

Commutative Algebra for Combinatorialists

日比孝之 (名古屋大学)
理学部

Takayuki Hibi

序. m 行 r 列の整数行列 $\Phi = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq r}}$ が与えられた時, Φ から定まる整数係数の連立線型 diophantine 方程式系

$$\Phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

の非負整数解全体の集合を E_Φ で表そう:

$$E_\Phi := \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{N}^r : \Phi \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

この時, E_Φ に関して何が言えるか? — という問掛けは, 不変式論・線型計画法や組合せ論, 更には, 可換環論等の諸分野に於て, 自然発生するもの

めて素朴なものである。

今, $(0, \dots, 0) \neq \beta \in E_{\Phi}$ が基本解であるとは,
 $\beta = \gamma + \delta$ ($\gamma, \delta \in E_{\Phi}$) ならば $\gamma = \beta$ または $\delta = \beta$
 である — という条件が満たされる時を言うことに
 し, E_{Φ} の基本解の全体を FUND_{Φ} で表そう。すると,
 E_{Φ} を知ることと FUND_{Φ} を知るとは同値であ
 る。そして, いわゆる “Hilbert の基底定理” (可
 換環論の言葉では, 体 k 上の r -変数の項
 式環 $k[x_1, x_2, \dots, x_r]$ が Noether 環である —
 と述べられる定理) が, FUND_{Φ} は有限集合であ
 る — ということを保証している。[じゃあ, 有限
 集合であるならば, FUND_{Φ} を具体的に記述した
 い] — ということは, 誰もが感じる誘惑であろ
 う。]

本稿では, 線型 diophantine 方程式系を媒
 介とした可換環論と組合せ論の接点 — とい
 う観点に立脚し, 可換環論, 特に Cohen-
 Macaulay 環の理論から, E_{Φ} に関して得るこ
 とのできる情報を記述し, その “数え上げ”
 の組合せ論への応用例として, 凸多面体に含ま
 れる有理点の数え上げを考察する。

第1節 連立線型 diophantine 方程式系

本節の目標は連立線型 diophantine 方程式系の非負整数解に関する(母関数の範疇で捕えた)既知の結果を詳述することにある。可換環論の技巧を駆使することにより証明される事実が強調したい内容であるが、これらの証明及び背景となる可換環論の骨格は第2節で述べる。可換環論と聞いただけで吐き気を催す combinatorialists は第1節を読んだ後に直ちに第3節を読んでも差し障りのないように配慮する。

なお、 $\mathbb{N}$ が非負整数の全体の集合を表す。また、 X が有限集合の時、 X に含まれる元の個数を $\#(X)$ と書くことによる。

a) 基本解

整数 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq r$) を係数とする連立線型 diophantine 方程式系

$$(\star) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mr}x_r = 0 \end{cases}$$

の係数行列を $\Phi = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq r}}$ とする。(☆)の非負整数解, 即ち, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in \mathbb{Z}^r$, $\beta_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq r$) 2"

$$\Phi \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

を満たすものの全体を E_Φ で表す。以下,

$$d := r - (\Phi \text{ の階数})$$

と置き, また (☆) は 非自明 (i.e., $\neq (0, \dots, 0)$) な非負整数解を持つと仮定する。[注意: このような仮定は, 組合せ論の現場に適応する際には, 何らの障害にはならない。]

さて, $(0, \dots, 0) \neq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in E_\Phi$ が E_Φ の 基本解 であるとは, $\gamma, \delta \in E_\Phi$ が $\beta = \gamma + \delta$ を満たせば, $\gamma = \beta$ または $\delta = \beta$ が成り立つ時を言う。 E_Φ の基本解の全体の集合を FUND_Φ で表す。古典的な不変式論で得られた重要な成果は, Hilbert の基底定理と呼ばれる次の事実である:

(1.1) 命題. $\#(\text{FUND}_\Phi) < \infty$

ところで、 $E_{\Phi}(\subset \mathbb{N}^r)$ は、 $\mathbb{N}^r$ の通常の (成分ごとの) 加法で零元を持つ可換な半群となる。この時、 FUND_{Φ} は E_{Φ} の半群としての生成系に他ならない。すると、(1.1) を群の言葉で述べると、

