

On free boundary Plateau problem for general dimensional surfaces

阪大. 理. 中内伸光
(Nobumitsu Nakamura)

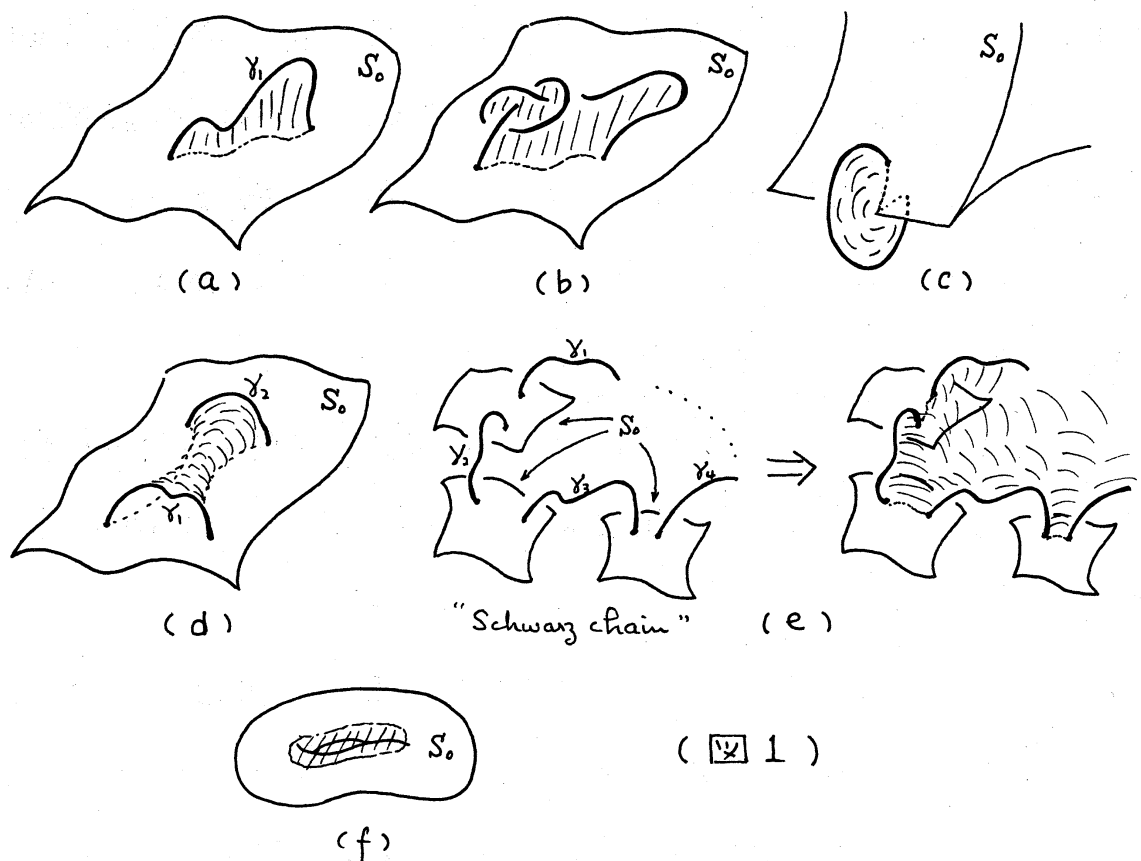
1. (古典的) Plateau 問題とは. 「 $\mathbb{R}^3$ 中の与えら山に Jordan 曲線を張る (単連結な) 曲面全体の中で面積最小のものを求めよ」というものであり. これは針金に石鹸膜を張って実験を繰り返した 19 世紀のベルギーの物理学者 Plateau にちなんでいる. この問題を数学的に扱う際. 単連結な曲面とは. 単位円板 $D = \{ |z| \leq 1 \}$ からの内部で smooth な連続写像 f のことであり. 曲面 f が Jordan 曲線 γ を張るとは. $f|_{\partial D}$ が γ の parametrization になっていることである. f の面積 $A(f)$ は次で与えられる;

$$A(f) := \iint_D \sqrt{\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle^2} dx dy \quad (z = x + iy)$$

このような設定のもとでの面積最小解の存在は. 1930 年代に Rado' 及び Douglas によって与えられた.

