

Low-Discrepancy sequence の高速化

日本 IBM 基礎研 水田秀行 (Hideyuki Mizuta)

東大理学系研究科 関根達夫 (Tatsuo Sekine)

日本 IBM 基礎研 手塚集 (Shu Tezuka)

複雑な金融派生商品の価格計算において、計算機を用いた数値計算が必須となってくる。従来は、金利変動を考慮した価格プロセスの期待値を求める際、疑似乱数によるモンテカルロ法が主に用いられた。しかし、巨大な資産のリスク管理や実務におけるリアルタイム評価ではさらなる高速化が求められる。最近このような数値計算において、より偏りの少ない確定的な数列を用いて積分の近似を行うことによって、より速く収束させることができるようになってきた。[1]

ここでは、金融派生商品の価格付けの基礎といくつかの実例を示し、Low-discrepancy sequence (LDS) を用いた多次元積分によって価格計算を高速に行う方法を紹介する。

1 金融における確率過程

金融商品において価格が変動する要因として金利と証券価格の変動が主要なものとしてあげられる。それらの変動の確率プロセスとして Vasicek model と幾何ブラウン運動がよく用いられる。

金利変動 dr を、時間経過 dt とウィーナー過程 dz によって与える。

この時、Vasicek Model は

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (1)$$

となる。ここで、Mean reversion a , b および volatility σ は定数である。

また幾何ブラウン運動 (対数正規過程) は次のように与えられる。

$$\frac{dr}{r} = \mu dt + \sigma dz \quad (2)$$

ここで、drift μ および volatility σ は定数である。

これは伊藤の公式より

$$d(\log r) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \quad (3)$$

と書ける。

次に Euler 近似によって離散化を行う。時間間隔を Δt 、 $N(0, 1)$ の正規乱数を u_i ($i = 0, \dots, i_{\max}$ 、時刻 $t = i\Delta t$ の金利 r_i とする。この時 Vasicek model (1) は

$$r_{i+1} - r_i = a(b - r_i)\Delta t + \sigma u_i \sqrt{\Delta t} \quad (4)$$

となる。また、離散化対数正規過程は、(3) より

$$\log r_i - \log r_{i-1} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}u_i \quad (5)$$

となる。

2 金融派生商品

ここで、商品の実例をいくつか紹介する。

2.1 5-year Discount Bond

5年後に1単位支払われる債券の現在価値を求める。現在価値は Vasicek Model によって与えられる5年間の金利変動に従って、割り引いて考えなくてはならない。

離散化単位 Δt を $1/288$ 年とすると、 $i_{max} = 1439$ となる。このとき、各時点の金利 r_i を用いて、価格 P は

$$P = \exp\left(-\Delta t \sum_{i=0}^{i=i_{max}} r_i\right) \quad (6)$$

で与えられる。よって、例えば、

$$(r_0, a, b, \sigma) = (0.021673, 0.1817303, 0.0825398957, 0.0125901) \quad (7)$$

として漸化式 (4) より r_1 から r_{1439} を与えれば、この債券の現在価値が求まる。

2.2 Mortgage-backed security(MBS)

これは30年満期の元利均等払いのローンから構成された商品である。通常は毎月一定金額 C の支払いがあるが、金利の関数として与えられるある確率に従って元本の先払いが生じる。

金利 r_i ($i = 0, \dots, i_{max}$) は離散化対数正規過程 (5) に従うとする。ここで、 Δt は $1/12$ 年、 $i_{max} = 360$ となる。

先払い確率は次の式で与えられる。[2]

$$w_i = K_1 + K_2 \tan^{-1}(K_3 r_i + K_4) \quad (8)$$

各月の支払い M_k は

$$M_k = C(1 - w_1) \cdots (1 - w_{k-1})(1 - w_k + w_k \sum_{i=0}^{360-k} \frac{1}{(1 + r_0)^i}) \quad (9)$$

