

T-正値性と揺動散逸定理

東大理 岡部靖憲

§1 序

一昨年(1979)の研究集会「確率過程論と開放系の統計力学 I」において報告したことのつづきとして、そこで未解決であったことを解決する。即ち、T-正値性をもつ正規定常過程の時間発展を記述する確率微分方程式のクラスを特徴付け、その方程式に対する一般化された Einstein の関係式と一般化された第一種揺動散逸定理を証明する。その結果をヒルベルト空間の上に定式化し、T-正値性をもつ定常過程の時間発展を記述する Langevin 方程式—— $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Langevin 方程式——を導き、それに対する揺動散逸定理を得ることが出来る。森肇氏のブラウン運動の理論——森の方程式とそれに対する揺動散逸定理——と比較し、何故我々の結果が、久保亮五氏によって提出された、「非線形拡散過程の定常状態に対する揺動散逸定理を求める」問題に答えることが出来るかについて

と述べたいと思う。

§2 一次元拡散過程と揺動散逸定理

$X = (X_t, P; t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R})$ を一次元拡散過程で、
その生成作用素が

$$(2.1) \quad \mathcal{G} = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}$$

で与えられたものを考える。

a と b が 適当な条件をみたせば X の定常状態
もあるが、定常マルコフ過程 $X = (X_t, P; t \in \mathbb{R})$ の時間発
展を記述する確率微分方程式は、

$$(2.2) \quad dX_t = \left(-\beta X_t + \int_{-\infty}^0 X_{t+s} h(s) ds \right) dt + \alpha dW_t \quad (t \in \mathbb{R})$$

となる。ここで、四つ組 $[\alpha, \beta, h, W_t]$ は次の性質をみたす。

$$(2.3) \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

$$(2.4) \quad h(s) = \int_0^\infty e^{s\lambda} \mu(d\lambda), \quad \mu \text{ は } \mu(\{0\}) = 0 \text{ をみたす}$$

測度

$$(2.5) \quad \beta \geq \int_{-\infty}^0 h(s) ds \quad (= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \mu(d\lambda))$$

$$(2.6) \quad W = (W_t; t \in \mathbb{R}) \text{ の各 } W_t \text{ は } L^2(P) \text{ に属し}$$

$$(i) \quad \|W_t - W_s\|^2 = |t - s|$$

$$(ii) \quad \text{各 } t \text{ に対し、} X_s (s \leq t) \text{ の } L^2(P) \text{ の中で生成す} \\ \text{る閉部分空間} = W_{s_1} - W_{s_2} (s_1, s_2 \leq t) \text{ の } L^2(P) \text{ の中}$$

で生成する 閉部分空間

さらに、かかる性質をもつ四組 $[\alpha, \beta, \gamma, W_t]$ は唯一つに定まる。

方程式 (2.2) において、擾動項 αdW_t は、(2.6)(i) によつて white spectral をもち、直交性をもっており、(2.6)(ii) によつて、いわゆる causality が成り立っている。この意味で W_t ($W_t, t \in \mathbb{R}$) を innovation process とよぶことができ、方程式 (2.2) を $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Langevin 方程式 ということにする。このとき、我々は次の

	一般化した Einstein の関係式
(2.7)	$\frac{\alpha^2}{2} = R(\omega) C_{\beta, \gamma}$
(2.8)	$R(\omega) = (X_\omega, X_\omega)$
(2.9)	$C_{\beta, \gamma} = \pi \left(\int_{\mathbb{R}} \beta - i\omega - \bar{f}(\omega) ^{-2} d\omega \right)^{-1}$

が成り立つ。定数 $C_{\beta, \gamma}$ は、 $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Langevin 方程式の drift term のみで定まり、 $\gamma=0$ のとき、 $C_{\beta, 0} = \beta$ となり、(2.2) は Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動に、(2.7) は Einstein の関係式 に 他なるないことに注意して、 $C_{\beta, \gamma}$ を 一般化した抵抗 ということにする。

そして、関係式 (2.7) を (2.1) の作用素 $\mathcal{L}$ の拡散係数 a

と、漂速係数 b の 2 と ば 2 あ る わ ち と、 2 の 様 に 存 在 する。

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2}{2} = - \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x b(x)}{a(x)} e^{B(x)} dx}{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a(x)} e^{B(x)} dx} \\ R(0) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{a(x)} e^{B(x)} dx}{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a(x)} e^{B(x)} dx} \\ C_{\beta, \gamma} = - \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x b(x)}{a(x)} e^{B(x)} dx}{\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{a(x)} e^{B(x)} dx} \end{array} \right.$$

例 1. $B(x) = \int_0^x \frac{b(y)}{a(y)} dy$

この関係式 (2.7) と (2.10) を (2.1) の生成作用素 $\mathcal{L}$ による一次元拡散過程に対する一般化した Einstein の関係式 といふことにする。

例 1 (Ornstein-Uhlenbeck のブラウノ運動)

$$a(x) = \frac{\alpha^2}{2}, \quad b(x) = -\beta x \quad (\alpha, \beta > 0)$$

このとき、(2.2) は、

$$(2.11) \quad dX_t = -\beta X_t dt + \alpha dB_t$$

となり、(2.7) は、

$$(2.12) \quad \frac{\alpha^2}{2} = \nu \cdot \beta$$

とかくとせ、 ν は $\mathcal{L}$ の生成作用素による拡散過程 (Ornstein-

Uhlenbeck のブラウレ運動) の不変測度、このときは正規分布、の分散に等しい。

1312. (O. U. B. M.)³

$X = (X_t; t \in \mathbb{R})$ を例1の Ornstein-Uhlenbeck のブラウレ運動とし、 $Y_t = X_t^3$ なる定常マルコフ過程 $Y = (Y_t; t \in \mathbb{R})$ を考える。 $P(\cdot | Y_0 = y)$ なる条件付確率の下で、 $t > 0$ においては、 Y_t は、

$$(2.13) \quad dY_t = (-3\beta Y_t + 3\alpha^2 Y_t^{\frac{1}{3}}) dt + 3\alpha Y_t^{\frac{2}{3}} dB_t$$

($(B_t)_{t \geq 0}$ は B.M.)

