$X-1$	$X+2$	X^2-13

表 3: Fourier coefficients of $f = \sum a_n q^n$

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
a_p	$\sqrt{2}$	0	0	3	$3\sqrt{2}$	3	$-2\sqrt{2}$	1	$5\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$
p	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
a_p	2	9	$-3\sqrt{2}$	6	$-2\sqrt{2}$	$-7\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	-13	-3	$-9\sqrt{2}$
p	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
a_p	9	-5	$-\sqrt{2}$	0	3	$-6\sqrt{2}$	3	$-5\sqrt{2}$	-8	$-\sqrt{2}$
p	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
a_p	-18	$6\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	13	$12\sqrt{2}$	-1	6	-9	$4\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$

(2) $N = 972 = 2^2 \cdot 3^5$ とする. このとき $\dim S_2^0(972) = 12$ で, 2 次元の $\mathbb{Q}$ -単純部分空間がただひとつ存在する (表 1, 表 4 参照). $f = \sum a_n q^n$ を対応する newform (のうちのひとつ) とする. f は表 5 で与えられる Fourier 係数をもつ. すなわち $K_f = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ で, $f^\sigma = f \otimes \chi_3$ が成り立つから, $N = 675$ のときと同じように, A_f は判別式 6 の四元数体の作用を受ける QM-型 Abel 曲面である.

表 4: Characteristic polynomials $\Phi_{T(p)}(X)$ of $T(p)|S_2^0(972)$

p	$(-, +)$			
5	X	X	$X^2 - 18$	$X^3 - 9X + 9$
7	$X - 5$	$X + 1$	$(X - 2)^2$	$X^3 + 3X^2 - 6X + 1$
11	X	X	$X^2 - 18$	$X^3 - 9X^2 + 18X + 9$
13	$X - 5$	$X - 2$	$(X + 1)^2$	$X^3 + 3X^2 - 6X - 17$
17	X	X	$X^2 - 18$	$X^3 - 9X^2 - 9X + 153$
19	$X + 7$	$X - 8$	$(X - 5)^2$	$X^3 + 3X^2 - 6X - 17$
p	$(-, -)$			
5	X	X	$X^3 - 9X - 9$	
7	$X + 1$	$X + 4$	$X^3 + 3X^2 - 6X + 1$	
11	X	X	$X^3 + 9X^2 + 18X - 9$	
13	$X + 7$	$X - 5$	$X^3 + 3X^2 - 6X - 17$	
17	X	X	$X^3 + 9X^2 - 9X - 153$	
19	$X + 1$	$X + 7$	$X^3 + 3X^2 - 6X - 17$	

表 5: Fourier coefficients of $f = \sum a_n q^n$

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
a_p	0	0	$3\sqrt{2}$	2	$3\sqrt{2}$	-1	$-3\sqrt{2}$	5	$-3\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$
p	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
a_p	-7	-4	$-6\sqrt{2}$	5	0	$3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	5	11	$-3\sqrt{2}$
p	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
a_p	-1	11	$9\sqrt{2}$	$-12\sqrt{2}$	-7	$6\sqrt{2}$	11	$-6\sqrt{2}$	-1	0
p	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
a_p	-1	$3\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	-10	$-3\sqrt{2}$	-13	-7	14	$-18\sqrt{2}$	0

(3) $\mathfrak{K}_f$ が判別式 6 の四元数体となっているような QM-型 Abel 曲面 A_f は, このほかに $N = 1323, 1568, 1849, 2592$ および $N = 2601$ に存在する. もう少し詳しくいうと, $N = 1849$ に 1 つ, $N = 1323, 1568, 2601$ に 2 つずつ, $N = 2592$ に 4 つ存在する. 表 6 に, それらに対応する newforms のはじめのいくつかの Fourier 係数を掲げておく. ただし, 表中の χ は extra twist, 符号は Atkin-Lehner の対合の固有値を表す. $301 \leq N \leq 3000$ において, 判別式が 6 の四元数体となっている例は, 上の (1), (2) とあわせて, これらがすべてである.

下の表から示唆されるように, これらのうちのいくつかは, 他の QM-Abel 曲面を twist して得られる. たとえば $N = 1323$ のときの 2 つの例は, 互いに相手の χ_7 -twist となっている. (この例以降では, Hecke 作用素の特性多項式の表は省略する.)

