

Fundamental Principle について

東大 理 金子 晃

§ 0. 序

$p(D)u = f$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\tilde{u} = \int e^{ix\xi} u(x) dx$
等は, すべて hyperfunction 学派と同様の記号法に従う.
もちろん定数係数の話である.

定数係数の同次常微分方程式の解が, 指数函数・多項式の
解の一次結合で尽くされるというのけさの話である. 偏微分
方程式でも, $p(\alpha) = 0$ なる α に対し $e^{i\alpha x}$ は $p(D)u = 0$ の解
だから, 解はいくらでも作ることができる. $T = T^*$, 可べりの
解がこれら^{*}の一次結合, つまり α に関するある測度による積
分として表示されるかどうかについては Ehrenpreis [1] 又
は Palamodov [7] 以前にははっきりと言明し $T = \text{ものはいな}$
かつ $T =$. その理由はまあよく, Schwartz 以前には線型位相
空間論が今日のように普及していなかつたために, 同次解の
*) p が重複因子を持つときはその分だけ多項式が必要になることは, 常微分の場合
と同様である.

全体などというものを考える人がいなかったことにもあるの
 であろう。この事実（指数函数表示）は、その証明の割に
 は厳密に証明するのがむずかしく、そこにやはり Ehrenpreis
 の名を掛けるに足るほどの重みがある。もっともこの“原理”
 は、それ以前の Hörmander や Malgrange の頭の中にも漠
 然と入っていたようで、彼等の仕事に於ける指数函数解の巧
 みな使用法を見れば、そのことが推測できる。Ehrenpreis
 [1] は、指数函数表示を用いて彼等の頭の中に隠れていた巧
 みさを、露骨に暴いて見せたのである。

一方、1950年代の後半から、定数係数偏微分方程式では
 優決定系の可解性が問題となり始めた。優決定系の可解性を
 小松先生がその講義録[4]に整理された形で説明すれば次の
 ようになる： ϕ の転置行列 ϕ' に対し、その kernel を表現する
 行列 q をとる。即ち次のような多項式加群の完全列をとる。

$$\mathcal{P}^s \xleftarrow{\phi'} \mathcal{P}^t \xleftarrow{q} \mathcal{P}^{t_2}$$

このとき、微分方程式 ϕ' を連続写像として許すような函数空
 間 Φ に対し、方程式 $\phi(D): \Phi^s \rightarrow \Phi^t$ の可解性を次のような
 形で問題にする。即ち、次の列は完全になるか？

$$\Phi^s \xrightarrow{\phi(D)} \Phi^t \xrightarrow{q(D)} \Phi^{t_2}$$

$v \in \Phi^t$ に対し $\phi(D)u = v$ とする $u \in \Phi^s$ があるとすれば当然

$q(D)v = 0$ であるから、 $\phi(D)$ の可解性をこのように $\ker q(D)$ の

中だけで考えるのは自然である。^{*} (この問題が最初に精密に解かれたのは $\Phi = \mathcal{E}(\Omega)$, Ω は $\mathbb{R}^n$ の凸閉集合の場合で, Malgrange [5] による。) さて Φ の双対空間 Φ' は一般にコンパクトな台をもつ函数の空間になる。(これが絶対に必要だとは云わないが、少なくとも Φ の方がコンパクトな台をもつときは, 上は exact にならないのが普通である。) もしも Φ と Φ' との間に closed range theorem が成り立つものと仮定すれば, 次の列が完全 (閉値域) であることを示せばよい。

$$\Phi'^{\beta} \xleftarrow{p(-D)} \Phi'^{\tau} \xleftarrow{q(-D)} \Phi'^{\tau_2}$$

これを Fourier 変換すれば, 結局次のような整函数の空間の掛け算作用素の列が完全 (閉値域) であることを示せばよい。

$$\widetilde{\Phi}'^{\beta} \xleftarrow{p'} \widetilde{\Phi}'^{\tau} \xleftarrow{q'} \widetilde{\Phi}'^{\tau_2}$$

これに要するに、ある増大度をもつ整函数の列ベクトルが、ある条件の下に多項式行列でわり切れるかどうかという問題であり、次のようにして解かれる。

a. (Cohomology with bounds) $\mathbb{C}^n$ において $\widetilde{\Phi}'$ -type の増大度を持つ整函数の cohomology が消えること。

(① resolution によるもの, ② Čech によるもの)

b. (division) 多項式行列 q による (① C^∞ -函数の大域的な, ② 正則函数の局所的な) 割り算

^{*}) $q(D)$ は compatibility system と呼ばれる。

①の方法 (C^∞ -函数で割り商を作り, 後で正則函数に取り替える) は Malgrange [5]-[6] にあり, ②の方法 (局所的に商を作り, Čech でつなぐ) は Hörmander [3] にある。
(後者は Ehrenpreis のをやき直したもののかも知れない。)