(1.2) 系. 半群 E_{Φ} は有限生成である。

b) 重量写像

写像 $w: E_{\Phi} \rightarrow \mathbb{N}$ が E_{Φ} 上の 重量写像 であるとは、次の条件が満たされる時を言う：

(i) $w(\beta) = 0$ となるのは $\beta = (0, \dots, 0)$ かつその時に限る。

(ii) 等式 $w(\alpha + \beta) = w(\alpha) + w(\beta)$ が任意の $\alpha, \beta \in E_{\Phi}$ に対して成立する。

いちばん簡単な E_{Φ} 上の重量写像は、任意の $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ に対して $w(\beta) = \beta_1 + \dots + \beta_r$ で定義したものである。

さて、 E_{Φ} 上の重量写像 w が与えられた時、 $w(\beta) = m$ となる $\beta \in E_{\Phi}$ の全体の集合を $E_{\Phi, w(m)}$ で表す。以下、興味の対象となるのは、数列

$\{\#(E_{\Phi, w}(n))\}_{n=0,1,2,\dots}$ の母関数

$$F_{\Phi, w}(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \#(E_{\Phi, w}(n)) \lambda^n$$

である。

(1.3) 定理. d 個の正の整数 $e_1, e_2, \dots, e_d$ を適当に選べば

$$\prod_{i=1}^d (1 - \lambda^{e_i}) F_{\Phi, w}(\lambda)$$

は非負整数を係数とする λ の多項式となる。

C) 正解

すなわち, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in E_{\Phi}$ が 正解 であるとは, $\beta_i > 0$ が任意の $1 \leq i \leq r$ に対して成立する時を言う。すなわち, E_{Φ} の正解の全体の集合を E_{Φ}^* で表す。任意の $\beta \in E_{\Phi}$ の第 j 成分 β_j が常に $\beta_j = 0$ であるならば, (☆)において, $a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{mj} = 0$ とした連立線型 diophantine 方程式系を考えよう。従って, 任意の $1 \leq j \leq r$ に対して $\beta_j > 0$ となる

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in E_\Phi$ が存在すると仮定してよい。
すると、一様性を失なうことなく、 E_Φ^* は空集合ではないと仮定してもよいということだ。

他方、 $E_\Phi \subset \mathbb{N}^r$ を零元を持つ可換な半群と考えると、 E_Φ^* は E_Φ の半群としての ideal である。即ち、 $\beta \in E_\Phi^*$, $\alpha \in E_\Phi$ ならば " $\alpha + \beta \in E_\Phi^*$ " となるのである。

E_Φ 上の重量写像 w が与えられた時

$$E_{\Phi, w}^*(n) = E_{\Phi, w}(n) \cap E_\Phi^* \quad (n=1, 2, \dots)$$

と置き、更に

$$F_{\Phi, w}^*(\lambda) := \sum_{n=1}^{\infty} \#(E_{\Phi, w}^*(n)) \lambda^n$$

としよう。この時、

(1.4) 定理 (Stanley [7]).

$$F_{\Phi, w}^*(\lambda) = (-1)^d F_{\Phi, w}(\lambda^{-1})$$

(1.5) 系. (1.3) に於ける λ の各項式 $\prod_{i=1}^d (1 - \lambda^{e_i}) F_{\Phi, w}(\lambda)$ の次数は $< \sum_{i=1}^d e_i$ である。

次に, E_Φ の半群としての ideal $\mathcal{U}$ が E_Φ^* の 模倣 であるとは, $\delta \in E_\Phi$ が存在して

$$E_\Phi^* = \{\beta + \delta : \beta \in \mathcal{U}\}$$

となる時を言う。この時, δ を $\mathcal{U}$ の shifting と呼ぶ。また,

$$C_w(\mathcal{U}) := \min \{w(\beta) : \beta \in \mathcal{U}\}$$

と置く。もちろん

$$C_w(\mathcal{U}) = C_w(E_\Phi^*) - w(\delta)$$

である。すると,

$$F_{\mathcal{U},w}(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \#(\mathcal{U} \cap E_{\Phi,w}(n)) \lambda^n$$

と定義すれば

(1.6) 系.

$$F_{\mathcal{U},w}(\lambda) = (-1)^d \lambda^{-(C_w(E_\Phi^*) - C_w(\mathcal{U}))} F_{\Phi,w}(\lambda^{-1})$$

d) 完全基本解

$\beta \in \text{FUND}_\Phi$ が 完全基本解 であるとは, 整数 $n > 0$ と $\gamma, \delta \in E_\Phi$ が $n\beta = \gamma + \delta$ を満たせば, $\gamma = n_1\beta$ となる $0 \leq n_1 \leq n$ が存在する

