

Drach-Vessiot 理論について

熊本大学・理 梅村 浩

Hiroshi Umemura

代数方程式の Galois 理論を見て、類似の理論を微分方程式について確立することと Lie (1842-1899) は夢めた。解析学で必要な理論は本質的に無限次元であるが、有限次元の通常の Lie 群論から作り始めなければならなかった。Lie 全集 7 巻の中に、無限次元に関する論文は決して多くない。

Picard は線型常微分方程式についての Galois 理論を作った (19 世紀の終り頃)。この理論は現在 Picard-Vessiot 理論と呼ばれてゐる。しかし、この理論は有限次元の場合であつて、Lie の目標とした一般論から見れば、極めて特別な場合である。Lie の野心的な夢を最初に実現しようとしたのは、J. Drach の学位論文 (1898) である。彼は、この理論の発展を生涯の仕事とした。しかし彼の論文には、不十分な定義、不完全な証明が多く、非常に魅力はあるが、疑わしい印象を与えることは否めない。

一方 Painlevé は彼の発見したカノ方程式の既約性の証明は Drach 理論を使ってできると主張した (1903)。Painlevé は Drach 理論の欠陥を知っていたようなので、Painlevé が

Drach 理論を使^{既約性の}った厳密な証明を得ていたのか疑わしい。
 Drach 理論は当時、一般に受け入れられてはいなかったが、
 それが正しいことと近い将来万人に認められるようになるこ
 とを Painlevé は信じていた。

しかし以下に見るように、そうはならなかった。Vessiot
 は 1904 年から始まる仕事で、Drach の理論を完全にやるのと
 目標にした。その最初の 3 部作は、学士院の大賞 (grand
 prix des sciences) に輝いている。しかし彼の仕事は省みられ
 ることなく、Vessiot の名前は、彼にと、不本意なことに、
 有限次元の場合である Picard-Vessiot 理論に残っているにす
 ぎない。なお 1915 年に Drach は彼の Galois 理論を使^て
 (従って厳密に) Painlevé の第 1 方程式の Galois 群を計
 算することによって、その既約性を証明している。

Painlevé の方程式の既約性については、既に二つの異なる証
 明がある。Painlevé が期待したように無限次元微分
 Galois 理論に基づくもの証明があるのか極めて興味深い。
 その証明のために、まず Vessiot の仕事の分析から始めよ
 うと思った。その結果、定式化には問題が少しはあるが、
 Vessiot の仕事は、ほぼ正しいことが判明した。ただし、そ
 れが有用であるか、例えば Painlevé 方程式の既約性の証明に
 使えるかは、まだわからず。我々の成果の一部をここに報

をす。

§1 代数拡大の Galois 理論と, Picard-Vessiot 理論

L/K を体の Galois 拡大とする。この条件は $\text{Spec } L / \text{Spec } K$
_{reducedな}
 がある K -群スキーム G の主等質空間であると言い換えるこ
 ともできる。又, 拡大体 L/K の $\bar{K}/K$ への埋め込み全体
 $\text{Hom}_K(L, \bar{K})$ が $\text{Aut}_K \bar{K}$ の主等質空間であるとも言える($\bar{K}$ は K の代数的閉包を表す)。

定理(代数拡大の Galois 理論) L/K を Galois 拡大とす
 る。次の2つの集合の間に包含関係を逆にした1:1対応が
 ある。

- (1) L/K の中間体。
- (2) 群 $\text{Aut}_K L$ の部分群。

中間体 M には部分群 $\{g \in \text{Aut}_K L \mid g \text{ は } M$
 の元をすべて固定する $\}$ を, 部分群 H には中間体 $\{x \in L \mid x \text{ は } H$
 の任意の元で固定される $\}$ を対応させる。