方程式系に関する以上二つの問題の根底にある“原理”を暴露したのが Ehrenpreis [1] の所謂 Fundamental principle である。彼は整函数の間の掛け算作用素 $p: \mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^t$ の核を $\mathbb{C}^n$ のある subvarieties 上の正則函数の完備な空間として実現することを考えた。

$$\mathcal{H}^s \xrightarrow{p} \mathcal{H}^t \xrightarrow{d} \mathcal{H}^{t_2} \rightarrow 0$$

先に示した列 $\widetilde{\mathcal{H}}^s \xleftarrow{p(s)} \widetilde{\mathcal{H}}^t \xleftarrow{q(s)} \widetilde{\mathcal{H}}^{t_2}$ が閉値域写像の完全列になることは写像 d の作り方から直ちに読みとれる。こうして存在定理は Fundamental principle に帰着される。^{*} それほどばかりではない。この Fundamental principle を用いて最初に述べた同次方程式の解の指数函数表示が得られ, それを用いて, hypoellipticity, ellipticity 等の regularity 及び解の接続可能性に関する定理が面白いようにあらあらと出てくるのである。

Fundamental principle の証明は報告 [1] に, 長くかつ複雑なのをここで述べることはできないという注意書き

^{*} §2 に示おりに実は Fundamental principle と存在定理とは閉値域定理などを媒介せず, もっと primitive に結びついている。

の後に短いスラッシュがあるだけで、しばらく神秘的なペールに
 包まれていた。彼がその時を人として説明を持っていたのか
 どうかについては、あやしい節がある。というのは [1] で彼
 は、上に述べた作用素 d が定数係数の微分作用素と、varieties
 への制限写像との合成で与えられると述べているが、その後
 Palamodov の他により、多項式係数にしなければならぬ
 ということが示されたからである。ともあれ大した間違いで
 はなく、^{*} だが Palamodov の本 [8] が、それについて最近には
 Ehrenpreis 自身の本 [2] があつて Fundamental principle
 の全貌が明になり、同時に定数係数線型偏微分方程式論も一
 段落を迎えることとなった。ここでは Palamodov による証
 明を概観し、hyperfunction の場合に関する注意を述べ、
 最後にその証明の簡易化の希望について述べることにする。

§1. Fundamental Principle の証明

まず Fundamental Principle を Palamodov に従つて
 精密に formulate しよう。 $p: \mathcal{P}^s \rightarrow \mathcal{P}^t$ を与えらば t は多項
 式行列とする。部分加群 $p\mathcal{P}^s \subset \mathcal{P}^t$ の、準素加群への分解を

$$p\mathcal{P}^s = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_\ell \subset \mathcal{P}^t$$

と可る。 p が単独多項式で $p = p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ がその既約分解のとき

^{*}) Palamodov にとつては大きなことだつて思われる。

すなわち、上の分解は

$$p\mathcal{P}^S = p_1^{k_1}\mathcal{P}^S \cap \cdots \cap p_k^{k_k}\mathcal{P}^S$$

に相当する。次に一般に $\mathcal{O} = \mathcal{P}^{\mathcal{S}_0} \subset \mathcal{P}^T$ が素加法群のとき、

$$\mathcal{N}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathcal{P}; \exists f^k \mathcal{P}^T \subset \mathcal{O}\} \text{ を } \mathcal{O} \text{ の素因子, } \mathcal{N}(\mathcal{O}) =$$

$= \mathcal{N}(\mathcal{N}(\mathcal{O}))$ を $\mathcal{O}$ の null variety とすると、 $\mathcal{H}$ を正則函数

芽の sheaf とし、 $\mathcal{H}^{\mathcal{S}_0} \xrightarrow{f} \mathcal{H}^T$ の cokernel は $\mathcal{N}(\mathcal{O})$ に support

をもつ sheaf になる。($\mathcal{N}(\mathcal{O})$ の外では容易にわかるように

f は onto である。) これを粗く云って $\mathcal{N}(\mathcal{O})$ 上の正則函数

芽の sheaf を表わすことを考える。

定義*) 微分作用素系 $\partial_f = \partial(z, D)$, $D = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, は

I. 多項式係数である。

II, $\mathcal{N}(\mathcal{O}) \supsetneq N_*$ (真部分多様体) が存在し, $\forall z \in N \setminus N_*$

に於て $\varphi \in \mathcal{H}_z^T$ に対する次の条件が同値になる。

$$\varphi \in f\mathcal{H}_z^{\mathcal{S}_0} \iff \partial(z, D)\varphi|_{N_z} \equiv 0$$