2. その山と平行して. Plateau 問題の様々な拡張が行われたが. その一つは自由境界問題である. これも古くから考えられてきたものであり. 例えば. Plateau 問題における

Jordan 曲線 γ を、図 1 における様な compact な連続曲面 S_0 (Jordan 曲線と同様に、一般には滑らかさは仮定しない。 $\partial S_0 = \emptyset$ でも $\neq \emptyset$ でも良い。) と、その上に端点をもつ有限個の Jordan 弧 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ に置きかえた状況のもとで、 γ_i ($i=1, \dots, k$) を境界の一部とし、境界の残りの部分は S_0 上にのっている (単連結な) 曲面全体の中で面積最小のものを探めよ (“部分的自由境界問題”) とか、あるいは、 S_0 上に境界がすべてののっている (可縮でない、単連結な) 曲面全体の中で面積最小のものを探めよ (“全自由境界問題”) というものである。



3. Plateau問題のもう一つの拡張は、曲面の高次元化である。これも現在まで幾通りかの方法で扱われている。

Plateau問題の定義ともう一度振返ってみよう：「 $\mathbb{R}^3$ の中の
($\mathbb{R}^n$)
与えられた Jordan 曲線 を張る曲面全体の中で面積最小のもの を求めよ。」
① ③ ① ②
この定義を見ると、3つの要素

- ① object
- ② object に付随する量
- ③ object 間の関係

が含まれていることがわかるが、逆に、この3要素を指定することが Plateau 問題（あるいは、もっと一般のこのような変分問題）の扱い方を定めることになると思われる。ただ高次元の場合は、2次元のときのような扱いは望むべくもなく、象徴的に言うと、“map” としてではなく、“set” としての側面を取り上げ、曲面の位相型にこだわらないことが一般に要求される。

4. さて、「自由境界問題（2次元）」と「曲面の高次元化」と見たとき、一般次元自由境界問題をどう設定するかというのは自然な問いである。一般次元の Plateau 問題は、既に様々な方法で扱われているから、自由境界問題の設定には、まず object として何を採用するかということから始めれば良い。自由境界部分の挙動の複雑さ、例えば、2次元

の場合でさえ、 S_0 の形状によっては、それほど pathological
でなくとも、面積最小解の自由境界が連続曲線でないことす
らあり得る) と考慮すると、粗朴な点集合としての扱いが適
切であるように思われる。実は、1960年頃、E. R.

Reifenberg が、上の言い方に従うと

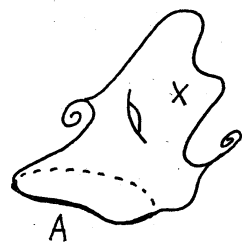
- ① compact set
- ② Hausdorff measure
- ③ homological condition

として、一般次元 plateau 問題を設定し、解の存在と正則性
(内部で a.e. real analytic) を導いている。ここで、③
について説明しよう。以下、ambient space は $\mathbb{R}^n$ とする。
 G を係数群に $\mathbb{Z}$ compact abelian group. A を境界と見做す
compact set. $\Gamma \subset H_{m-1}(A; G)$ の subgroup とする。こ
のとき、曲面に $\mathbb{Z}$ compact set X ($\hookrightarrow A$) に対して、

$$K = \text{Ker} \{ i_* : H_{m-1}(A; G) \longrightarrow H_{m-1}(X; G) \}$$

を彼は、"algebraic boundary" と呼んだ。

これは、 X が A を張っている部分と



homologically に定量的にあらわしたもので (図2)

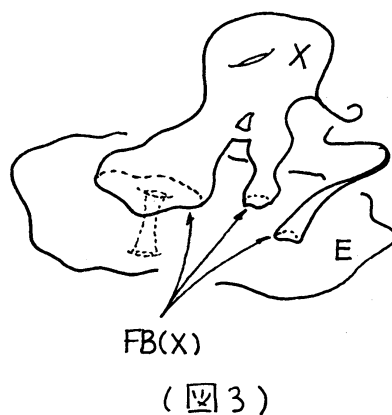
あると見える。 $K \supset \Gamma$ のとき、 X は "surface with
boundary $\supset \Gamma$ " であると呼び (以下、これを " X は Γ を
張る" と呼ぶことにする。)、 Γ を張る曲面 (= compact

set) 全体を $\mathcal{O}(\Gamma)$ としにとき, $\mathcal{O}(\Gamma)$ の中で m 次元体積 (= m 次元 Hausdorff measure) 最小問題を設定し, 解いたのである。