次に Picard-Vessiot 理論を説明する。

一般的に説明はしなかりことにして, D を $\mathbb{C}$ の領域とする。
 K を D 上の有理型関数からなる体であって微分で閉じている

ものとする. $K(D)$ を D 上の有理型関数全体からなる体とする. $K(D)$ は微分で閉じている. 簡単のため K は定数関数全体 $\mathbb{C}$ を含んでいるものとする. $A = (a_{ij}) \in GL_m(K(D))$ とする. A の各成分を微分して得られる行列 (a'_{ij}) を A' で表わす. $A'A^{-1} = F \in M_m(K)$ と仮定する. つまり A は K -係数の線型常微分方程式の解であるとする. このとき, $L = K(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} / K$ を K の GL_m -原始拡大であると言う.

定理 (Picard-Vessiot 理論) L/K を GL_m -原始拡大とする. このとき $G = \{ B = (b_{ij}) \in GL_m(\mathbb{C}) \mid a_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \}$ は微分体 L/K の K -自己同型を引き起す } とおくと, G は $\mathbb{C}$ 上定義された代数群となる (実際, G は $GL_m(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$ -代数部分群である). さらに, 次の集合の間に包含関係を逆にした 1:1 対応が存在する.

(1) L/K の微分中間体 (= 中間体であって微分で閉じているもの).

(2) 代数群 G の $\mathbb{C}$ -代数部分群.

対応のさせ方は, 代数拡大の Galois 理論の場合と同様である. さらに, Ω/K を微分万有体, $\mathbb{C}$ をその定数体とすると $\text{Hom}_K(L, \Omega)$ は $G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = (G \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C})(\mathbb{C})$ の主等質空間である.

ることが証明できる。又 L/K が $G_K = G \otimes_{\mathbb{Q}} K$ のある主等質空間のモデルとなることも証明できる。

§2 Drach 理論

代数常微分方程式 $y^{(n)} = F(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$ を考える。ここで F は、ある領域 $D(\mathbb{C})$ 上の有理型関数を係数とする $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ の有理式 (x は $\mathbb{C}$ の座標、微分は x に関する微分をあらわす)。

常微分方程式 $y^{(n)} = F(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$ の Galois 理論はこの常微分方程式の才積分の満たす線型偏微分方程式 $\frac{\partial z}{\partial x} + y' \frac{\partial z}{\partial y} + \dots + F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial z}{\partial y^{(n-1)}} = 0$ の Galois 理論と同等でありと考えられる (この主張は何ら論理的な意味を持たない)。従って、線型偏微分方程式の微分 Galois 理論を作ることと考える。

$D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ を領域とし、 $t, t_1, \dots, t_n$ をその座標を与える関数とする。 K は D 上有理型の関数から成る体であって、 K は定数関数全体 $\mathbb{C}$ を含み、かつ偏微分 $\partial/\partial t, \partial/\partial t_1, \dots, \partial/\partial t_n$ に関して閉じていると仮定する。 $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ として、線型偏微分方程式

$$1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial t_n} \right) z = 0$$

を考察する。

$z_1, z_2, \dots, z_n$ を (I) の独立な解とする。つまり, z_i ($1 \leq i \leq n$) は (I) の解であり, $D(z_1, z_2, \dots, z_n) / D(t_1, t_2, \dots, t_n) \neq 0$. さて, $u_1, u_2, \dots, u_m$ を (II) の独立な解とすれば, 座標変換 $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ が存在して,

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ (2) \quad u_2 &= \varphi_2(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &\vdots \\ u_m &= \varphi_m(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{aligned}$$

となる。

言い換れば, (II) の解全体は座標変換全体のなす Lie pseudo-group の主等質空間になつており, §1 に上げた二つの例と似たような状況にある。ただし, §1 の例では一つの解から他の解へ, 有理式に移れるのに対して, この場合は中級数になつており, ここから多くの困難が生じる (§1 の最初の例では根の置換であり, 2 番目の例では線型変換である)。

$z_1, z_2, \dots, z_n$ に K 上微分関係式があれば, Φ として微分関係式を保つもののみを考える。この様にして, (II) の Galois 群が定義されると Drach は考えた。この考え方には次のような問題点がある。

(i) 解 $z_1, z_2, \dots, z_n$ として canonical なとり方がなり, そのような解をとっているのが, はっきりしない。

(ii) 座標変換が Lie pseudo-group⁶⁾であり, Φ の定義域が, きり定義に關して §2 参照

りしなり.