となる。これを割り引いて現在価値を求め、合計すると MBS の価格が与えられる。

2.3 Black-Scholes model

証券価格 S のプロセスも、金利プロセスと同様に考えることができる。ここでは対数正規過程を考える。

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dz \quad (10)$$

離散化と伊藤の公式により

$$S_k = S_{k-1} \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} u_k \right] \quad (11)$$

となる。ここで、drift 係数として金利 r を用いていることは、リスク中立測度を用いていることに相当する。無裁定性を仮定するとオプションの現在価値はこの測度のもとでの期待値によって与えられる。

この証券に対するヨーロピアンコールオプションの満期時点 T における価値は $\text{Max}(S_T - K, 0)$ である。ここで、 K は行使価格である。このコールオプションに対するリスク中立測度における期待値より割り引かれた現在の価格 P が次のように求められる。

$$P = \exp(-rT) \hat{E} [\text{max}(S_T - K, 0)]. \quad (12)$$

ブラック・ショールズ公式によると、標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を用いてコール価格 P は

$$P = S\Phi(d) - K \exp(-rT)\Phi(d - \sigma\sqrt{T}) \quad (13)$$

$$d = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (14)$$

となる。

3 モンテカルロ法と LDS

ブラック・ショールズ公式のように比較的簡単なプロセスの場合には直接評価することが可能であるが、経路に依存するような複雑な金融派生商品の現在価値の評価には数値計算が必要となってくる。有限差分法によってオプション価格を与える偏微分方程式の境界値問題を解く方法や、有限の分岐のみを考え満期時点から逆向きに計算するツリーモデルのようなものもあるが、ここでは、モンテカルロ法による数値実験を考える。

モンテカルロ法は実装が直感的で分かりやすく、新規のオプションモデルに対する構築が容易である。また、離散化の度合いをあげ、用いる乱数列の次元を高くしても、収束に要する計算量があまり増加しないという特徴を持っている。

通常のモンテカルロ法では $i_{\max}$ 個の疑似乱数を用いて評価値 f_j を 1 つ求める。 N 回の試行によって近似値 $\hat{f} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j$ の真の値からの評価誤差は、中心極限定理により N を増加するにつれ $1/\sqrt{N}$ に比例して減少する。このため 10 倍の精度を得るためには、100 倍の試行が必要となる。ここで、1 回の試行 f_j を求めるため

に疑似乱数ではなく LDS を用いることで、評価誤差を $1/N$ とできることが知られている。これによって、必要な精度を得るのに要する計算量を大幅に減らすことができる。そこで、これ以降 LDS の構成と LDS を用いた数値実験例を示す。

3.1 LDS の定義

LDS は、一様な分布からの隔たり (discrepancy) が小さい数列である。 $[0, 1]^k$ 内の点列 $X_1, \dots, X_N$ に対する worst-case discrepancy は $J = [0, u_1] \times \dots \times [0, u_k]$ を体積 $V(J)$ の部分区間、 $A(J; N)$ を区間 J に入る点列の数とすると

$$D_N^{(k)} = \sup_J \left| \frac{A(J; N)}{N} - V(J) \right| \quad (15)$$

として定義される。

LDS は無限点列 $(P_1, \dots, P_i, \dots)$ で点集合 $(P_1, \dots, P_N)$ がすべての $N > 1$ に対して、この $D_N^{(k)}$ が、 C_k を次元 k のみに依存する定数として

$$D_N^{(k)} \leq C_k \frac{(\log N)^k}{N} \quad (16)$$

を条件を満たすものとして定義される。

Discrepancy と評価誤差とは次の Koksma-Hlawka の定理によって関係づけられる。

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \int_{[0,1]^k} f(u) du \right| \leq V(f) D_N^{(k)} \quad (17)$$

ここで、 $V(f)$ は Hardy-Krause の意味での変動である。

この定理と LDS の定義から、モンテカルロ計算において LDS を用いることにより、十分大きな N に対して誤差が $1/N$ に比例して減少することが分かる。