[III. $\partial(z, D)$ は N の適当に定められた座標系**) に対し normal
な方向の微分しか含まない。]

の条件を満たすとき f に同伴する [正規] ネーター作用素という。

すると、各点の germ に対し

$$\mathcal{H}^{\mathcal{S}_0} \xrightarrow{f} \mathcal{H}^T \xrightarrow{\partial_f|_N} \text{Im } \partial_f|_N \longrightarrow 0$$

*) [8] ch. 4 §4

**) N は "正規化" してあるとする。

という完全列ができる。これを global にすることを考えよう。今 $\mathcal{H}_M$ を、ある増大度とそれに対応する位相とを与えられ、 Γ : 整函数の線型位相空間とする。これに対し、 $N(\mathcal{O})$ 上の正則函数の column で、各点に於けるその germ が $\text{Im } \partial_g$ に入り、かつ $\mathcal{H}_M$ と同種の増大度を持つものを考え、これに $\mathcal{H}_M$ と同種のセミノルム系で位相を入れ、 Γ も $\mathcal{H}_M\{g, \partial_g\}$ とする。Fundamental principle は

$$\mathcal{H}_M^{s_0} \xrightarrow{g} \mathcal{H}_M^T \xrightarrow{d_g} \mathcal{H}_M\{g, \partial_g\} \longrightarrow 0$$

なる列^{*)}が完全であることを主張するものである。準素 p 対し一般の p に対しては、その各準素成分に対してこの考察を適用することにより

$$\mathcal{H}_M^s \xrightarrow{p} \mathcal{H}_M^t \xrightarrow{d} \mathcal{H}_M\{p, d\} \longrightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$\prod_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{H}_M\{p_i, \partial_{p_i}\}$$

なる列の完全なることを主張する。この証明としては、

- ① Noether 作用素 $\partial(z, D)$ が存在すること。② d が homomorphism であること (或は、 $\mathcal{H}_M\{p, d\}$ が closed なこと)
- ③ 真中が exact なこと。の三つが主要なところである。

Palamodov [8] は ① の代数的構成にあたる部分、② の証明の Γ への線型位相空間論、及び ③ の証明に於ける cohomology with bounds の消滅 (local な部分と global な部分) と

*) d_g は ∂_g を施した後、 $N(g)$ へ制限する写像である。

を、すべて平行して self contained に証明してゆくので、
それらを分解して筋道を理解するのには骨が折れる。ここまでは
ある程度それらを分解し説明することを試みよう。もとより誤解
の可能性は御容赦願いたい。

I) (preparation theorem) まず形式的冪級数環
 $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\eta]$ に於いて、多項式の行列 p による割り算を考える。^{*}
即ち、 $p: \mathcal{S}^s \rightarrow \mathcal{S}^t$ に対して

$$\text{id}_{\mathcal{S}^t} = \mathcal{Q}(z) + p(z+\eta) \mathcal{G}(z)$$

なる分解 (p -分解という) を、 $p \mathcal{G}$ 及び $\mathcal{Q}$ がそれぞれ $\text{Im } p$
及びその直和補空間への射影作用素となるように作る。 p が
単独多項式のときには、 p による割り算 q 、 $\mathcal{G}(z)$ がその商、
 $\mathcal{Q}(z)$ がその余りになる。このようになら $\mathcal{G}$ 、 $\mathcal{Q}$ を各点 z に対して
に作るのには簡単だが、考えている germ の中心の点 z に対
し $\mathcal{Q}$ 、 $\mathcal{G}$ の各係数^{**} が z の有理函数であるように依存するよ
うなものを作り出す。これには $\mathbb{C}^n$ 全体で一度に作ることは不
可能で、 $\mathbb{C}^n$ の代数的分割 $\mathbb{C}^n = N_0 \cup \dots \cup N_\omega = \phi$ を適当に導
入すると各 N_ν 、 $N_{\nu+1}$ の上では可能になる。これは $\mathbb{C}$ 上の線型
代数を用いて、下の方から初等的に作ってゆく。この際帰納
法を進めるための方程式を解くのだが、maximal rank の

^{*}) [8] ch 2.