5. そこで, この考えに沿って, 自由境界問題の一つを設定してみよう。 G は, 同じく係数群に $\mathbb{R}$ compact abelian group とし, E は (自由) 境界 ∂ の compact set とする。 $\Gamma \subset H_{m-1}(E; G)$ の subgroup としよう。 曲面に compact set X に対して, $FB(X) := X \cap E$ が, ちょうど曲面 X の E 上の (自由) 境界に相等するものである。 このとき, 包含写像

$$\begin{array}{ccc} FB(X) & \xhookrightarrow{i} & X \\ \downarrow j & & \\ E & & \end{array}$$

から



$$\begin{array}{ccccc} H_m(X, FB(X); G) & \xrightarrow{\partial} & H_{m-1}(FB(X); G) & \xrightarrow{i_*} & H_{m-1}(X; G) \\ & & \downarrow j_* & & \\ & & H_{m-1}(E; G) & & \end{array}$$

が induce される。 そこで, X が Γ を “freely に張る” とは, $j_*(\text{Ker } i_*) (= \text{Im}(j_* \circ \partial)) \supset \Gamma$ のことであると定義し, Γ を freely に張る compact set 全体を $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$

と書くことにする。また、 X の m 次元体積を

$$\text{Vol}^m(X) := \mathcal{H}^m(X \setminus \text{FB}(X))$$

(但し、 $\mathcal{H}^m$ は m 次元 Hausdorff measure)

で定義する。このとき、次が成り立つ。

定理. $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma) \neq \emptyset$ であれば、 $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ には、 m 次元体積最小のものが存在し、さらに、 $\mathcal{H}^m$ -a.e. real analytic にとれる。

まず、 $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ には、 $\mathcal{O}(\Gamma)$ と同様、Hausdorff distance で距離が入ることに注意する。定理の証明は、存在については、次の2つの step からなる。

step 1: $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ は、局所点列 compact である。

step 2: 次を満たすような $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ の列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ がとれる；

(イ) $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ は最小列、即ち、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Vol}^m(X_i) = \inf \{ \text{Vol}^m(X) ; X \in \mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma) \}$$

(ロ) $B(P, r) \cap \text{FB}(X_i) = \emptyset$, $P \in X_i$ ならば、

$$\text{Vol}^m(X_i \cap B(P, r)) \geq \alpha(m) r^m$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し、} \\ B(P, r) := \{ Q \in \mathbb{R}^n ; |Q - P| < r \} \\ \alpha(m) := \text{unit } m\text{-ball の体積} \end{array} \right)$$

“freely”は張る”というのとは、Reifenbergの“張る”とは異なる。 (homology の準同型の) Kernelのみならず、Image も介入するので、一般には都合が悪いと思われる点があるが、この場合は、object が compact set であり、homology が Čech homology であるということ効いていて、step 1 が示される。 step 2 は、点集合の収束列に対して m 次元体積が一般には下半連続にならないため、必要な部分である。この2つの step が示された後、step 2 の列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ は、step 1 より、ある $X_{\infty} \in \mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ に収束し、step 2 の条件から、 X_{∞} が、最小体積をもつことが示されて、存在が言える。

解の正則性については、このように構成した解が求める正則性をもつことが、Reifenberg の議論 ([3]) に従って証明できるが、そのような正則性をもつ最小解がとれれば良いという立場からは、彼の Plateau 問題の解の存在と正則性を用いて、次のようにしても良い： まず、上の最小解 X_{∞} の存在の前提の下で、compact set $FB(X_{\infty})$ を境界として

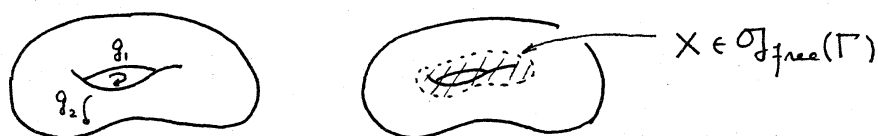
$$\Gamma_0 := \text{Ker} \{ i_* : H_{m-1}(FB(X_{\infty}); G) \rightarrow H_{m-1}(X_{\infty}; G) \}$$