3.2 Halton sequence

ここで代表的な LDS の構成例として k 次元 Halton sequence を紹介する。

$b_1, \dots, b_k$ は、どの 2 つも互いに素な正整数とする。

まず、自然数 i の b 進展開を考える。

$$i \equiv a_0 + a_1 b + \dots + a_m b^m \quad (18)$$

展開係数 a_m を用いて、 i に b 進小数を対応させる写像 $\phi_b(i)$ を定義する。

$$\phi_b(i) \equiv \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_m}{b^{m+1}} \quad (19)$$

この $\phi_b(i)$ を用いて、 k 次元 Halton sequence は次のように与えられる。

$$x_i = (\phi_{b_1}(i), \phi_{b_2}(i), \dots, \phi_{b_k}(i)) \quad (20)$$

Halton sequence の始めの N 点の discrepancy は

$$D_N^{(k)} \leq C(b_1, \dots, b_k) \frac{(\log N)^k}{N} \quad (21)$$

となる。ここで、

$$C(b_1, \dots, b_k) \sim \prod_{i=1}^k \frac{b_i}{\log b_i} \quad (22)$$

である。

3.3 Niederreiter sequence

次にネット理論を用いた (t, k) -sequence の構成を示す。

(t, k) -sequence は (t, m, k) -net の上で定義され、discrepancy は次のように与えられる。

$$D_N^{(k)} \leq C_k(t, k, b) \frac{(\log N)^k}{N}, \quad (23)$$

$$C(t, k, b) \sim \frac{b^t}{k!} \left(\frac{b}{2 \log b} \right)^k. \quad (24)$$

実際の (t, k) -sequence の構成は b 進多項式の形式的な Laurent 級数展開を用いて与えられる。[3]

自然数 n に対して、その b 進展開 $a_r(n)$ および、生成行列 $C^{(i)} = (c_{jr}^{(i)})$ より、 i 座標 $P_n^{(i)}$ が与えられる。

$$P_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} c_{jr}^{(i)} a_r(n) \right) \quad (25)$$

ここで、生成行列は、多項式 $y_{im}(z)$, $p_i(z)$ より

$$\frac{y_{im}(z)}{p_i(z)^j} = \sum_{r=w}^{\infty} a^{(i)}(j, m, r) z^{-r} \quad (26)$$

$$c_{mr}^{(i)} = a^{(i)}(m_i + 1, m, r) \quad (27)$$

として与えられる。

この Niederreiter Sequences は既知のさまざまな LDS と次のような関係を持つ。Sobol' Sequence は $b = 2$ で、 $p_i(z)$ が原始多項式として与えられる。また、Faure sequence は、 $b \geq k$ が素数で、 $p_i(z) = z + i$, $y_{im}(z) = 1$ として与えられる。

これにさらにスクランブル写像を入れることによって一般化 Faure sequence が与えられる。その生成行列 $C^{(i)}$ は

$$C^{(i)} = A^{(i)} ({}^t P)^{i-1} \quad (28)$$

となる。ここで、 $A^{(i)}$ は $GF(b)$ 上の正則な下三角行列、 P は Pascal の行列である。

4 数値実験

では、実際にこのように構成した LDS を用いて、MBS の価格計算を行ってみる。MBS のパラメーターとして、 $C = 2000$

$$(K1, K2, K3, K4) = (0.24, 0.134, -261.17, 12.72) \quad (29)$$

を用いた。金利は、対数正規過程に従うとし、

$$(\mu, \sigma, r_0) = (0, 0.2, 0.00625) \quad (30)$$

とした。

このとき 5000 回のシミュレーションによって、Fig. 1 の結果が得られた。疑似乱数を用いたモンテカルロ法に比べ、LDS は非常に速く収束している。それぞれ、 $1/\sqrt{N}$ 、 $1/N$ に比例して、誤差が減少しているのが分かる。

さてここで、Black-Scholes モデルを単純化した仮想的なモデルを考えてみる。 D 個の正規乱数 u_i とパラメータ r により、値 P が次のように決まる。

$$P = \exp \left(r \sum_{i=1}^D u_i \right) \quad (31)$$

P の期待値 $\hat{P}$ は容易に求まり、

$$\hat{P} = \exp \left(\frac{Dr^2}{2} \right) \quad (32)$$

となる。

この EXP モデルを用いて、モデルの分散を変化させた時、疑似乱数および LDS によるモンテカルロ計算の収束性がどのように変化するか確認できる。

これまで、LDS による収束が従来のモンテカルロ法を圧倒するのは、低次元だけだと思われてきた。だが、実際の金融の分野で用いられるモデルは非常に高次元 (1000 次元以上) であるのに LDS が有効である。