^{**}) $\mathcal{Q}$ 、 $\mathcal{G}$ 等は $\mathcal{S}$ の自然な位相での連続作用素で、従って $\mathcal{Q} = \sum \eta^i \mathcal{Q}_i$ 、
 $\mathcal{G}_i = \sum_{\text{finite}} d_i^j \eta^j \mathcal{G}_i$ の形をしている。

小行列をとり 出可位置を標準的に定める手続きが重要な点となる。上に述べた代数的分割は、証明の途中に出てくる行列の rank が一定な集合への分割として得られる。証明はやや長いが初等的なもので、この以上の内容を要約するのにはむずかしい。

さて、こゝで canonical に $\mathcal{Q}$, $\mathcal{E}_j$ を作ってみると、これらは収束級数環 $\mathcal{H}$ の上の作用素ともみられ、掛け算作用素 $p: \mathcal{H}_z^s \rightarrow \mathcal{H}_z^r$ に応ずる分割

$$id_{\mathcal{H}^r} = \mathcal{Q}(z) + p(z+\eta) \mathcal{E}_j(z)$$

をも与える。このことは $\mathcal{Q}$, $\mathcal{E}_j$ の係数の評価からわかる。同時に $\mathcal{Q}(z)$, $\mathcal{E}_j(z)$ のノルムも計算できるのである。

作用素 $\mathcal{Q}(z)$ の最初の有限項を用いて、後に Normal mother 作用素が作られる。また、 $\mathcal{Q}(z)$ は、整函数の空間に於ける掛け算作用素中の Image を記述するための "pre-mother 作用素" として重要な役を演ずる。

II) 次に cohomology with bounds の消滅を証明する。^{*} 各点 $z \in \mathbb{C}^n$ を中心とし半径が ε (一定) の球より成る $\mathbb{C}^n$ の被覆 $\{\cup_\varepsilon(z); z \in \mathbb{C}^n\}$ を初等被覆という。この上に与えられる正則函数の ν -cochain が、 $\mathcal{H}_\mu$ と同様の増大度を持つとき、 $\mathcal{H}_\mu$ -type の ν -cochain といつて、 $\varepsilon \downarrow 0$ のとき α と

^{*}) [8] ch.3, §2-4

(帰納極限) を ${}^v\mathcal{F}L_M$ で表わす。すると与えられた $\mathcal{F}L_M$ に対し次の列が exact になる。

$$0 \rightarrow \mathcal{F}L_M \xrightarrow{\delta} {}^0\mathcal{F}L_M \xrightarrow{\delta} {}^1\mathcal{F}L_M \rightarrow \dots$$

これに対する証明法は種々あるが、どれを使ってもかまわない。ちなみに Palamodov は $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}$ という微分作用素の存在定理から、可微分函数に対する cohomology with bounds の消滅を利用して次々に正則性を増すという方法で証明している。

Ⅲ) Ⅰ)で作った割り算の定理から、増大度を持った整函数の割り算の定理を導く。^{*} もちろん一遍には出来ないのだから、次のような順序で進む。

a) まず cochain を割る。即ち $[{}^v\mathcal{F}L_M]^s \xrightarrow{p} [{}^v\mathcal{F}L_M]^t \cap \ker \partial \rightarrow 0$ exact ($v \geq 0$) を示す。

b) 次に所望の $[\mathcal{F}L_M]^s \xrightarrow{p} [\mathcal{F}L_M]^t \cap \ker \partial \rightarrow 0$ を出す。

a) から b) を出すのは横に p の free resolution, 縦に Čech cohomology をとって又可換図式に Weil の補題を適用すればよい。ここで縦が exact であるところには Ⅱ) の

cohomology with bounds が基本的に使われる。横の方は先にも注意したように $\mathcal{F}_v$ に対する ∂_v について $\ker \mathcal{F}_{v-1} = \ker \partial_v$ だから、a) の結果により一番下をのぞき exact である。この図を一口で説明すれば、与えられた整函数で、

^{*}) [8] ch.3, §5

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow \mathcal{P}^{s_n} \xrightarrow{g_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{P}^{s_0} \xrightarrow{g_0} \mathcal{P}^s \xrightarrow{p} \mathcal{P}^t & \text{is } p \text{ a free resolution} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 \longrightarrow [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^{s_n} \xrightarrow{g_n} \cdots \longrightarrow [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^s \xrightarrow{p} [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^t \cap \ker \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \\
\uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow \\
0 \longrightarrow [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^{s_n} \xrightarrow{g_n} \cdots \longrightarrow [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^s \xrightarrow{p} [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^t \cap \ker \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \\
\delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow \\
0 \longrightarrow [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^{s_n} \xrightarrow{g_n} \cdots \xrightarrow{g_0} [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^s \xrightarrow{p} [\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}]^t \cap \ker \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

局所的に割り切れる条件を満たしているもの (即ち $\ker \mathcal{Q}$ に入っているもの) に対し, 一度には割り切れないが, 各点の十分小さい近傍で割れるならば, 商を集めたものは 0-cochain になるから, cohomology の消滅を利用してうまく修正してやるとつながって整函数としての商が得られるというわけである. 次に (A) を出すのが結構面倒である. ^{*} 必ずかしこ点は次の二つである. ① 商としての ν -cochain が全体として $\mathcal{F}\ell_{\mathcal{U}_6}$ の増大度を持つようにすること. ② $\mathcal{Q}$ の作り方から, local な商の存在する領域の半径は, 遠方へ多項式の次数の order で減少する可能性がある. それを通常の半径一定の初等被覆上の cochain に修正しなければならない. この二つの手続きは一度に行われるが local な cohomology の消滅だけに関係し, 整函数の族とは直接の関係はない. 長くなるので