に対して、(Reifenberg の) Plateau 問題を解くと、解 $X^* \in \mathcal{O}(\Gamma_0)$ が得られる。このとき、明らかに $\text{Vol}^m(X^*) \leq \text{Vol}^m(X_{\infty})$ である。一方、 $X_{\infty} \in \mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ 、 $X^* \in \mathcal{O}(\Gamma_0)$ より $X^* \in \mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ であることがわかり、 $\text{Vol}^m(X_{\infty}) \leq$

$\text{Vol}^m(X^*)$ となる。したがって、 X^* も我々の自由境界問題の解であることになり、さらに、 X^* は Reifenberg の解だから求める正則性をもつ。

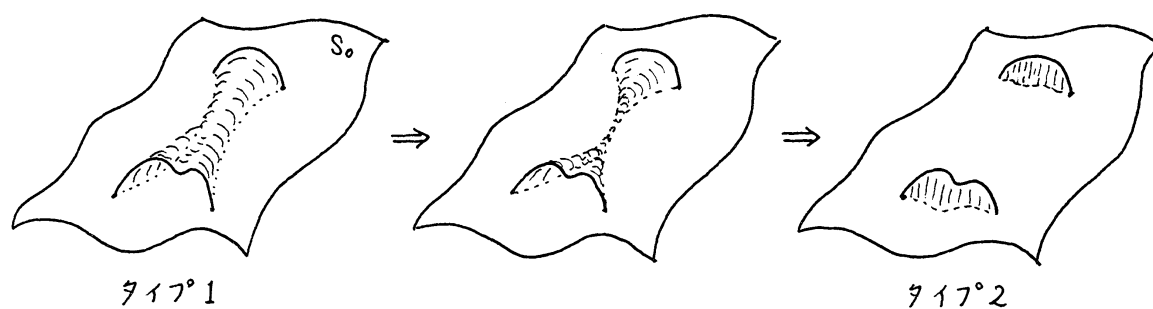
6. 最後に、2次元の簡単な例を少し見てみよう。

例えば、図1の(f)のトーラス S_0 を E としよう。 $H_1(E; \mathbb{G}) = \langle g_1 \rangle \oplus \langle g_2 \rangle$ であるが、 $\Gamma = \langle g_1 \rangle$ とし $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ と考えると、トーラスの穴を張る曲面はすべて $\mathcal{O}_{\text{free}}(\Gamma)$ になる(図4)。



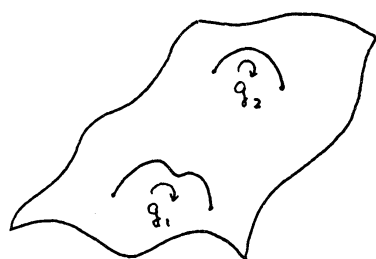
(図4)

2.で述べたような部分的自由境界問題に対しても、 $E = S_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ と置くことによって適用できる。例えば、図1の(d)の場合を考えてみよう。曲面を単位円板からの写像として扱ったときは、面積最小解の存在は一般には保証されない。(存在・非存在は、 S_0, γ_1, γ_2 の形及び配置に depend する。) 2つの Jordan 弧 γ_1, γ_2 の距離が γ_1, γ_2 の直径に比べてある程度大きくなると、図5におけるように、タイプ1の曲面よりタイプ2の曲面(2つの曲面に退化)の面積の方が小さくなってしまふからである。



(図5)

classical には、タイプ2 のような退化を避けるため、退化曲面の面積の下限を A' 、タイプ1 のような曲面の面積の下限を A としたとき、「 $A < A'$ 」という仮定の下で、タイプ1、即ち、求める設定の面積最小解の存在が示された。「 $A < A'$ 」のような条件は、一般に "Douglas condition" と呼ばれる。そこで、これを我々の設定で考えてみよう。 E として、 $S_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ にとる。 $H_1(E; G) = \langle g_1 \rangle \oplus \langle g_2 \rangle$ である (図6)。