Vessiot は(1)を次の様に改善した.

(1)の独立な解 $z_1, z_2, \dots, z_n$ を一つ固定する. (1)の Galois 群ではなくて, 微分体 $L = K(z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \frac{dz_1}{dz_2}, \frac{dz_2}{dz_3}, \dots)$ / K の Galois 群が定義できる. つまり, Galois 群は方程式 K のみによって決まるのではなく, その独立な解のとり方にも依存する概念である.

Vessiot の考えを以下に説明する.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ が正則である点 $T = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in D$ が存在して $z_1(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1, z_2(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) = t_2, \dots, z_n(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) = t_n$ が任意の $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n) \in D$ について成立するとき, 独立な解 $z_1, z_2, \dots, z_n$ は主であるという.

これを $\mathcal{L}$ の

近傍で有理型な関数の全体からなる微分体とする. 自然な K -埋め込み

$$L \rightarrow \mathcal{L}$$

により, $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ の微分部分体とみなせる.

1904年の Vessiot の論文は次のことを主張してゐるようである.

(a) $\text{Hom}_K(L, \mathcal{L})$ は Lie pseudo-group の主等質空間である (ここで Hom_K は微分体の K -準同型全体を表わす).

(b) $K = \{x \in L \mid \text{任意の } \varphi \in G \text{ に対し, } \varphi(x) = x\}$
である。

(a) に より 少し説明を加えると, $\Phi \in \text{Hom}_K(L, L)$ とすれば,
 Φ は $z_1, z_2, \dots, z_n$ の像 $\Phi(z_1), \Phi(z_2), \dots, \Phi(z_n)$ で決まってしまう。
従って (b) のように, 座標変換 $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ で

$$\Phi(z_1) = \varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$\Phi(z_2) = \varphi_2(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$\vdots$$

$$\Phi(z_n) = \varphi_n(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

となるものが決まる。この座標変換全体が, 合成および逆変換をとることにより, 2 関じられることを主張する。

ここでも Drazn の問題点の (ii), つまり座標変換の定義域の問題は常に残る。

(b) は次の例を見るように, テリケートである。

例 $m=1$, 微分方程式 $\partial z / \partial t = 0$ を考える。 $z = z_1$
 $= P(t_1)$ とする, $K = \mathbb{C}(t, t_1) \langle \partial^2 z / \partial t_1^2 \rangle$, $L = \mathbb{C}(t, t_1) \langle z \rangle$
とおく, ここで $\langle a \rangle$ は a および, その微分を付加することとを
意味するものとする。さて $\text{cl. d. } [L:K] = \infty$ である (注意, $P(t_1)$
は $\mathbb{C}(t_1)$ と自明であり, しかる微分方程式も満たない)。と
 $T = (t_0, t_1)$ を固定しておき, T の近傍で有理型である関数の芽
全体のなす微分体を $\tilde{L}$ とおく。自然な埋め込み $L \rightarrow \tilde{L}$ があ

3. $\dim [L:k] = 4$. L の k -埋め込み $\alpha \mapsto \alpha + f(t)$
 ($f(t)$ は t の多項式であって, その次数は 3 以下) で与えら
 れる。従って, $\text{Hom}_k(L, L)$ は 4 次元ある。一方, 一変数の
 変数変換全体に含まれる有限次元 Lie 群の次元は, 3 次元以下
 である。したがって, $\text{Hom}_k(L, L)$ は Lie pseudo-group
 の主等式空間に等しい。

§2 Lie pseudo-group

変数変換に関する微分方程式系が与えられており, 次の条
 件を満たすとき, Lie pseudo-group であるという。

(1) f, g が解であり, $f \circ g$ が定義されれば $f \circ g$ も解であ
 る。

(2) f が解であれば, 逆変換も解である。

例 1. $y'' = 0$. 解 $y = ax + b$.

