

高次微分とその応用

福岡教育大学 石橋康徳

R を algebraic variety V/k 上の点の local ring とし. $\Omega_k^1(R)$ を R の k -differentials のなす R -module とする. 簡単のために k は perfect field とする. 次のことはよく知られている.

(1) Y. Nakai [8], E. Kunz [5].

R は regular local ring である. $\Leftrightarrow \Omega_k^1(R)$ は free R -module である.

したがって, $\text{Der}^1(R/k) \cong \text{Hom}_R(\Omega_k^1(R), R)$ を考えると, R が regular ならば, $\text{Der}^1(R/k)$ は free R -module である. この逆について, 次のことが分っている.

(2) J. Lipman [6].

k の標数が 0 のときには, $\text{Der}^1(R/k)$ が R -free ならば, R は normal である. 特に, $\dim V = 1$ ならば, R は regular である.

$\dim V \geq 2$ のときにも, R は regular であるだろうと予想されているが, 未だ解決していない. この予想に関して, 最も良い結果は次のものだろう.

(3) G. Scheja - U. Storch [10].

k の標数が 0 で、 V が hypersurface のときには、 $\text{Der}^1(R/k)$ が R -free ならば、 R は regular である。

ところで、 k の標数が $p > 0$ のときには、 $\dim V = 1$ であっても、 $\text{Der}^1(R/k)$ の R -freeness は R の regularity を意味しない。
[6].

これらに対して、高次微分を使って、 R の regularity を特徴づけられないかと考える。現に、いくつかの結果が得られているが、それらについて述べる前に少し準備をしよう。

k , R を commutative rings とし、 R を k -algebra とする。
 k -linear mapping $D: R \rightarrow R$ が、 n -th order derivation であるとは、 $\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in R$ に対して、

$$D(x_0 x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_{n-1}} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}} D(x_0 \cdots \hat{x}_i \cdots \hat{x}_{i_{n-1}} \cdots x_n)$$

となるときをいう。

$R/k \rightarrow R$ なる n -th order derivations 全体の集合を $\text{Der}^n(R/k)$ と表わすと、 $\text{Der}^n(R/k)$ は、自然に left R -module になる。

次のことが成っている。[9].

$$a) \quad m \geq n \Rightarrow \text{Der}^n(R/k) \subset \text{Der}^m(R/k).$$

$\text{Der}^n(R/k) - \text{Der}^{n-1}(R/k)$ の元を、proper n -th order derivation といい。

$$b) \quad D \in \text{Der}^m(R/k), E \in \text{Der}^n(R/k) \Rightarrow DE \in \text{Der}^{m+n}(R/k).$$

1) 仮定して.

$$\text{Der}(R/k) = R \oplus \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Der}^n(R/k)$$

とおくと、これは $\text{Hom}_k(R, R)$ の subring になる。 $\text{Der}(R/k)$ を R/k の derivation algebra という。一方、 $\text{Der}^1(R/k)$ によって生成される $\text{Der}(R/k)$ の subalgebra を $\text{der}(R/k)$ と表わす。

Y. Nakai の予想.

R を algebraic variety V/k 上の某の local ring とする。 k の標数が 0 ならば、次のことは同値である。

- 1) R は regular である。
- 2) $\text{Der}(R/k) = \text{der}(R/k)$ 。

これに関連して、次のような予想がある。

T. Bloom の予想.

V を analytic space とし、 $p \in V$ とする。 $\text{Diff}(V)$ によって、 V 上の differential operators の sheaf を表わす。この sheaf の某 p における stalk $\text{Diff}_p(V)$ が $\mathcal{O}_p(V)$ -algebra として、 $\text{Der}_p^1(V)$ によって生成されるならば、 V は p で non-singular である。

注意. $\text{Diff}_p(V) = \text{Der}(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$, $\text{Der}_p^1(V) = \text{Der}^1(\mathcal{O}_p(V)/\mathbb{C})$ である。

Y. Nakai の予想について.

1) $\Rightarrow$ 2) は明らかに成立する。問題は 2) $\Rightarrow$ 1) である。今迄のところ、次の結果が得られている。

(4) K.R. Mount - O.E. Villamayor [7].