*) §5, 2°-7°

で詳細は略す。

これに近いのは pre-Fundamental principle とも云うべきものが証明できただけで、Malgrange [5] 程度の解析的ではこれと十分間に合う。しかし本当の Fundamental principle はこれからが大変である。

IV) 正規ネーター作用素の存在証明^{*}) これには次の M. Noether の定理が基礎になる。(Noether 作用素の名前の由来もここにある。): $p\mathcal{P}^S \subset \mathcal{P}^T$ を零次元加群とあるとき、 $f \in \mathcal{P}^T$ が $f \in \mathcal{P}^S$ となるためには各点で $f \in p\mathcal{P}^S \bmod \mathcal{M}^{k+1}$ となることが必要十分である。 k は適当な定数。これに我々の割り算定理 I) を適用すれば、この場合剰余を表わす作用素 ϕ は実は始めの有限項 (次数 $\leq k$) しかないことがわかるから、その係数の ϕ の ϕ の ϕ に於いて、含まれる δ 函数を対応する微分でおき換えたものを並べると、この全体が頂度 Noether 作用素の役を果たすことになる。そこで一般の準素加群の場合にはまず最後の $n-h$ 変数が正規パラメータとなるように正規化しておく。 $Z = (z_1, \dots, z_h, \overbrace{z_{h+1}, \dots, z_n}^{n-h})$, $n-h = \dim N(p)$ である。ところで I) で説明した除法の公式は掛け算作用素 $\phi = \phi(z+\eta)$ を変数 η の数が n 個より少ない形式的冪級数環に働かせた場合にも成立する。 $Z+\eta = (z_1+\eta_1, \dots$

^{*}) [8] ch. 4, §3

..., $z_k + \eta_k, z_{k+1}, \dots, z_n$), 後の $n-k$ 変数 $T: T$ のパラメータになる。実際 Palamodov はこの一般な場合に対して p -分解を証明しており, この一般化は少しも難しさを増すものではない。さて, このような p -分解に対して $N(p)$ の normal 方向の切り口を考えると, ここでは零次元の場合と同様の考察により剰余を表わす作用素 $\mathcal{Q}^h$ は有限項しかないこと, 従ってその係数を並べて Noether 作用素 $d(z, D)$ を作ることができる。 $\mathcal{Q}^h$ は I) で述べたように, $\mathbb{C}^n = N_0 \supset \dots \supset N_w = \phi$ となる代数的分解の各切片 $N_\nu, N_{\nu+1}$ の上で有理函数を係数としているから, $N_\nu \supset N(p), N_{\nu+1} \not\supset N(p)$ なる ν を選べば $N(p) \setminus N_{\nu+1}$ に於いて $d(z, D)$ は有理函数係数, 従って分母を払えば, 多項式係数の Noether 作用素が得られたことになる。^{*}

V) 基本不等式^{**} III) で $\mathcal{Q}^h$ について証明した結果を Noether 作用素 $d(z, D)$ に関与するものに移した^{***}。その基本となる手続きが次の不等式の証明である。

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{\frac{1}{2}} r(z) \sup_{\xi} \{ |d(z, D) \varphi(z)|, |\xi| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} r(z) \} \\ & \leq \sup_z \{ |d(z, D) \varphi(z)|, z \in N \cap (Z + U_\varepsilon), \rho(z, L) \geq \varepsilon^{\frac{1}{2}} r(z) \} \end{aligned}$$

^{*}) 今得た d は少くとも多項式に対して Noether 作用素の役を果たす。これが $\mathcal{Q}^h$ に対しても正しく Noether 作用素となっているかどうかは, 次の V) に於ける不等式を用い, $\mathcal{Q}^h$ を媒介として証明される。(もちろん直接にもわかる。例として GAGA 参照)