2. $y^{(3)}/y' - \frac{3}{2}(y''/y')^2 = 0$. 解 $y = (ax+b)/(cx+d)$.

3. 2変数. $\partial y_1 / \partial x_1 = 1, \partial y_1 / \partial x_2 = 0, \partial y_2 / \partial x_2 = 0$.

解 $y_1 = x_1 + a, y_2 = x_2 + f(x_1)$.

4. n -変数, $\partial(y_1, y_2, \dots, y_n) / \partial(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$.

例 1, 2 では定義域がはきりしてはいるが, 3, 4 では合成
 9

を考えると、定義域の問題が生じる。

これを避けるため、我々は次の様に考える。

K を標数 0 の体とする。 $C(K)$ を完備、局所 K -代数 (A, m, K) (即ち $A/m = K$) のカテゴリ-とする。次の functor G を考える。

$$G: C(K) \rightarrow (\text{集合}) (= \text{集合のカテゴリ-}).$$

$$A \mapsto \{ \varphi \in A[[x]] \mid \varphi \equiv x \pmod{m} \}$$

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad \psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \in G(A)$$

$$\text{とする。合成関数 } \varphi \circ \psi(x) = (a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3 + \dots)$$

$$+ (a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + 3a_3 b_0^2 b_1 + \dots)x + \dots$$

$\in G(A)$ が定まる。注意を要するが、逆写像も定まり、 G は群 functor となる。

$K[[x]]$ -係数の常微分方程式 $F(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$ があり

その解が、群 functor の部分群 functor H となるとき、 H を Lie pseudo-group functor とよぶ。

functor $F: C(K) \rightarrow (\text{集合})$ を $A \mapsto F(A) = m$ と定義すると群 functor H は F に作用する: $a \in m = F(A)$, $\varphi(x) \in H(A) \subset G(A) = A[[x]]$ により、 $\varphi(x)[a] = \varphi(a)$ とおく。

以上、1変数でや、たが、多変数でも同様にできる。この立場から Lie の仕事を全て見なおすのは意味があると思れる。

§3 抽象的設定

$(N, \partial/\partial t, \partial/\partial t_1, \dots, \partial/\partial t_m)$ を偏微分体. 体 N の標数は 0 と仮定する. $K \in N$ の一つの微分部分体とする. $q_1, q_2, \dots, q_n \in K$ とする. 微分方程式

$$(1) \quad (\partial/\partial t + q_1 \partial/\partial t_1 + \dots + q_n \partial/\partial t_n) z = 0$$

を考へる. N の定数体と K の定数体は一致すると仮定する.

簡単のため, $n=1$ と仮定する. $z \in N$ とする (1) の解をとる. $\partial z/\partial t_1 \neq 0$ と仮定する. $L = K\langle z \rangle = K(z, \partial z/\partial t, \partial^2 z/\partial t^2, \dots)$ とおく. さて微分体 K に対し z , y の微分を忘れたことにより得られる抽象体を K^q とおく. かつ $K \rightarrow K^q$ は微分構造を忘れた functor である.

$$\text{Lemma} \quad N \rightarrow N^q[[T, T_1]] \quad z \mapsto \sum_{m, n \geq 0} \frac{1}{m!n!} (\partial^{m+n} z / \partial t^m \partial t_1^n) T^m T_1^n$$

を定義すると, 微分体の埋め込みである. ここで, 中級数環 $N^q[[T, T_1]]$ の微分は $\partial/\partial T, \partial/\partial T_1$ であり, それぞれ $\partial/\partial t, \partial/\partial t_1$ に対応する.