$\dim V=1$ ならば, Y. Nakai の予想は正しい.

(5) W. Brown [3].

$\text{depth } \mathfrak{f}=1$ なる R の prime ideal については, $\text{ht } \mathfrak{f}=1$ と仮定する. このときには, Y. Nakai の予想は正しい. したがって, R が Macaulay ring ならば, Y. Nakai の予想は正しい.

ところで, 最近 purdue の J. Becker は, T. Bloom の予想を肯定的に解決した. [1].

次に, ground field k の標数が $p > 0$ の場合を考えよう. この場合, Y. Nakai の予想の自然な一般化は次のようになるであろう.

R は regular である. $\Leftrightarrow \text{Der}(R/k)$ は, proper p^i -th order derivations ($i=0,1,2,\dots$) によって生成される.

これに関して, $\dim V=1$ の場合に, いくらか弱い結果を得た. それを述べる前に, higher derivation について説明しよう.

R/k の higher derivation とは, $R \rightarrow R$ なる k -linear mappings の infinite sequence $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$ で, $\forall x, y \in R$ に対して,

$$\delta_n(xy) = \sum_{i=0}^n \delta_i(x) \delta_{n-i}(y) \quad (\forall n)$$

となるものをいう. $\delta_n \in \text{Der}^n(R/k)$ である. [9]. さらに,

$\delta_i \delta_j = \binom{i+j}{i} \delta_{i+j}$ かとみえられるとき, この higher

derivation は iterative であるという。

定理. V は、代数体 k 上定義された algebraic curve とする。 R によって、 V 上の k -rational point の local ring を表わす。 次のことは同値である。

1) R は regular である。

2) R/k の iterative higher derivation で、その components が R -algebra $\text{Der}(R/k)$ を生成するものが存在する。

注意. $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$ を、 R/k の iterative higher derivation とすると、 $\delta_i \delta_j = \binom{i+j}{i} \delta_{i+j}$ だから、その components が、 R -algebra として、 $\text{Der}(R/k)$ を生成する。 $\Leftrightarrow$ その components が、 R -module として、 $\text{Der}(R/k)$ を生成する。

証明. 本質的な部分は、 $2) \Rightarrow 1)$ の証明で、しかも、 k の標数 $p > 0$ の場合である。証明の概略を述べよう。詳細は [4] を参照されたい。 $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$ を、条件をみたす R/k の iterative higher derivation とする。 $R \rightarrow R$ なる high order derivation は continuous だから、 $\{\delta_0=1, \delta_1, \delta_2, \dots\}$ は、一意的に、 $\hat{R}/k$ の higher derivation に延長される。延長したものを同じ記号で表わす。ここに、 $\hat{R}$ は R の completion を表わす。ところで、

$$\text{Der}(\hat{R}/k) \cong \hat{R} \otimes_R \text{Der}(R/k)$$

だから、仮定によって、 $\hat{R}/k$ の任意の high order derivation

は、 $\delta_1, \delta_2, \dots$ の $\hat{R}$ -linear combination である。 $\bar{R}$ (resp. $\hat{\bar{R}}$) によって、 R の商体 (resp. $\hat{R}$ の全商環) における integral closure を表わすと。

$$\hat{\bar{R}} \cong \hat{\bar{R}} \cong k[[t_1]] \oplus \dots \oplus k[[t_n]]$$

である。ここに、 $\hat{\bar{R}}$ は semi-local ring $\bar{R}$ の Jacobson radical による completion である。

$$\partial_i^{(j)}(t_j^m) = \binom{m}{i} t_j^{m-i} \quad (1 \leq j \leq n, i \geq 1)$$