^{**}) [8] ch. 4, §3

^{***}) これは全くの局所理論であって, 整函数の族とは関係ない。

つまり、各点 z に於いて、その近傍に於ける $\Delta \varphi$ の値が、同じく z の近傍で $N(p)$ の上の部分に於ける $d(z, D) \varphi$ の値の $\cup p$ でおさえられるという定理である。 N 上の真部分代数多様体 L から適当に離れたいところ T で $\cup p$ をとればいいというのは、帰納法のための細かな technique に属する。証明の大体的方針をいおう。 Δ と $d(z, D)$ の違いは文字かについて Δ は全変数を含む収束級数環上の作用素であるのに、 $d(z, D)$ 、或いはこれのもとになつた $T = \Delta^k$ は、法線方向の主変数しか含まないことである。そこでこれら二つの作用素の間に橋を掛けるため、変数の足りない一つの p -分解から $N(p)$ の接線方向の変数を一つ増やした p -分解を作る操作を考える。接線方向の変数は割れるかどうかにはあまり関係しないので、この操作は新しく増やされる変数に関する identity operator をもとの operator に tensor 積し、これを Neumann 級数でちゃんとしめる T でわりと容易に行われる。こうして作った作用素を間にはさんで先の不等式を帰納法で証明するのである。ここが Palamodov の証明の全行程中で最も深遠、かつ煩雑なところである。

VI) 以上の準備の下に基本定理

$$[\mathcal{H}_M]^S \xrightarrow{p} [\mathcal{H}_M]^T \xrightarrow{d} \mathcal{H}_M \{p, d\} \rightarrow 0 \quad \text{exact}$$

を証明する。^{*}) 要するに $[\mathcal{H}_M]^T / p[\mathcal{H}_M]^S \leftarrow \mathcal{H}_M \{p, d\}$ と

^{*}) [8] ch. 4, §5

いう逆作用素を作ればよいのである。定義により $\mathcal{F}_{\text{loc}}\{p, d\}$ の元は局所的には $\mathbb{C}^n$ 上の正則函数に d を施したものの $N(p)$ 上への制限になっている。故に $|\text{local}|$ は逆対応が作れる。そこでまず例として 0 -cochain として逆対応元を求め、次に cohomology を解いて global 対応を作ればよい。

a) その線に沿って、まず

$$\mathcal{Z}_{\text{loc}}(p) = \ker \left\{ [\mathcal{F}_{\text{loc}}]^x / [\mathcal{F}_{\text{loc}}]^x \cap \ker \mathcal{Q} \xrightarrow{\delta} [\mathcal{F}_{\text{loc}}]^x / [\mathcal{F}_{\text{loc}}]^x \cap \ker \mathcal{Q} \right\}$$

と置き、同型 $d: \mathcal{Z}_{\text{loc}}(p) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}}\{p, d\}$ を証明する。

$\mathcal{Z}_{\text{loc}}(p) \ni \Phi = \{\varphi_Z\}$ を代表元とすると

$$d: \Phi \longrightarrow \{f^\wedge = d^\wedge(z, D) \varphi_Z(z)|_{N_\lambda} \mid \lambda=0, \dots, e\}$$

は Φ の条件から各 variety N_λ 上で一意につけがり、 N_λ 上の正則函数を定める。しかも $f^\wedge$ は Cauchy の積分公式で簡単にノルムを評価することができ、これが $\mathcal{F}_{\text{loc}}\{p, d\}$ に入ることに、及び対応の連続性がわかる。 d が injective なることは定義から殆ど明である。問題は逆対応を作るところである。 $f = \{f^\wedge\}$ を $\mathcal{F}_{\text{loc}}\{p, d\}$ の任意の元とする。初等被覆 $\{U_Z\}$ を一つ定め、これの上に逆対応の元である cochain を構成しよう。各 Z に対し、定義から U_Z 上の十分小さな初等被覆をとれば、その上の 0 -cochain F で $dF = f$ となるものがある。あとは III の a) で言及した cohomology の

局所理論から， F を適当な評価を満たすものに置き換えればよい。その詳細も略す。

b) 今得た同型から基本定理を証明するに可換図式を一つ書けばよい。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} \cap \ker \partial & \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} & \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} / [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} \cap \ker \partial & \rightarrow 0 \\
 & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & \\
 0 \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} \cap \ker \partial & \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} & \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} / [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} \cap \ker \partial & \rightarrow 0 \\
 & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & & \delta \uparrow & \\
 0 \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} \cap \ker \partial & \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} & \rightarrow & [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} / [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} \cap \ker \partial & \rightarrow 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

先にはⅢで注意したようにこの一番左列は exact，従って一番右が exact だから a) より

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0} \{p, d\} \cong \Sigma_{\mathcal{L}_0}(p) = [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} / [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} \cap \ker \partial \cong [\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau} / p[\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0}]^{\tau}$$

ここにⅢ)の結果を使えばこれは正しい。以上で

Fundamental Principle が証明されたのである。

§2. Fundamental Principle の応用

次に Fundamental Principle の応用として指数型表現及び system の存在定理について述べよう。

まず指数型表現について，今 $\mathfrak{H} = \mathcal{E}(\Omega)$ ， $\mathcal{F}_{\mathcal{L}_0} = \widetilde{\mathcal{E}(\Omega)}$ を念頭にあげば， $p'(-D)$ に対し Fundamental Principle

$$\mathcal{H}_\mu^s / p(\zeta) \mathcal{H}_\mu^t \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_\mu \{ p(\zeta), d \}$$