さて, Lemma により, 微分体の埋め込み, $i: L \rightarrow L^q[[T, T_1]]$ を得る.

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & L^q[[T, T_1]] \\ | & & | \\ K & \longrightarrow & K^q[[T, T_1]] \end{array}$$

そこで, $i|K$ を固定する, i の infinitesimal deformation を考え. 即ち, $C(L^q) \rightarrow A$ により,

$X(L/K) = \{ \psi: L \rightarrow A[[T, T_1]] \mid \psi|K = i|K, \text{ 各 } L \xrightarrow{\psi} A[[T, T_1]] \rightarrow L^q[[T, T_1]] \text{ は } i \text{ に等しい, } A[[T, T_1]] \rightarrow L^q[[T, T_1]] \text{ は係数の reduction である} \}$ とおく. これにより functor

$$X(L/K): C(L^q) \rightarrow (\text{集合})$$

が定義される.

$i(z) - z^q \in L^q[[T, T_1]]$ は極大イデアルに入る. 一方, 巾級数 $i(z) - z^q$ の T_1 の係数 $\partial z / \partial t_1 \neq 0$ であるので, $L^q[[T, T_1]] = L^q[[T, i(z) - z^q]]$, $i(z) - z^q = T_1'$ とおけば, $L^q[[T, T_1']]$ では微分方程式 $(\partial/\partial t + q_1 \partial/\partial t_1)z = 0$ は, $(\partial/\partial T_1')i(z) = 0$ となる. 故に $\psi: L \rightarrow A[[T, T_1]]$ は $\varphi(x) \in A[[x]]$ が存在して, $z \mapsto z^q + \varphi(i(z) - z^q)$ で決まる.

定義 上の式で, ^{正則拡大 L/K の定める} functor $X(L/K): C(L^q) \rightarrow (\text{集合})$ が, Lie pseudo-group H の主等質空間となるとき, L/K は automorphic 拡大であるという. H をその Galois 群とよぶ.

次の定理が成り立つ.

定理 L/K を automorphic 拡大とする. $A = \{L \supset M \supset K \mid M \text{ は微分中間体, } L \supset M \text{ は automorphic}\}$, $B = \{G \supset H \mid H \text{ は Lie pseudo-group functor}\}$ とおく. このとき, 写像 $\pi: A \rightarrow B$, $M \mapsto \{g \in G \mid g \text{ は } M \text{ を定める}\}$, は単射である.

注意 L/K が automorphic, $L \supset M \supset K$ を微分体間体, L/M は正則拡大と仮定して, L/M は automorphic とは限らない. Subgroup functor から出発して, 部分体を定め, それから部分群を定義して, t とに戻ると限らない.

例 $K = \mathbb{C}(t, t_1, t_2)$, 微分方程式 $(\partial/\partial t + t_2 \partial/\partial t_1 + 6t_1 \partial/\partial t_2)z = 0$ の解 $z_1 = t_2^2 - 4t_1^3$, $z_2 = (\frac{1}{2})(x - \int \frac{d\eta}{\sqrt{4\eta^3 + 4}})$ を考える. $L = K\langle z_1, z_2 \rangle/K$ は automorphic であり, その Galois 群は, $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2 + f(y_1))$ f は y_1 の任意関数となる.

参考文献

- [1] Drach, J.: Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes, Annales Sci. École Normale Sup. (3), 15 (1898), 243-384.
- [2] Vessiot, E.: Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations, Annales Sci. École Normale sup. (3), 21 (1908), 9-85.
- [3] ——— : Sur une théorie générale de la réductibilité des équations et systèmes d'équations finies ou différentielles,

Ann. Sci. Ecole Normale Sup., (3) 63 (1946), 1-22.

注意 Drach のアイディア P を紹介したところでは、非線型常微分と線型偏微分の同値性の部分が問題であるが、線型偏微分を経由することなく、Kerviel の図の考え方に帰するものと思える。