時を言う。 E_{Φ} の完全基本解の全体を CF_{Φ} で表す。この時、

(1.7) 補題. 任意の $\beta \in E_{\Phi}$ に対し、適当に整数 $m > 0$ を取れば、 $m\beta$ は完全基本解の和として (必ずしも一意的とは限らないが) 書ける。

(1.8) 命題. E_{Φ} 上の重量写像 w が任意の $\beta \in CF_{\Phi}$ に対し $w(\beta) = 1$ を満たす (この時、 w を 良好重量写像 と呼ぶ。) と仮定せよ。すると、(1.3) に 於て $e_1 = e_2 = \dots = e_d = 1$ と選べる。

(1.9) 系. E_{Φ} 上の重量写像 w は良好であると仮定せよ。この時、非負整数 $h_0, h_1, \dots, h_{d-1}$ が存在して

$$(*) \quad (1-\lambda)^d F_{\Phi, w}(\lambda) = h_0 + h_1 \lambda + \dots + h_{d-1} \lambda^{d-1}$$

となる。

連立方程式 (☆) が与えられた時、一般には、 E_{Φ} 上の良好重量写像 W が存在するか否かを判定することは困難である。なお、(1.7) によ、 E_{Φ} 上の良好重量写像は存在すれば一意である。

(1.10) 例 (魔法陣) 図-1 の有限 graph から連立線型 diophantine 方程式系

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= x_3 + x_4 + x_6 \\ &= x_5 + x_6 = x_4 + x_5 = x_7 + x_8 \\ &= x_8 + x_9 = x_2 + x_7 + x_9 \end{aligned}$$

を考へる。この時、任意の $\beta \in CF_{\Phi}$ に対し $W(\beta) \leq 2$ となる E_{Φ} 上の重量写像 W は存在するが、良好重量写像は存在しない。

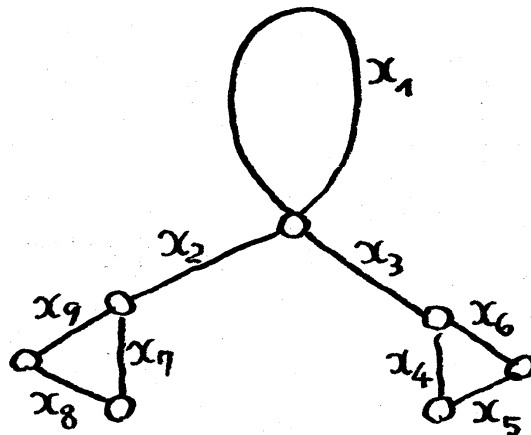


図-1

(1.11) 例 (P-分割). 図-2 の有限半順序集合から 連立線型 diophantine 方程式系

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = x_2 + x_5 \\ x_5 + x_7 = x_6 + x_8 \end{cases}$$

を作る。この時, $\text{FUND}_{\Phi} = \text{CF}_{\Phi}$ であり, しかも E_{Φ} 上の良好重量写像が存在する。

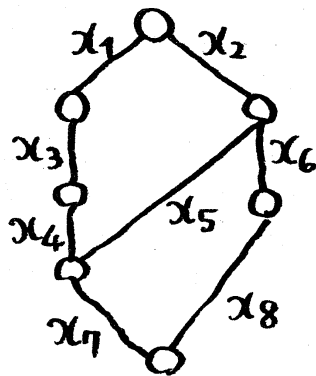


図-2

e) (☆) に随伴する有限数列

連立線型 diophantine 方程式系 (☆) の非負整数解の全体 E_{Φ} 上に良好重量写像が存在する時, (1.9) の (＊) で定まる非負整数 $h_0, h_1, \dots, h_{d-1}$ が興味の対象となる。以下,

$$S = \max \{ i ; h_i \neq 0 \}$$

と置く。すると, (1.4) より

(1.12) 補題. $c_w(E_\Phi^*) = d - s$

(1.13) 命題 (Stanley). 任意の $0 \leq i \leq [s/2]$ に対して, 不等式

$$h_0 + h_1 + \cdots + h_i \leq h_s + h_{s-1} + \cdots + h_{s-i}$$

が成立する。

一般に,

$$sq(\Phi) := \min \{ c_w(\mathcal{U}) ; \mathcal{U} \text{ は } E_\Phi^* \text{ の模倣} \}$$