が証明されたい。さて $p(D)u = 0$ なる $u \in E(\Omega)$ に対しその Fourier 変換 $\hat{u}$ は、特に $\mathcal{H}_\mu^s / p(\zeta) \mathcal{H}_\mu^t$ 上の連続線型汎函数とみなせるから、従って $\mathcal{H}_\mu \{ p(\zeta), d \}$ 上の連続線型汎函数とみなせ、そのあるセミノルムについて連続になる。例へは Hahn-Banach の定理により、同じ増大度の supremum norm をもつ $N(p)$ 上の連続函数の空間 $\mathcal{N}(p)$ 上の連続線型汎函数とみなせる。Riesz の定理によれば、そのようでもあるある測度で書けるから、今 $\forall \varphi \in E(\Omega)$ に対し、

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle \hat{u}, \tilde{\varphi} \rangle = \int_{N(p)} d(\zeta, \frac{\partial}{\partial \zeta}) \tilde{\varphi} d\mu = \left\langle \int_{N(p)} d'(\zeta, i\alpha) e^{i\zeta x} d\mu(\zeta), \varphi \right\rangle$$

$$\therefore u = \int_{N(p)} d'(\zeta, i\alpha) e^{i\zeta x} d\mu(\zeta)$$

この積分は $E(\Omega)$ の位相で収束することゝ容易に確かめられる。

次に system 1 に対する存在定理の Fundamental Principle の証明法については、まず次の初等的な命題 (Palamodov [8]) に注意する (ch. 4, §4, Proposition 2)。

命題 $\mathcal{P}^s \xrightarrow{p} \mathcal{P}^t \xrightarrow{r} \mathcal{P}^v$ を $\mathcal{P}$ -加群の完全列とする ($p \neq 0$)。

このとき $p\mathcal{P}^s \subset \mathcal{P}^t$ は n 次元の準素部分加群であり、同伴する多様体 $\mathbb{C}^n$ に対し、掛け算作用素 $Y(Z)$ を Noether 作用素として採用することができる。

さて, $\Phi^s \xrightarrow{p(D)} \Phi^r \xrightarrow{q(D)} \Phi^{r_2}$ が完全なことを示す (存在定理)

の1に, 完全列 $\mathcal{D}^s \xleftarrow{p'} \mathcal{D}^r \xleftarrow{q'} \mathcal{D}^{r_2}$ による命題を適用する。

$q(D)f = 0$ ならば $f \in \Phi^r$ 以上1に述べた $T = \{ \} \cup \{ \}$ に指数型表現されるから, $\mathcal{N}(q') = \mathbb{C}^n$, $d = p'$ とできるから

$$\begin{aligned} f &= \int_{\mathbb{C}^n} p(\xi) e^{i\xi x} d\mu(\xi) \\ &= p(D) \int_{\mathbb{C}^n} e^{i\xi x} d\mu(\xi) \end{aligned}$$

故に, $u = \int_{\mathbb{C}^n} e^{i\xi x} d\mu(\xi) \in \Phi^s$ は求める解である。ここで閉値域定理を使わずに T の点に注目し値を取る。その代わりに u があらかじめ与えられた $T = \Omega$ 全体に於ける解である T ためには, Ω の測度 μ が Ω 全体で収束しないといけないから, その T に対する位相が重みをもった supremum norm の射影系として与えられていることが必要である。 $\mathcal{E}'(\Omega)$ の場合には通常の帰納極限位相と同値な射影系の位相をわりと容易に与えることができる。 Fundamental Principle を用いてその他の空間; 例えば $\mathcal{Q}(\Omega)$ に於いて, 存在定理を証明しようとするところの辺が主要な努力になる。(c.f. Palamodov [9])

§3 その他

次に実解析函数及び hyperfunction の場合に少しく事情を考察してみよう。まず凸コンパクト集合 K 上の実解析函

数 $\mathcal{O}(K)$ 及びその双対 $\mathcal{B}[K]$ に対しては Fundamental Principle が成立する。([12]) 従って K 上では実解析的解の存在定理が成立し、また K 上の同次方程式の実解析的解は増大度のよりより定まった測度による積分で指数型表現される。しかし凸開集合 Ω の場合には、即ち Ehrenpreis が [13] において $\mathcal{O}(R')$ の位相で通常知られているものに対しては、その dual の Fourier 変換を増大度を持つ l -supremum norm の射影系として表現することができないことを示している。 $\mathcal{O}(\Omega)$ に於ける存在定理は、小松先生も指摘しているように閉値域定理の方法を拡張するのはむずかしい、一方 Fundamental Principle もダメだというわけである。しかし最近 Palamodov [10] が Mittag-Leffler 式の逐次解近似定理のかなり本質的な仕事を発表しており、これを用いれば $\mathcal{O}(K)$ の Fundamental Principle から射影極限に移って存在定理を証明することもあるいは可能かもしれない。