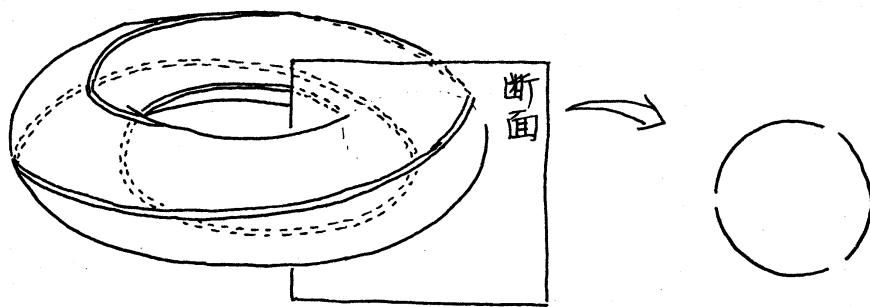


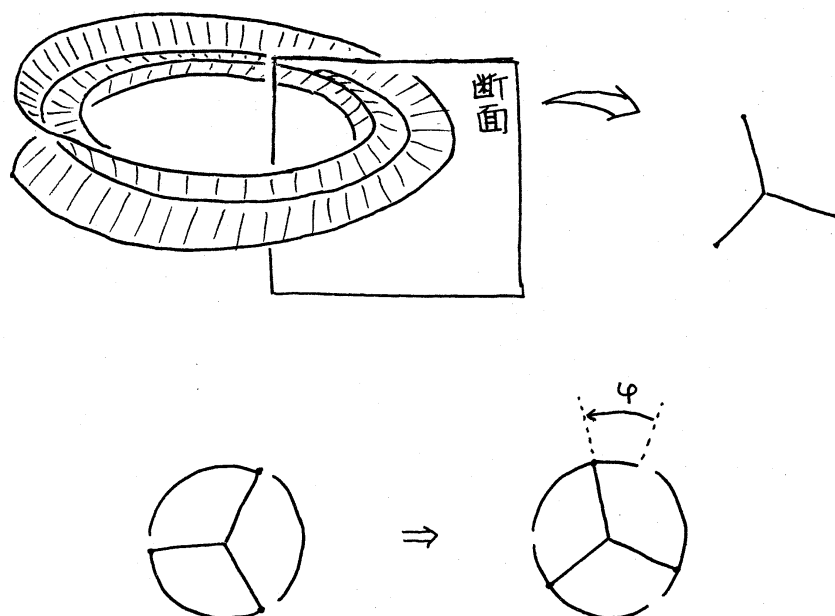
(図6)

そこで、 $\Gamma := \langle g_1 - g_2 \rangle$ とおくと、タイプ1 及びタイプ2 の曲面はいずれも $\mathcal{O}_{free}(\Gamma)$ に属する。 $\mathcal{O}_{free}(\Gamma)$ における面積

最小解の存在は、退化・非退化（位相型）は不問として、最小なものがあるということを示している。

さて、これまであまり取立てて触れなかったが、homology の係数群 G は compact abelian group であり、実際上、概ね $G = \mathbb{Z}_2$ とする。即ち、比較族では non-orientable な曲面も許容する立場である。ただ、 $G = \mathbb{Z}_2$ のみかというところでもない。 $G = \mathbb{Z}_3$ の例を一つ見てみよう。図7におけるような E に対して、ねじれる枚羽 (Triple Möbius band) X を考える。 X の境界は Jordan 曲線 ∂ 、 X はこれを境界とする面積最小解であり、これは、J. F. Adams によるものである。図のように、角度 φ だけ回転させて Adams の“曲面”（境界は E 上になっている）を X_φ とすると、 X_φ はすべて $\mathcal{O}_{\text{free}}(\mathbb{Z}_3)$ に属することがわかる ($H_1(E; \mathbb{Z}_3) \cong H_1(S^1; \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$)。さらに、それらはすべて $\mathcal{O}_{\text{free}}(\mathbb{Z}_3)$ における面積最小解であり、各 X_φ は X_0 を角度 φ だけ回転して得られるから、解の連続 family (“block”) になる。





(图7)

《参考文献》

- [1] E.R. Reifenberg : Solution of the Plateau problem for m -dimensional surfaces of varying topological type , Acta Math. 104 (1960) 1-92 .
- [2] E.R. Reifenberg : An isoperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces , Ann. of Math. 80 (1964) 1-14 .
- [3] E.R. Reifenberg : Analyticity of minimal surfaces , Ann. of Math. 80 (1964) 15-21 .

- [4] N. Nakauchi : On free boundary Plateau problem for general dimensional surfaces, preprint.