と置く。すると,

(1.14) 命題. $q = sq(\Phi)$ と置くと, 任意の $0 \leq i \leq [(s-q)/2]$ に対して, 不等式

$$\begin{aligned} h_s + h_{s-1} + \cdots + h_{s-i} \\ \leq h_0 + h_1 + \cdots + h_i + (h_{i+1} + \cdots + h_{i+q}) \end{aligned}$$

が成立する。

(1.15) 系. 任意の $0 \leq i \leq [d/2]$ に対して, 不等式

$$h_{d-1} + \cdots + h_{d-i} \leq h_0 + h_1 + \cdots + h_i$$

が成立する。

(1.16)系. 数列 $h_0, h_1, \dots, h_s$ が "symmetric, i.e., $h_i = h_{s-i}$ ($0 \leq i \leq s$), となるための必要十分条件は, $sq(\Phi) = 0$, 換言すれば, E_Φ が E_Φ^* の模倣となることである。

[証明] $sq(\Phi) = 0$ とすると, (1.13) と (1.14) の御陰で $0 \leq i \leq [s/2]$ に対し, 等式 $h_0 + h_1 + \dots + h_i = h_s + h_{s-1} + \dots + h_{s-i}$ が成立する。 $\therefore h_i = h_{s-i}$ ($0 \leq i \leq s$)

逆に, $h_i = h_{s-i}$ とすると, (1.4) より

$$F_{\Phi, w}^*(\lambda) = (-1)^d F_{\Phi, w}(\lambda^{-1}) = \lambda^{c_w(E_\Phi^*)} F_{\Phi, w}(\lambda)$$

となる。そこで, $w(\delta) = c_w(E_\Phi^*)$ とする $\delta \in E_\Phi^*$ を取って, $\mathcal{U} = \{\alpha + \delta; \alpha \in E_\Phi\}$ と置けば, $\mathcal{U} \subset E_\Phi^*$ となる。他方,

$$F_{\mathcal{U}, w}(\lambda) = \lambda^{w(\delta)} F_{\Phi, w}(\lambda)$$

だから,

$$F_{\Phi, w}^*(\lambda) (= F_{E_\Phi^*, w}(\lambda)) = F_{\mathcal{U}, w}(\lambda)$$

である。すると $\mathcal{U} \subset E_\Phi^*$ は, 実は $\mathcal{U} = E_\Phi^*$ と

なる。即ち、 E_{Φ} は E_{Φ}^* の模倣となるわけだ。

Q.E.D.

このようにして、 $Sq(\Phi)$ は $(*)$ の多項式 $(1-\lambda)^d F_{\Phi, w}(\lambda)$ から生起する数列 $e_0, e_1, \dots, e_s$ が symmetric であることから d の程度離れているかを表す不変量である。すると、この不変量が組合せ論の実際の現場で d の程度具体的に計算可能であるか——ということが重要な課題となる。

第2節 可換環論

本節では、前節で述べた結果を可換環論、特に Cohen-Macaulay 環の理論を武器として証明するための骨格を築くことを目標とする。予備知識としては Atiyah-Macdonald [1] 程度を仮定する（と言っても、予備知識は殆ど仮定しなくても読めるように、できる限りの努力をする）。

a) 次数環

単位元を持つ可換環 A が加法群としての直和分解 $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ を持ち $A_i A_j \subset A_{i+j}$ ($\forall i, j \geq 0$) が成立する時, $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ を 次数環 と言う。更に, $A_0 = k$ が体で, A が k -代数として有限生成の時, A を G -代数 と呼ぶ。

すなわち, $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ が G -代数の時, A の元 x が 斉次元 であるとは, $x \in A_m$ となる $m \geq 0$ が存在する時を言う。この時, x の次数は m であると言い, $\deg x = m$ と書く。 A は k -代数として有限生成だから, 有限個の斉次元 $y_1, y_2, \dots, y_r$ ($y_i \in A_{n_i}$, $n_i > 0$) が存在して, A は k -代数として, $y_1, y_2, \dots, y_r$ で生成される。特に, $y_1, y_2, \dots, y_r$ を A_1 から選べる時, A を 標準 G -代数 と呼ぶ。