なるマルコフ型の確率微分方程式をみたしており、(2.1)の生成作用素の係数 $a(y)$ と $b(y)$ は、

$$(2.14) \quad \begin{cases} a(y) = \frac{9}{2} \alpha^2 y^{\frac{4}{3}} \\ b(y) = -3\beta y + 3\alpha^2 y^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

となる。このときの我々の (2.2) で与えられた $[\alpha_y, \beta_y, \gamma_y]$ -Langevin 方程式の、三つ組 $[\alpha_y, \beta_y, \gamma_y]$ は、

$$(2.15) \quad \begin{cases} \alpha_y = \sqrt{54\beta v^3} \\ \beta_y = (4 - \sqrt{\frac{11}{3}})\beta \\ \gamma_y(s) = \chi_{(-\infty, s)} \frac{4(\sqrt{33}-5)}{3} \beta^2 e^{\sqrt{\frac{11}{3}}\beta s} \end{cases}$$

となり、 Y に対する一般化された Einstein の関係式 (2.7) (2.10) は、

$$(2.16) \quad \begin{cases} \frac{dy^2}{2} = 27\beta v^3 \\ R_y(0) = 15 \cdot v^3 \\ C_{p_y, dy} = \frac{9}{5}\beta \end{cases}$$

と存す。

§3 一次元拡散過程と T-正値性

$X = (X_t, P_x; t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^1)$ は §2 と同じ一次元拡散過程とする。 $a(x), b(x)$ ((2.1) にあるものを) は連続函数とし、 $a(x)$ は正値とする。このとき、 m 測度 $m(dx)$ は

$$(3.1) \quad m(dx) = \frac{1}{a(x)} \exp\left(\int_0^x \frac{b(y)}{a(y)} dy\right) dx$$

で定義し、 $m(\mathbb{R})$ は有限であるとして、

$$(3.2) \quad P_0(dx) = \frac{1}{m(\mathbb{R})} m(dx)$$

により確率測度を定義する。境界点 $-\infty$ と $+\infty$ が Feller の意味で、流出境界あるいは自然境界のとき、即ち、

$$(3.3) \quad \int_{(-\infty, 0)} \left(\int_y^0 d m(x)\right) e^{-B(y)} dy = \int_{(0, \infty)} \left(\int_0^y d m(x)\right) e^{-B(y)} dy = \infty$$

2.2.2

$$(3.4) \quad B(y) = \int_0^y \frac{b(x)}{a(x)} dx,$$

が成り立つときは $m(dx)$ は X の不変測度となる。従って、 $P_0(dx)$ は X の初期分布にとることにする。

X の定常状態を記述する定常マルコフ過程 $X = (X_t, P; t \in \mathbb{R})$ が与えられる: $-\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ に對し,

$$(3.5) \quad P((X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \in dx_1 \dots dx_n) \\ = P_0(dx_1) P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \dots P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n)$$

こゝで、 $P(t, x, dy)$ ($t > 0$) は X の遷移確率で、

$$(3.6) \quad P(t, x, dy) = P_x(X_t \in dy).$$

さらに大事なことは、(2.1) の作用素 $\mathcal{Q}$ が $L^2(\mathbb{R}, P_0)$ 上の強連続な対称半群を生成することである。この結果、 $-\mathcal{Q}$ の単位分解 $(E_\lambda; \lambda \geq 0)$ とすると、任意の実数値の $L^2(\mathbb{R}, P_0)$ の元 f に對して、 $X_f = (f(X_t); t \in \mathbb{R})$ は定常過程となるが、その共分散函数を R_f とすると、

$$(3.7) \quad R_f(t-s) = (e^{(t-s)\mathcal{Q}} f, f)_{P_0} = \int_{[0, \infty)} e^{-t+s\lambda} d(E_\lambda f, f)_{P_0}$$

従つて、測度 $\sigma_f(d\lambda)$ を

$$(3.8) \quad \sigma_f(d\lambda) = d(E_\lambda f, f)$$

とおくと、

$$(3.8) \quad R_f(t) = \int_{[0, \infty)} e^{-it\lambda} \sigma_f(d\lambda).$$

特に、座標函数 $f_0(x) = x$ が $L^2(\mathbb{R}, P_0)$ に属するとせば、 X の共分散函数 R は、次の形をしてゐる:

$$(3.9) \quad R(t) = \int_{[0, \infty)} e^{-it\lambda} \sigma(d\lambda) \quad (\sigma(d\lambda) \text{ は有限な測度})$$

かかる性質をもつ定常過程は、ボース形の意味での正値性をもつといわれる。実は、一次元マルコフ定常過程 X は、

非線形の意味でも T-正値性をもつことがわかる。 このことは次の §4 のべることにする。

§4 T-正値性とそれに付随するハミルトン型

$(S, \mathcal{F})$ を任意の可測空間とし、 W_S を

$$(4.1) \quad W_S = \{w: (-\infty, \infty) \rightarrow S\}$$

で定義した $path$ 空間とし、 $N_t \in W_S$ を $N_t(w) = w(t)$ で定まる座標写像とす： $N_t: W_S \rightarrow S$ ($t \in \mathbb{R}$)。

W_S の中の σ -加法族 $\mathcal{B}, \mathcal{B}^+, \mathcal{B}^-, \mathcal{B}^*$ を

$$(4.2) \quad \begin{cases} \mathcal{B} = \sigma(N_t; t \in \mathbb{R}), \\ \mathcal{B}^+ = \sigma(N_t; t \geq 0), \quad \mathcal{B}^- = \sigma(N_t; t \leq 0), \quad \mathcal{B}^* = \sigma(N_0) \end{cases}$$