表 6: Fourier coefficients of $f = \sum a_n q^n$

$N = \prod p^\nu$	χ	sign	a_2	a_3	a_5	a_7	a_{11}	a_{13}	a_{17}
$1323=3^3 7^2$	$\left(\frac{-3}{\cdot}\right)$	(+, -)	$\sqrt{6}$	0	$-\sqrt{6}$	0	$2\sqrt{6}$	4	$\sqrt{6}$
		(-, +)	$\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	0	$2\sqrt{6}$	-4	$-\sqrt{6}$
$1568=2^5 7^2$	$\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$	(-, +)	0	$\sqrt{3}$	1	0	$3\sqrt{3}$	0	5
		(-, -)	0	$-\sqrt{3}$	-1	0	$3\sqrt{3}$	0	-5
$1849=43^2$	$\left(\frac{-43}{\cdot}\right)$	(+)	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	-1	-3	-7
$2592=2^5 3^4$	$\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$	(+, +)	0	0	-1	$2\sqrt{6}$	$-2\sqrt{6}$	3	-5
		(-, +)	0	0	1	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$	3	5
$2592=2^5 3^4$	$\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$	(+, +)	0	0	-1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-3	4
		(-, -)	0	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-3	-4
$2601=3^2 17^2$	$\left(\frac{-51}{\cdot}\right)$	(+, +)	$\sqrt{2}$	0	-1	$\sqrt{2}$	-1	1	0
		(+, +)	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	1	1	0

(4) これまであげてきた例はすべて判別式が 6 の四元数体による QM をもっていたが, $N = 1568$ に判別式 14, $N = 2700$ に判別式 10 の四元数体

($/\mathbb{Q}$) による QM をもつ Abel 曲面 A_f の例が存在する. 以下に, これらに対する Fourier 係数の表を掲げておく. (表の見方は (3) に同じ.)

表 7: Fourier coefficients of $f = \sum a_n q^n$

$N = \prod p^\nu$	χ	sign	a_2	a_3	a_5	a_7	a_{11}	a_{13}	a_{17}
$1568 = 2^5 7^2$	$\begin{pmatrix} -4 \\ \cdot \end{pmatrix}$	$(+, +)$	0	$\sqrt{7}$	-3	0	$-\sqrt{7}$	-4	1
		$(+, -)$	0	$-\sqrt{7}$	3	0	$-\sqrt{7}$	4	-1
$2700 = 2^2 3^3 5^2$	$\begin{pmatrix} -3 \\ \cdot \end{pmatrix}$	$(-, +, -)$	0	0	0	-1	$\sqrt{10}$	-3	$-2\sqrt{10}$
		$(-, -, -)$	0	0	0	1	$\sqrt{10}$	3	$2\sqrt{10}$

$301 \leq N \leq 3000$ において, QM をもつような Abel 曲面 A_f は上にあげた 18 個がすべてである. 上の (3) でも述べたが, これらのうちのいくつかは, 他の twist として得られる. したがって, $301 \leq N \leq 3000$ において, modular な QM-Abel 曲面 A_f は, twist の差を除けば, 全部で 10 個存在する.

3 いくつかの注意

(1) これまで, f を $\Gamma_0(N)$ 上の newform に限定し, なおかつ $\mathbb{Q}$ 上の QM-Abel 曲面のみを扱ってきたが, f の指標 (Nebentypus character) が非自明のときには, $N = 44, 56, 57, 77$, etc. のような小さな level で QM-Abel 曲面の例が存在する (たとえば [12]). これらの例では, A_f は 4 次元で, ある 2 次体上で (互いに Galois 共役な) QM-Abel 曲面の直積に分解し, $\mathfrak{A}_f = \text{End}_{\bar{\mathbb{Q}}}(A_f) = M_2(D)$, ただし D は不定符号四元数体 $/\mathbb{Q}$, となっている.

(2) $\nu = 4$ または 6 のとき, $2^\nu || N$ なる level N をもつ newforms は, すべて level $2^\alpha M$, $0 \leq \alpha \leq \nu - 1$, $M = N/2^\nu$ の newforms を twist することにより得られる ([1]). いいかえれば $S_2^0(2^\nu M)$ ($\nu = 4$ または 6; $2 \nmid M$) の情報はすべて $S_2^0(2^\alpha M)$, $0 \leq \alpha \leq \nu - 1$ から復元できる. したがって今の場合, 表 1 中の $S_2^0(2^4 M)$, $S_2^0(2^6 M)$ (M は奇数) に対する計算は実は不要である.

(3) これまでにあげた例が示すように, $p = 3$ に対しては, 各 $\nu = 2, 3, 4$,

5 に対して $3'' \parallel N$ なる導手 N をもつ QM-Abel 曲面が存在する. 一方, $p = 2$ については $\nu = 2, 5$ の場合にしか見つかっていない. (もちろん, $\nu = 2$ のときの例を $\chi_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ \cdot \end{pmatrix}$, $\nu = 2, 5$ のときの例を $\chi_8 := \begin{pmatrix} 8 \\ \cdot \end{pmatrix}$ で twist すればそれぞれ $\nu = 4, 6$ のときの例が得られる.)