ここでは、 $D = 1000$ として、 r の 2 つの値に対して実験してみた。Fig. 2 に示すように、 r が比較的大きい場合、モンテカルロ法も LDS も大差がない。しかし、ここで次元を変えずに r のみを小さくしていくと、LDS がモンテカルロ法より遥かに速く収束するようになる。このように、これまで discrepancy のみに注目してきたが、では LDS がより有効となる被積分関数の条件があり、金融の分野で用いられるモデルでは通常分散が小さいためこれが満たされていると期待される。そこで今後の課題として、LDS が有効となる関数のクラスを求めることが考えられる。

参考文献

- [1] S. Ninomiya and S. Tezuka, Toward Real Time Pricing of Complex Financial Derivatives, App. Math. Finance, **3** (1996), 1-20.

- [2] S. H. Paskov, New Methodologies for Valuing Derivatives, in Mathematics of Derivative Securities, Cambridge University Press, Cambridge UK, (1997), 545-582.
- [3] S. Tezuka, Uniform Random Numbers: Theory and Practice, Kluwer Academic Publishers, Boston (1995).

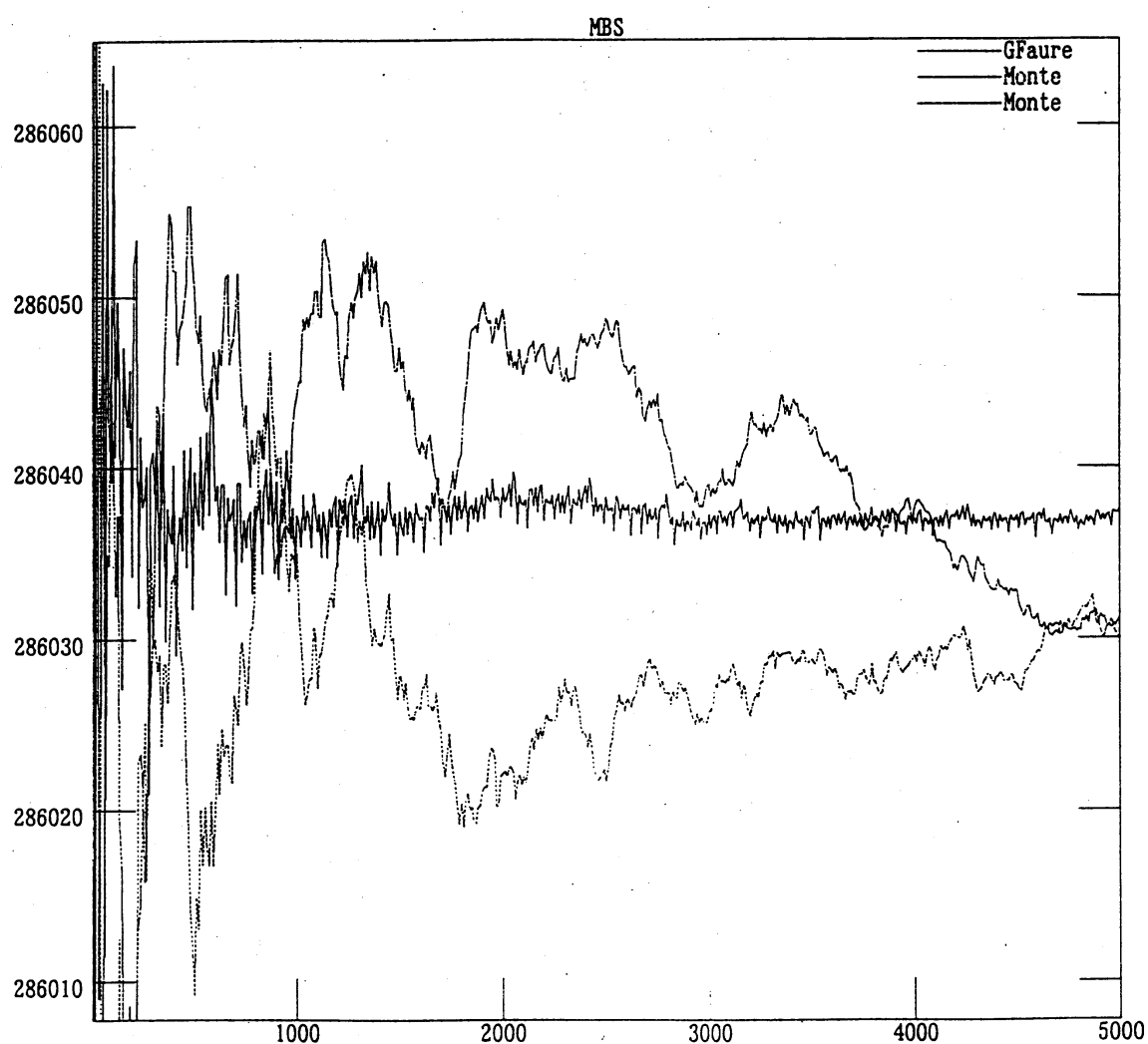


Fig. 1

Fig. 2

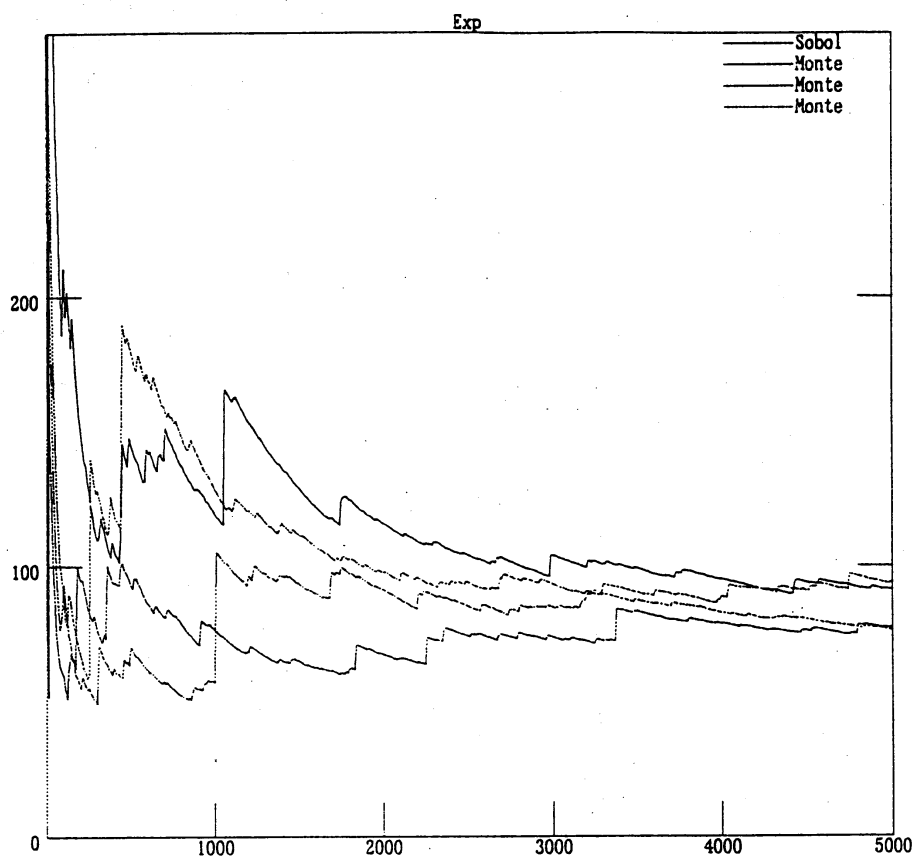
 $r = 0.1$ 

Fig. 3

 $r = 0.01$ 