で定義する。さらに、 $\Theta_t, Z \in W_S$ の上の shift operator, time reflection operator とする：

$$(4.3) \quad \begin{cases} (\Theta_t(w))(s) = w(s+t) \\ (Zw)(s) = w(-s). \end{cases}$$

§2. 以下に おいて、 $(W_S, \mathcal{B})$ の上に 非特異定常な測度 μ が与えられているとする：

$$(4.4) \quad \Theta_t(\mu) = Z(\mu) = \mu \quad (t \in \mathbb{R}).$$

例 4.1 §3 で述べた一次元定常マルコフ過程 $X = (X_t, P_{it \in \mathbb{R}})$ は、 $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 、 $\mu = P$ として上の例

にうつてゐる。

例 4.2 多次元 ($\mathbb{R}^d$) マルコフ過程 $\tilde{X}$ 不変測度をもつ、 $\tilde{X}$ に関して対称なときは、一次元 X とおなじく、定常マルコフ過程を得ることができ、上の例にうつてゐる。

さて、一般の場合に戻って、対称な定常測度 μ に対し、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^+$, $\mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}^\circ$, $\mathcal{H}^{\pi}$ を

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(W_S, \mathcal{B}, \mu) \\ \mathcal{H}^+ = L^2(W_S, \mathcal{B}^+, \mu), \quad \mathcal{H}^- = L^2(W_S, \mathcal{B}^-, \mu) \\ \mathcal{H}^\circ = L^2(W_S, \mathcal{B}^\circ, \mu), \quad \mathcal{H}^{\pi} = (P_{\mathcal{H}^+} A (A \in \mathcal{H}^-) \text{ で生成される閉部分空間}) \end{array} \right.$$

として、 $P_{\mathcal{H}^+}$ は $\mathcal{H}^+$ 上の射影作用素である。

また $\mathcal{H}$ 上に、unitary 群 $(U_t; t \in \mathbb{R})$ と time reflection operator T を

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_t(A) = A(\theta_t) \\ T(A) = A(\tau) \end{array} \right.$$

によって定義する。このとき、

定義 4.1 μ が T-正値性 をもつとは、 $P_{\mathcal{H}^+} T P_{\mathcal{H}^+} \geq 0$ が成り立つことをいう。

定義 4.2 μ が マルコフ性 をもつとは、 $\mathcal{B}^\circ$ で条件づけられたとき、 $\mathcal{B}^+$ と $\mathcal{B}^-$ が独立であることをいう。

命題 4.1 マルコフ性 $\Rightarrow$ T -正値性

を示すことができる。

さて、 T -正値性をもつ測度 μ に対し、

定理 4.1 $\mathcal{H}$ の上に 非自明の自己共役作用素

H が存在し、

$$(4.7) \quad (U_t A, A) = (e^{-itH} A, A) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{H}^*$$

が成り立つ。かかる H は唯一つである。

この H を μ に付随するハミルトン $= P_L$ ということにする。

例 4.1, 4.2 のべた 定常マルコフ過程 α とは、生成作用素 $\mathcal{G}$ は、 T -正値性をもつと考えたときに定まるハミルトン $= P_L H$ と unitary 同値である：

$$\begin{cases} \mathcal{H}^* \ni A \longleftrightarrow f \in L^2(P_\infty) \quad (P_\infty: \text{不変測度}) \\ \mathcal{Q}(H) \ni A \xleftrightarrow{A = f(N_0)} f \in \mathcal{Q}(\mathcal{G}) \\ HA = (\mathcal{G}f)(N_0). \end{cases}$$

ハミルトン $= P_L H$ の単位の分解 $\varepsilon (E_\lambda, d\lambda \geq 0)$ とすると、(4.7) は、

$$(4.8) \quad (U_t A, A) = \int_{[0, \infty)} e^{-it\lambda} \sigma_A(d\lambda) \quad (A \in \mathcal{H}^*)$$

但し、

$$(4.9) \quad \sigma_A(d\lambda) = d(E_\lambda A, A)$$

と書き直すことができる。

§5. 森の方程式と 擾動散逸定理

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間、 L をこの上の自己共役作用素とし、 $(U_t \equiv e^{itL}; t \in \mathbb{R})$ を L を生成作用素にもつ $\mathcal{H}$ 上の unitary 群とする。§4 の (4.6) で定義した shift operator 作用 unitary 群 は $\mathcal{H}$ の例である。 $\mathcal{H}$ の元 A に対し、

$$(5.1) \quad A_t \equiv U_t A \quad (t \in \mathbb{R})$$

と、 $A = (A_t; t \in \mathbb{R})$ の共分散函数を R_A とする:

$$(5.2) \quad R_A(t-s) = (A_t, A_s).$$

A が $\mathcal{L}(L)$ に属するとすれば、良く知られているように、 A_t は 次の Schrödinger 型の偏微分方程式を満たす:

$$(5.3) \quad A_t' = iL A_t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

森等は、射影演算子を用いて、 A_t の満たす常微分積分方程式を、擾動散逸定理が成り立つべく、random force を取り出し、次の様に導いた。

定理 (森の方程式と 擾動散逸定理)

もしも、 A が $\mathcal{L}(L)$ に属するならば、次の性質を満たす三組 $[\beta, \varphi, F]$ が存在する:

$$(5.4) \quad A_t' = i\beta A_t - \int_0^t \varphi(t-s) A_s ds + F_t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(5.5) \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$(5.6) \quad \varphi(t) \text{ は 非負定符号函数}$$

$$(5.7) \quad F = (F_t; t \in \mathbb{R}) \text{ は、各元 } F_t \text{ は } \mathcal{H} \text{ の元で、}$$

$$(5.8) \quad (F_t, A) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$(5.9) \quad (F_t, F_s) = (A, A) \varphi(t-s) \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