(4) 一般に, f を $\Gamma_1(N)$ 上の CM をもたない newform とし, χ を (2 次とは限らぬ) Dirichlet 指標とする. このとき,

$$\Gamma = \Gamma_f = \{\sigma : K_f \hookrightarrow \mathbb{C} \mid f^\sigma = f \otimes \chi \ (\exists \chi)\}$$

は $\text{Aut}(K_f/\mathbb{Q})$ に含まれる. 実は Γ は Abel 群をなし, $\mathfrak{F}_f$ の中心 $Z(\mathfrak{F}_f)$ を F_f とおけば K_f/F_f は Abel 拡大で, $\text{Gal}(K_f/F_f) \cong \Gamma$ が成り立つ ([9],[8]). 第 1 節, 第 2 節で扱ったのは, f が Haupt 型で, $F_f = \mathbb{Q}$, $[K_f : F_f] = |\Gamma| = 2$, かつ A_f が ($\bar{\mathbb{Q}}$ 上) 単純となっているものである. また, 上の (1) で言及した $\mathfrak{F}_f = M_2(D)$ の例では, f は非自明な指標をもち, $F_f = \mathbb{Q}$, $[K_f : F_f] = |\Gamma| = 4$ となっている. なお, f が Haupt 型で, $F_f = \mathbb{Q}$, $[K_f : F_f] = |\Gamma| = 4$, かつ $\mathfrak{F}_f = M_2(D)$ となっている例が, 上記表 1 中にいくつか存在する. ($S_2^0(N)$ 中にそのようなものが存在するならば, N はやはり命題 2 の条件を満たすことが必要である.) これらも興味深い考察対象であるが, 今回は $\mathbb{Q}$ 上の QM-Abel 曲面に焦点をあてたため, これらについては割愛する.

(5) f が第 1 節の仮定を満たし, しかも extra twist をもつが $\mathfrak{F}_f = M_2(\mathbb{Q})$ となるような例, すなわち上の (4) の記号で $F_f = \mathbb{Q}$, $[K_f : F_f] = |\Gamma| = 2$ であって, A_f が $\bar{\mathbb{Q}}$ 上分解するような例は数多く存在する. (たとえば $N = 63 = 3^2 \cdot 7$, $N = 169 = 13^2$, etc.) そのような例は $N = 1024 = 2^{10}$ においても (twist の差を除いて 2 つ) 存在する (cf. 本節 (3)). $N = 1024$ の例では, とともに $K_f = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ で, extra twist が χ_8 になっている.

参考文献

- [1] A.O.L. Atkin and J. Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, *Math. Ann.* 185 (1970), 134–160.
- [2] A.O.L. Atkin and D.J. Tingley, Table 5, pp.135–141, *Modular functions of one variable IV*, Lecture Notes in Mathematics No.476, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1975.
- [3] A. Brumer, “The rank of $J_0(N)$ ”, *Columbia University Number Theory Seminar*, *Astérisque* 228 (1995), 41–68.

- [4] Y. Hasegawa, On some examples of modular QM-abelian surfaces, to appear in *Proc. Japan Acad.*
- [5] K. Hashimoto and N. Murabayashi, Shimura curves as intersections of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two, *Tôhoku Math. J.* **47** (1995), 271–296.
- [6] H. Hijikata, Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$, *J. Math. Soc. Japan* **26** (1974), 56–82.
- [7] M. Koike, On certain abelian varieties obtained from new forms of weight 2 on $\Gamma_0(3^4)$ and $\Gamma_0(3^5)$, *Nagoya Math. J.* **62** (1976), 29–39.
- [8] F. Momose, On the ℓ -adic representations attached to modular forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **28** (1981), 89–109.
- [9] K. Ribet, Twists of modular forms and endomorphisms of abelian varieties, *Math. Ann.* **253** (1980), 43–62.
- [10] K. Ribet, “Endomorphism algebras of abelian varieties attached to newforms of weight 2”, *Progress in Math.* **12** (1981), 263–276.
- [11] H. Saito, On a decomposition of spaces of cusp forms and trace formula of Hecke operators, *Nagoya Math. J.* **80** (1980), 129–165.
- [12] G. Shimura, Class fields over real quadratic fields and Hecke operators, *Ann. of Math.* **95** (1972), 130–190.
- [13] G. Shimura, On the factors of the jacobian varieties of a modular function field, *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 523–544.
- [14] G. Shimura, “Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions”, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1971.
- [15] M. Yamauchi, On the traces of Hecke operators for a normalizer of $\Gamma_0(N)$, *J. Math. Kyoto Univ.* **13** (1973), 403–411.