次に hyperfunction $\mathcal{B}(\Omega)$ に対しては位相が考えられないので上記の考察は一切不可能である。しかし cohomological な表現法を作ることには可能で、その心理的背景は、次のように位相的に説明される。

$\mathcal{B}(\Omega)$ の双対空間がもしもあるとすればそれはコンパクト

なるものをもつ実解析函数の空間 $\mathcal{O}_*(\Omega)$ であろう。その Fourier 変換 $\widetilde{\mathcal{O}_*(\Omega)}$ は、種々の根拠から

$$|J(z)u(z)| \leq C_J \exp H_K(z), \quad \forall K \subset \Omega, \forall J$$

なる増大度をもつ entire function の空間と考えられる。(こゝに $J(z)$ は entire infra-exponential function c.f. [11]) さて、 $\mathbb{C}^n$ の球状コンパクト化 $D = \mathbb{C}^n \cup S_{\infty}^{2n-1}$ の上に定義された正則函数芽の層 (無限遠点に於ける芽は上記の増大度をもつ正則函数の帰納極限で定義する。) を考えると、上に述べた $\widetilde{\mathcal{O}_*(\Omega)}$ の元はこの global section とも云うべきものであるが、残念ながら Fragmen-Lindelöf の定理によりそのようなものは 0 以外に存在しない。しかし、例えば楕円型多項式 p に対し、その零点 q の多様体 $N(p)$ 上には非-trivial τ -section が実際存在し、一定の意味をもつ (c.f. [11])。一般にも、 $\mathbb{C}^n$ の適当な被覆を考えると、その各元の上には section が存在する。次に dual に移ってこのことを言い直せば、

$$\int e^{-H_K(z)} / (1 + |J(z)|) |\mu| < \infty \quad \forall K \subset \Omega, \forall J$$

なる total measure をもつ μ に対し τ は entire function $\neq 0$ の積分は決して収束しない。しかし $\mathbb{C}^n$ の適当な被覆を考えると、その各元の上の上記の増大度をもつ正則函

数についてはその積分は収束し，特に整函数 $e^{-iz\zeta}$ を被覆
 の各元に制限したものの積分は，その正則函数より成る
 Čech cohomology の元を定める。これが一般の hyper-
 function の Fundamental Principle 的表現であり，
 特に μ とし support が $N = \{p(\zeta) = 0\}$ に含まれるもの
 をとれば， $p(D)u = 0$ の hyperfunction solution
 u の指数型表現が得られる。

これについての正確なことは別の機会にゆずる。

文 献

- [1] Ehrenpreis, L. A fundamental principle for
 systems of linear differential equations with constant
 coefficients. Proc. Int. Symp. on linear spaces,
 Jerusalem, 1960
- [2] Ehrenpreis, L. Fourier Analysis in Several Complex
 Variables, Wiley-Interscience, 1970
- [3] Hörmander, L. An Introduction to Complex Analysis
 in Several Variables, Princeton, 1966
- [4] Komatsu, H. 佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式，東大セ
 ミナール 22, 1968
- [5] Malgrange, B. Sur les systèmes différentiels a

coefficients constants, Séminaire Bourbaki, 1962/3

No. 246 exp. 8

[6] Malgrange, B. Division des distributions I-IV,

Séminaire Schwartz, Paris, 1959/60 exp. 21-25

[7] Palamodov, V.P. On the general look of solutions of
linear differential equations with constant coefficients,

Doklady, Acad. Nauk. 137 No. 4, (1961) 774-777

[8] Palamodov, V.P. Linear Differential Operators with
Constant Coefficients, Moscow Nauka. 1967

(英訳 Springer 1970, 邦訳 吉岡書店近刊)

[9] Palamodov, V.P. Remarks on exponential representations
of solutions of differential equations with constant

coefficients, Mat. Sbornik 75(118) No. 3 (1968)

417-434

[10] Palamodov, V.P. Functor of projectiv limit in the category
of topological linear spaces, Mat. Sb. (1968), 567-603

[11] Kaneko, A. On continuation of regular solutions of partial
differential equations to compact convex sets

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA 17-3 (1970) (to appear)

[12] Kaneko, A. 同II (to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.
Sec IA)

- [13] Ehrenpreis, L. Solutions of some problems of division IV. Am. J. Math. 82, 522-588 (1960)