方程式 (5.4) が森の方程式であり、関係式 (5.9) がそれに対する 揺動散逸定理 である。この森の定理は、§3.54 のような定常マルコフ過程の shift operator による unitary 群に対しては適用できる。これは、マルコフ過程の sample path は、ほとんどすべての場合、可微分であるジグザグ曲線を描き、森の定理の大前提「初期状態 A が $\mathcal{L}(L)$ に属する」が成り立つものである。しかし、§4 で求めた $H = \mathcal{L}(L)$ (マルコフ q と H は生成作用素と unitary 同値) の定義域に初期状態が入ることはあり得ず、条件に課せることができなくなる。このことを考慮して、マルコフ定常過程も含めて、T-正値性をもつ場合に対する Langevin 方程式とそれに対する揺動散逸定理 を次の §6 で求めることにする。

§6 $[\alpha, \beta, \mu]$ -Langevin 方程式と揺動散逸定理

$(U_t; t \in \mathbb{R})$ は、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の unitary 群とし、 $\mathcal{H}$ の元 A に対して、(5.1) と同じく、 U_t に伴う A の時間発展を A_t とし、 $A = (A_t; t \in \mathbb{R})$ の共分散函数を (5.2) と同じく、 R_A とする。このとき、 R_A は次の様に

表現をさす σ_A を仮定する:

$$(6.1) \quad R_A(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} \sigma_A(d\lambda)$$

ここで、 σ_A は $[-\infty, \infty]$ 上の有界な測度で

$$(6.2) \quad \sigma_A(\{0\}) = 0 \quad \text{と} \quad \int_0^\infty \lambda^2 \sigma_A(d\lambda) < \infty$$

をみたす。

ここで、次の定理をまずここで見てみる。

定理 6.1 ($[\alpha, \beta, \delta]$ -Laguerre 方程式)

四つ組 $[\alpha, \beta, \delta, W]$ の次の性質をもつものが存在する定まる:

$$(6.3) \quad A_t - A_s = \int_s^t (-\beta A_z + \int_{-\infty}^0 A_{z+u} \delta(u) du) dz + \alpha (W_t - W_s) \quad (s < t)$$

$$(6.4) \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

$$(6.5) \quad \delta(s) = \int_0^\infty e^{s\lambda} \mu(d\lambda), \quad \mu \text{ は } \mu(\{0\}) = 0 \text{ をみたす測度}$$

$$(6.6) \quad \beta \geq \int_{-\infty}^0 \delta(s) ds \quad (= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \mu(d\lambda))$$

$$(6.7) \quad W = (W_t; t \in \mathbb{R}) \text{ の } W_t \text{ は } \mathcal{H} \text{ の元で}$$

$$(i) \quad \|W_t - W_s\|^2 = |t - s|$$

(ii) 各 $t \in \mathbb{R}$ に對し、 $A_s (s \leq t)$ の $\mathcal{H}$ の中で生成する閉部分空間 $= W_{s_1} - W_{s_2} (s_1, s_2 \leq t)$ の $\mathcal{H}$ の中で生成する閉部分空間。

注意 6.1 §4 の述べた如く、 T - 正値性をもつとき、
(4.8), (4.9))

shift operator の γ による unitary 群に對しは、 $\mathcal{H}^0$ の元 $A \in$

初期状態にとれば (6.1) は成り立つ。さらに (6.2) が成り立つための条件は、

$$(6.8) \quad A \in \mathcal{Q}(H), \quad e^{-tH} A \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

である。

注意 6.2 方程式 (6.3) と $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Laguerre 方程式 とは 2 つに等しい。

$[\alpha, \beta, \gamma]$ -Laguerre 方程式に対する 運動散逸定理を述べた。すなわち

定理 6.2 (一般化した Einstein の関係式)

$$(6.9) \quad \boxed{\frac{\alpha^2}{2} = (A, A) C_{\beta, \gamma}}$$

と 2 つ、 $C_{\beta, \gamma}$ は 2 つ定まる：

$$(6.10) \quad \boxed{C_{\beta, \gamma} = \pi \left(\int_{\mathbb{R}} |\beta - i\gamma - f(s)|^{-2} ds \right)^{-1}}$$

この $C_{\beta, \gamma}$ は 一般化した抵抗 と呼ぶこともできる。

$C_{\beta, \gamma}$, β , γ の間には、次の不等式が成り立つ。

定理 6.3

$$(i) \quad (0 \leq) \beta - \int_{-\infty}^0 f(s) ds \leq C_{\beta, \gamma} \leq \beta$$

$$(ii) \quad (i) \text{ のうち } \leq \text{ が等号が成り立つ } \iff \gamma = 0$$

$$(\text{note } C_{\beta, 0} = \beta)$$

久保型の第一種運動散逸定理に関連して、

定理 6.4 なる定数 c が存在し,

$$(6.11) \quad \frac{1}{\beta - c\beta - f(\beta)} = c \int_0^\infty e^{c\beta t} R_A(t) dt \quad (\beta \in \mathbb{C}^+)$$

$$\iff f = 0$$

この意味するところは、 $[\alpha, \beta, f]$ -Laguerre 方程式に対して、久保型の第一種揺動散逸定理が成り立つのは、遅くかた時間限ることである。しかし、 $[\alpha, \beta, f]$ -Laguerre 方程式に対しては、この型の第一種揺動散逸定理が成り立つ

定理 6.5 (一般化した第一種揺動散逸定理)

$$(6.12) \quad \frac{1}{\beta - c\beta - f(\beta)} = 2\pi \frac{h(\beta)}{\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\epsilon\lambda} h(\lambda) d\lambda} \quad (\beta \in \mathbb{C}^+)$$