によって定義される $k[[t_j]]$ の i -th order derivation $\partial_i^{(j)}$ を考え。

$$D_i = \partial_i^{(1)} \oplus \dots \oplus \partial_i^{(n)} \quad (i \geq 1)$$

とおく。 $\{D_i\}_{i \geq 1}$ は、 $\hat{\bar{R}}$ -module $\bigcup_{m=1}^{\infty} \text{Der}^m(\hat{\bar{R}}/k)$ の free basis である。しかも、 $\{1, D_1, D_2, \dots\}$ は、 $\hat{\bar{R}}/k$ の iterative higher derivation である。 $L = \hat{L} : \hat{\bar{R}}$ とおく。 $k[[t_i]]$ の単位元を e_i と表わすと。

$$e_i L = (t_i^{a_i}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

となる。 R 。したがって、 $\hat{R}$ が regular ではないとすると。

ある $a_i \geq 1$ となる。例えば、 $a_1 \geq 1$ としよう。このときには、

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} (e_1 L)^k = (0)$$

である。これか、矛盾を与えることを示そう。整数 n を、

$$p^n \geq \max(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ となるようにとる。 } D \in \text{Der}^{p^n}(\hat{\bar{R}}/k)$$

は、

$$D = g_n D_{p_n} + (\text{lower order}), \quad g_n \in \widehat{R}$$

と書ける。実は、このとき、

$$D(\widehat{R}) \subset \widehat{R} \implies g_n \in L$$

となることか示される。 $f \in L$, $e_1 f \neq 0$ とする。

$f D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}}$ は、 $\widehat{R} \rightarrow \widehat{R}$ なる high order derivation を与える。したがって、仮定により、

$$f D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} = b \delta_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} + (\text{lower order}), \quad b \in \widehat{R} \quad (*)$$

と表わせる。ところが、

$$\delta_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} = \delta_{p_1} \delta_{p_{n+1}} \dots \delta_{p_{n+s}} \quad \text{z}^n$$

$$\delta_{p_i} = g_i D_{p_i} + (\text{lower order}), \quad g_i \in \widehat{R} \quad (n \leq i \leq n+s)$$

だから、これらを (*) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned} f D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} &= b (g_n D_{p_n} + \dots) \dots (g_{n+s} D_{p_{n+s}} + \dots) \\ &= b g_n \dots g_{n+s} D_{p_1+p_{n+1}+\dots+p_{n+s}} + \dots \end{aligned}$$

となる。

$$\therefore f = b g_n \dots g_{n+s}.$$

ところが $\delta_{p_i}(\widehat{R}) \subset \widehat{R}$ zⁿ、 $\delta_{p_i} \in \text{Der}^{p_i}(\widehat{R}/k)$ と考えられるから、 $g_i \in L$ ($n \leq i \leq n+s$) zⁿ がある。

$$\therefore e_1 f = e_1 b g_n \dots g_{n+s} \in (e_1 L)^s$$

は任意だから、

$$e_1 f (\neq 0) \in \bigcap_s (e_1 L)^s = (0). \quad \text{矛盾!}$$

g. e. d.

参考文献

- [1] J. Becker, Differential operators on complex analytic sets and a condition for nonsingularity, to appear.
- [2] T. Bloom, Operateurs différentiels elliptiques sur un espace analytique, Séminaire Lelong, 158 - 166. Lecture Notes in Math. 275, Springer 1972.
- [3] W. Brown, Higher derivations on finitely generated integral domains, proc. Amer. Math. Soc., 42 (1974), 23 - 27.
- [4] Y. Ishibashi, A characterization of one dimensional regular local rings in terms of high order derivations, Bull. Fukuoka Univ. Education, 24 - III (1975), 11 - 18.
- [5] E. Kunz, Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen, J. r. u. a. Math., 204 (1960), 166 - 182.
- [6] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math., 87 (1965), 874 - 898.
- [7] K.R. Mount - O.E. Villamayor, On a conjecture of Y. Nakai, Osaka J. Math., 10 (1973), 325 - 327.
- [8] Y. Nakai, On the theory of differentials in commutative rings, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 63 - 84.
- [9] Y. Nakai, High order derivations I, Osaka J. Math., 7 (1970), 1 - 27.

- [10] G. Scheja - U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischen Algebren, Math. Ann., 197 (1972), 137 - 170.