ここで、 $h = h_A$ は R_A のスペクトル密度 Δ_A の outer 函数で、 $\beta \in \mathbb{C}^+$ に対して、

$$(6.13) \quad h(\beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\lambda\beta}{\lambda-\beta} \frac{\log \Delta_A(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda\right)$$

と定義した。

注意 6.3 (6.12) で定まる outer 函数は、 $\mathbb{C}^+$ 上正則で、正則函数で、

$$(6.14) \quad \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |h(\lambda+iy)|^2 d\lambda < \infty$$

を満たす。極限値 $\lim_{y \downarrow 0} h(\lambda+iy)$ と $h(\lambda)$ が一致し、

$$(6.15) \quad \Delta(\lambda) = |h(\lambda)|^2, \quad \overline{h(\lambda)} = h(-\lambda)$$

が成り立つ。共分散行列 R_A , スパーク度 Δ_A , 連続行列 h_A はかくの如く関作に対応している。

最後に、三つ組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ を具体的に (6.1) a σ_A から求める公式を得ることができた。

定理 6.6 (三つ組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ の公式)

$$(i) \quad \alpha = (2 \int_0^\infty \lambda^2 \sigma_A(d\lambda))^{\frac{1}{2}}$$

$$(ii) \quad \beta = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\int_0^\infty \frac{\eta^3}{(\eta^2 + \xi^2)^3} \sigma_A(d\eta)}{\int_0^\infty \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \sigma_A(d\eta)} \right\} d\xi$$

$$(iii) \quad \int_0^\infty e^{\lambda s} H(s) ds = \beta + \lambda - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta}{\lambda^2 + \xi^2} \log \left(\frac{1}{\pi \int_0^\infty \frac{\eta^3}{\eta^2 + \xi^2} \sigma_A(d\eta)} \right) d\xi \right\} \quad (\lambda > 0)$$

§7 久保の問題

§3, §4 と §6 の結果を用いて、§2 に述べた久保の問題「定常マルコフ過程に對する擾動散逸定理を求めること」に答えることにする。 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_t, \mathcal{P}_x; t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}^1)$ を一次元拡散過程で生成作用素が (2.1) で与えられたものとする。 $a(x), b(x)$ は連続函数とし、 $a(x)$ は正值とする。 m 測度 $m(dx)$ を (3.1) で定義し、 $m(\mathbb{R})$ の有限性を仮定し、(3.3) をも仮定する。このとき、(3.2) の P_0 をマルコフ過程の初期分布にとることにすると、path space $W_{\mathbb{R}}$

$=\{\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ 上に、(3.5) をみたす確率測度 P が唯一に
 定まり、 $X = (X_t, P; t \in \mathbb{R})$ ($X_t(\omega) = \omega(t)$ 座標写像)
 は定常マルコフ過程となる。さて、§3の後半(7頁)、§4の
 後半(10頁)と §6の注意6.1 により、初期状態 A は
 $f_0(X_0) = X_0$ ($f_0(x) = x$) とおけるから、次の条件

$$(7.1) \quad f_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

$$(7.2) \quad P_t f_0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

により P_t はマルコフ過程 X の半群

が成り立つ。§6の結果からすべて成り立つ。よって

$A_t = U_t(X_0) = X_t$ のことはいふにかえりこむことにする。

[\alpha, \beta, \gamma]-Langevin 方程式 (2.2) とこれに対する一般化した
Einstein の関係式 (2.7) が、それぞれ、定理6.1と定理6.2より
 得られる。

今迄に課した条件をみたす a, b として、

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & m(\mathbb{R}) < \infty \quad (m \text{ は (3.1) で定義された測度}) \\ \text{(ii)} & \int_{(-\infty, 0)} \left(\int_y^0 dm(x) \right) e^{-B(y)} dy = \int_{(0, \infty)} \left(\int_0^y dm(x) \right) e^{-B(y)} dy = \infty \\ & \quad (B(y) \text{ は (3.4) で定義されたもの: } B(y) = \int_0^y \frac{b(x)}{a(x)} dx) \\ \text{(iii)} & \int_{\mathbb{R}} (x^2 + b(x)^2) m(dx) < \infty \\ \text{(iv)} & \int_{\mathbb{R}} x m(dx) = 0 \end{array} \right.$$

特に、

$$(7.4) \quad b(x) = a'(x) - v^{-1}x a(x) \quad (v > 0)$$

のときは、(3.1) で定義した m 測度は、

$$(7.5) \quad m(dx) = \frac{1}{a(0)} e^{-\frac{x^2}{2v}} dx$$

と Gauss 測度となり、(7.3) をみたす λ には、

$$(7.6) \quad \begin{cases} \text{(ii)} & \int_{(-\infty, 0)} \frac{-x}{a(x)} dx = \int_{(0, \infty)} \frac{x}{a(x)} dx = \infty \\ \text{(iii)} & \int_{\mathbb{R}} (a(x)^2 + a'(x)^2) e^{-\frac{x^2}{2v}} dx < \infty \end{cases}$$

が成り立つ。充分である。

§8 T-正値性 と $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Langevin 方程式

今迄、述べたことにより、§6の結果が基本である。左から、

これは (6.1) の R_A を共分散函数にもつ実数値の正規定常過程 X_A を考え、 X_A のみたす確率微分方程式、これに対する揺動散逸定理を示すことに帰着される。

$X = (X_t; t \in \mathbb{R})$ を実数値の正規定常過程とし、その共分散函数 R が、(6.1) と (6.2) の如く、次の様に表現されることを示す。

$$(8.1) \quad R(t) = \int_0^\infty e^{-t|\lambda|} \sigma(d\lambda)$$

$$(8.2) \quad \sigma(\{0\}) = 0 \quad \text{と} \quad \int_0^\infty \lambda^2 \sigma(d\lambda) < \infty$$

このとき、 X (あるいは R) の スペクトル密度 $\Delta(\xi)$ は

$$(8.3) \quad \Delta(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} \sigma(d\lambda)$$

で与えられる。 Δ は Hardy weight i.e.

$$(8.4) \quad \frac{\log \Delta(\lambda)}{1 + \lambda^2} \in L^1$$

をみたすので、(6.13) によって、 Δ の outer 函数 $h(\xi)$ が定義できる。(6.14) をみたす h は H^2 の元であり、 L^2 の意味で定数への極限值が定まり、(6.15) が成り立つ。 h の Fourier 変換を E とする:

$$(8.5) \quad E(t) = \chi_{(0, \infty)}(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} h(\xi) d\xi \quad (t \in \mathbb{R})$$

さらに、Karhunen の標準表現定理によつて、一次元のブラウノ運動 $B = (B_t; t \in \mathbb{R})$ が唯一に定まり、

$$(8.6) \quad X_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t E(t-s) dB_s$$

(8.7) 各 $t \in \mathbb{R}$ に對し、 $X_s (s \leq t)$ の $L^2(P)$ の中で生成する閉部分空間 $= B_{s_1} - B_{s_2} (s_1, s_2 \leq t)$ の $L^2(P)$ の中で生成する閉部分空間

が成り立つ。

outer 函数 h の表現定理として、次の定理を示すことができて、これが基本的である。

定理 8.1 $\exists$ 組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ が存在して、

$$(8.8) \quad h(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta - iz - f(z)} \quad (z \in \mathbb{C}^+)$$

222.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (8.9) & \alpha > 0, \beta > 0 \\ (8.10) & \gamma(t) = \chi_{(\omega, \infty)}(t) \int_0^\infty e^{t\lambda} \mu(d\lambda), \quad \mu \text{ は } \mu(\{0\}) = 0 \text{ なる} \\ & \text{測度} \\ (8.11) & \beta \geq \int_{-\infty}^0 \gamma(t) dt \quad (= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \mu(d\lambda)) \end{array} \right.$$

さらに、かかる $\exists$ 組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ は 唯一とつてある。

定理 8.1 の 逆 — 構成定理 — として、

定理 8.2 $\exists$ 組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ を (8.9), (8.10) と

$$(8.11)' \quad \beta > \int_{-\infty}^0 \gamma(t) dt$$

とみたすものが与えられたとき、(8.8) で定義される h はある有界な測度 σ (唯一) によって (8.3) で表現されるスペクトル密度 Δ の outer 函数となり、 Δ の Fourier 変換 R は (8.1) と表現され、(8.2) も成り立つ。

————— < 〇 > —————

(8.8) を用いて、 X の標準表現 (8.6) と (8.7) にあるものは ブラウン運動 B を random force として、 X の時間発展を記述する確率微分方程式を次の形に導くことができる。

定理 8.3 $s < t$ に對して.

$$(8.12) \quad X_t - X_s = \int_s^t (-\beta X_z + \int_{-\infty}^0 X_{z+u} f(u) du) dz + \alpha (B_t - B_s)$$

この方程式を $[\alpha, \beta, f]$ -Langevin 方程式 と名付けた.

これは、標準的に、

$$(8.13) \quad X_t' = -\beta X_t + \int_{-\infty}^0 X_{t+u} f(u) du + \alpha B_t'$$

とかけたが、前の方程式 (5.4) と比較すると、 $[\alpha, \beta, f]$ -Langevin 方程式の擾動項は $\alpha B_t'$ で、このスペクトルは u を δ white であり、前の方程式 (5.4) に対する擾動散逸定理 (5.9) は成り立たない。

<0>

$[\alpha, \beta, f]$ -Langevin 方程式に対する一般化した Einstein の関係式 (6.9) (定理 6.1) は、(8.8) と (6.15) より、

$$\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\beta - i\zeta - f(\zeta)|^{-2} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \Delta(\zeta) d\zeta = R(0)$$

これは (6.9) と一致する。

さらに、一般化した第一種擾動散逸定理 (6.12) (定理 6.5)

は、やはり、(8.8) より、

$$\frac{1}{\beta - i\zeta - f(\zeta)} = 2\pi \frac{h(\zeta)}{\sqrt{2\pi} \alpha}$$

であったから、次のように置き換えることができる：

$$(8.14) \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_R e^{-\epsilon \lambda} h(\lambda) d\lambda = \sqrt{2\pi} \alpha$$

2本は、(8.5) により、

$$(8.15) \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} E(t) = \sqrt{2\pi} \alpha$$

を示すことと他方がある。(8.12)の両辺に、 $B_t - B_s$ をかけ平均すると、標準表現(8.6)に注意して、($0 < s < t$)

$$\begin{aligned} \int_s^t E(u) du &= \int_s^t \left(-\beta \int_s^u E(v) dv + \int_{(-\infty, 0)} \left(\int_s^u E(z+v) dv \right) J(z) dz \right) \\ &\quad \cdot du + \sqrt{2\pi} \alpha (t-s) \end{aligned}$$

t により微分して($s=0 < u$)

$$E(t) = -\beta \int_0^t E(v) dv + \int_{(-\infty, 0)} \left(\int_0^t E(v+v) dv \right) J(v) dv + \sqrt{2\pi} \alpha$$

を得る。 $t \downarrow 0$ とし(8.5)がえす。

最後に、久保の問題に答える際の重要な公式：定理 6.6(ii)

を示しておく。こゝに於いて、標準表現の大事な(8.7)が使われる。(8.12) ($0 = s < t$ とし)の両辺に X_0 をかけ平均すると、

(8.6)と(8.7)より、 $\forall t > 0$

$$R(t) = R(0) + \int_0^t \left(-\beta R(s) + \int_{(-\infty, 0)} R(s+u) J(u) du \right) ds$$

t により微分して、

$$R'(t) = -\beta R(t) + \int_{(-\infty, 0)} R(t+u) J(u) du$$

$t < u$ 、 $t \downarrow 0$ とし、

$$(8.16) \quad R'(0+) = -\beta R(0) + \int_{(-\infty, 0)} R(u) J(u) du.$$

一方、伊藤の公式と $[\alpha, \beta, J]$ -Langevin equation (8.12) に適用して (8.8)より適用可能)、 $\forall t > 0$

$$X_t^2 - X_0^2 = \int_0^t (-2\beta X_s^2 + 2X_s \int_{(u,0)} X_{s+u} J(u) du + \alpha^2) ds \\ + 2\alpha \int_0^t X_s dB_s$$

X の定常性に注意して、上式を平均すると、

$$\int_0^t (-2\beta R(0) + 2 \int_{(u,0)} R(u) J(u) du + \alpha^2) ds = 0$$

従って、 t に同じ微分係数 (かつ $t > 0$)

$$\alpha^2 = -2\beta R(0) + 2 \int_{(u,0)} R(u) J(u) du$$

これと (8.16) を合わせ、定理 6.6 (1) を得ることにできる。

§9 Fokker-Planck 方程式と一般化した Einstein の関係式

$[\alpha, \beta, J]$ -Langevin 方程式 (8.12) の定常解 X (状態 x) の Fokker-Planck equation を求めよう。このことは容易に計算できる。

$$(9.1) \quad P(X_t \in dy | X_s = x) = P(t-s, x, y) dy \quad (s < t)$$

$$(9.2) \quad p(t, x, y) = g(R(t) - \frac{R(t)}{R(0)}, y - \frac{R(t)}{R(0)} x)$$

ここで、 $g(t, y)$ は標準正規分布である。

$$(9.3) \quad g(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$$

従って、backward equation は

$$(9.4) \quad \boxed{\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - b(t) x \frac{\partial p}{\partial x}}$$

ここで、

$$(9.5) \quad a(t) = - \frac{R(0)R'(t)}{R(t)}$$

$$(9.6) \quad b(t) = - \frac{R'(t)}{R(t)}$$

4つ、(9.5)と(9.6)より

$$(9.7) \quad \boxed{a(t) = R(0)b(t) \quad (\forall t > 0)}$$

一方、(9.2)より $R(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ に注意して (8.1)と(8.2)

$$(9.8) \quad \boxed{p(t, x, y) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} q(R(0), y)}$$

2つ (9.7)と(9.8)より、Fokker-Planck eq (9.4) に対する一般化した

大 Einstein の関係式 を導くことができた。さすれば、面白

いことに、(9.7)の $t \rightarrow 0$ の極限から、 $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Langevin 方程式

(8.12)に對する一般化した大 Einstein の関係式 (6.9) を得る

ことができる、即ち

$$(9.9) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \frac{\alpha^2}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} b(t) = C_{\beta, \gamma} \end{cases}$$

が成り立つことがわかった。これは、物理的には何を意味するのがあるのか。

§10 T-正値性と RL 回路系

(6.10)で定義した一般化した抵抗 $C_{\beta, \gamma}$ の意味

を調べるために、(6.2) (a.8.21) の σ が有限個の N 個の τ と考えられた。また、定理 8-1 で定めた三組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ の一つは、

$$(10.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0, \quad f(t) = X_{(-\infty, 0)}(t) \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n e^{\rho_n t} \\ \beta > \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu_n}{\rho_n} \end{array} \right. \quad (\mu_n > 0, \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{N-1})$$

で与えられる。

① 内の右半平面にある正則な関数 $Z(s)$ と

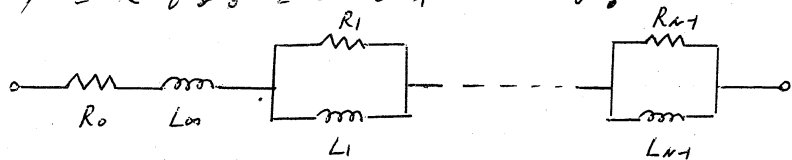
$$(10.2) \quad Z(s) = \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} h(s) \right\}^{-1} \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

で定義すると、(8.8) と (10.1) より、

$$(10.3) \quad Z(s) = R_0 + s + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu_n s}{\rho_n (s + \rho_n)}$$

$$(10.4) \quad R_0 = \beta - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu_n}{\rho_n}$$

が成り立つ。また、(10.2) から、この RL 回路網のイミピーダンスは $Z(s)$ と等しい：

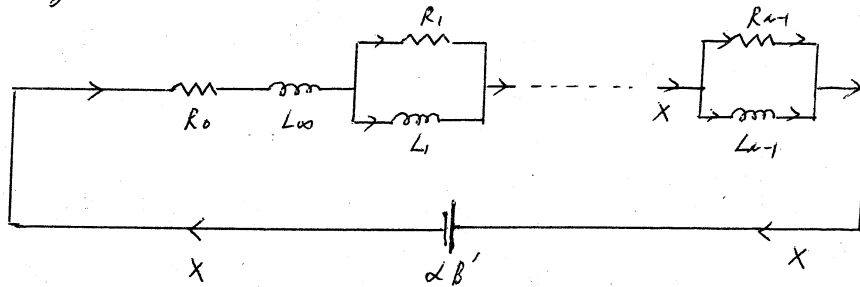


$$L_0 = 1, \quad L_n = \frac{\mu_n}{\rho_n^2}, \quad R_n = \frac{\mu_n}{\rho_n} \quad (1 \leq n \leq N-1)$$

さらに、この回路網の抵抗の両端に熱雑音が発生し、回路網全体にわたる電圧の起電力として、 $\alpha \beta'$ 分の white noise が発生したと考えたと、この回路に

流れる電流 x は、Kirchhoff の電圧則に適用して求め
 ることができるが、定は、2a とおいて成り立つ方程式は、

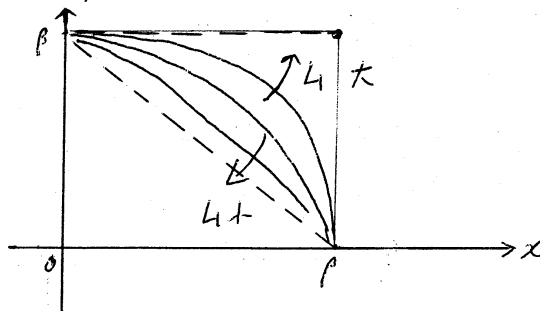
$[\alpha, \beta, \delta]$ -Lagrange 方程式 (8-12) に他方から x とおいた。



2a とおいて、 $C_{\beta, \delta}$ の導出と上の熱平衡の発生した
 回路網を通して調べてみる。一般性を失うことなく、 $N=2$
 とする。 $R_0 + R_1 = \beta$ は一定とし、 R_1 は 0 から β の間で動く
 変数 x とおいて、 L_1 は正数全体で動く x の関数としてみる。
 $C_{\beta, \delta}$ は x の函数としてあらわすことに、(10.10) と (10.11) より、

$$(10.5) \quad C_{\beta, \delta} = \beta - \frac{x^2}{x^2 + L_1(\beta - x)} \quad (0 < x < \beta)$$

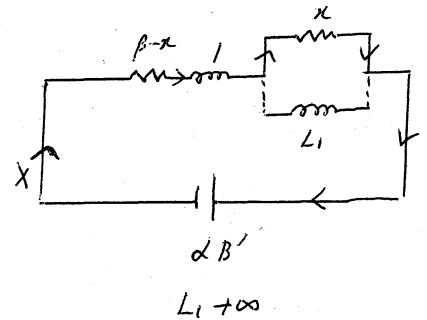
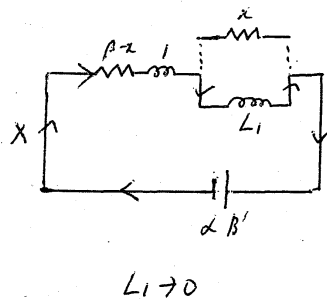
となる。従って、 $C_{\beta, \delta}$ のグラフは、



となり、固定した L_1 に対しては、曲線となり、極端な
 場合として、

$$(10.6) \quad \begin{cases} \lim_{L \rightarrow 0} C_{\beta, \gamma} = \beta - \gamma & (0 < \gamma < \beta) \\ \lim_{L \rightarrow \infty} C_{\beta, \gamma} = \beta & (0 < \gamma < \beta) \end{cases}$$

が成り立つ。 $C_{\beta, \gamma}$ のグラフは、前図の上半分に示してある。このことは、一般化定理 6.3 の (i) にすぎない。この (10.6) は、次の図の様に考えれば、 $L \rightarrow 0$ の $L \rightarrow \infty$ の場合、一般化した抵抗 $C_{\beta, \gamma}$ は、通常の抵抗に近づき、一般化した Einstein の関係式 (6.9) は、Nyquist の関係式に近づくことが納得される。



§ 11 おわりに

この論文の主要な振動散逸定理は、T-正値性に関するものであるが、左に、 $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Langevin 方程式は、(8.9), (8.10), (8.11) のみならず三組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ に限らず T-正値性をもつための条件が与えられている場合もあり、とくに、多重ランダム性をもつ可微分方程式確率過程に対して、その定常状態を記述する方程式として、 $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Langevin 方程式が与え

水了。このことは、森氏の連分数展開の理論と関係が、
有限回の森氏の筆算で先へ進めなれば、その最後の極限
力のオオチオ程式が、我々の $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Laguerre オ程式で
好。

予測の問題 へおんこも、 $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Laguerre オ程式は
重要へ御ま、予測の誤差を表現する換置数が、三組 $[\alpha, \beta, \gamma]$
の関連して定まる非線形 (22) の (Racah type の) 微分
積分オ程式をオオチとがわかる。このオ程式の解の一意性が
調べる必要があるが、予測の誤差を評価するプログラムが
ええ水了 ことなる。

有限次元への拡張 は、多端子回路網、多次元
拡散過程に計る Omega の相反定理と関連して大事と
思われ、現在研究中である。

無限次元への拡張 は 有限次元のときと同じく、この枠
組は、§4 で述べたように、三組 $[\alpha, \beta, \gamma]$ が、好置換
空間上の非線形汎関数となり、この公理は定理 6.6 で述べ
るが、 $[\alpha, \beta, \gamma]$ -Laguerre オ程式を導出して、如何なる構造
を調べる ことかである。今後の課題である。

参考文献

- [1] R. Kubo, Statistical mechanical theory of irreversible processes I, general theory and simple applications to magnetic and conduction problems.
J. Phys. Soc. Japan 12 (1957), 507-586
- [2] H. Mori, Transport, collective motion and Brownian motion, Progr. Theor. Phys. 33 (1965), 423-455
- [3] R. Kubo, The fluctuation-dissipation theorem, Reports on Progress in Physics. 29 (1966), 255-284
- [4] 阿部盛和・久保亮五 編, 統計物理学
(岩波現代物理学の基礎) 5 (1972)
- [5] Y. Okabe, On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with T -positivity and the fluctuation-dissipation theorem,
to appear in J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. IA 28 (1981)
- [6] Y. Okabe, On a T -positivity, $[L, \beta, H]$ -Langevin equation and Fluctuation-Dissipation Theorem,
to appear in The Third Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 1981.