一般に, G -代数 $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ が与えられた時, k と A_1 で生成される A の部分 k -代数 $k[A_1]$ を B とすると, B は A の次数付けを継承して自然に G -代数の構造 $\bigoplus_{m \geq 0} B_m$,

$B_m \subset A_m$, を持つ。もちろん, B は標準 G -代数である。我々は, A が B -加群として有限生成の時, A を 擬標準 G -代数 と呼ぶことにする。すると,

(2.1) 補題 ([1, (5.2)]). A が擬標準 G -代数であるための必要十分条件は, A の G -代数としての生成系 $y_1, y_2, \dots, y_v$ で各 y_i が B 上整となるものが存在することである。

b) 正規化定理

G -代数 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ の次元 $\dim A$ とは, B 上代数的独立な A の斉次元の最大個数を表す。

さて, Noether 正規化定理とは,

(2.2) 命題 (cf. [1, p. 69]). $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ を d 次元の G -代数とせよ。この時, A の斉次元 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ (A の 基底 と呼ぶ) 2 次の条件を満たすものが存在する:

(i) $\theta_1, \dots, \theta_d$ は B 上代数的独立,

(ii) A は $k[\theta_1, \dots, \theta_d]$ -加群として有限生成である。

(2.3) 補題. $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ が標準 G -代数で $A_0 = k$ が無限体の時, A の巴系は A_1 から選べる。

(2.4) 系. $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ が擬標準 G -代数で $A_0 = k$ が無限体の時, A の巴系は A_1 から選べる。

C) 正則列

$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ を G -代数とする。 $\theta \in A_n$ が A の 非零因子 であるとは, $\theta \cdot x = 0$ ($x \in A$) ならば $x = 0$ であるということが成立する時を言う。また, A の各次元の列 $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t)$, $\theta_i \in A_{n_i}$ ($n_i > 0$), が A の 正則列 とは, 各 θ_i が $A/(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$ で非零因子である時を言う。そして, t を正則列 $\underline{\theta}$ の長さと呼ぶ。

(2.5) 補題. $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_t)$ が A の正則列であれば, $\theta_1, \dots, \theta_t$ は R 上代数的独立である。

そこで, A に含まれる正則列の最大の長さを A の 深さ と呼び $\text{depth } A$ で表すことにあゆば,

(2.6) 系. $\text{depth } A \leq \dim A$

d) Hilbert 関数

G -代数 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ は $A_0 = R$ 上の代数として有限生成であったから, 各 A_n は R 上の vector 空間として有限次元である。そこで,

$$H(A, n) := \dim_R A_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と置き, $H(A, n)$ を A の Hilbert 関数 と呼ぶ。更に, 数列 $\{H(A, n)\}_{n=0,1,2,\dots}$ の 母関数

$$F(A, \lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} H(A, n) \lambda^n$$

を A の Poincaré 級数 と言う。

さて, 一般に, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ の ideal I が 斉次 ideal であるとは, $I = \bigoplus_{n \geq 0} (I \cap A_n)$ が

成立すること, 換言すれば, I が斉次元で生成される時を言う。この時,

$$F(I, \lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} [\dim_{\mathbb{C}}(I \cap A_n)] \lambda^n$$

と置く。他方, 剰余環 A/I には A の次数付が遺伝し, 再び G -代数となる。

(2.7) 補題. I が A の斉次 ideal の時

$$F(A, \lambda) = F(A/I, \lambda) + F(I, \lambda)$$

である。

そこで, $\theta \in A_m$ ($m > 0$) を A の非零因子としよう。すると,

$$F((\theta), \lambda) = \lambda^m F(A, \lambda)$$

となるから,

(2.8) 系. $\theta \in A_m$ ($m > 0$) が A の非零因子の時,

$$F(A/(\theta), \lambda) = (1 - \lambda^m) F(A, \lambda)$$

である。

(2.9) 系. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_t)$ が A の正則列で
 $\theta_i \in Ae_i$ ($e_i > 0$) であれば,

$$F(A/(\theta_1, \dots, \theta_t), \lambda) = \prod_{i=1}^t (1 - \lambda^{e_i}) F(A, \lambda)$$

が成立する。

e) Cohen-Macaulay 環

G -代数 A が $\text{depth } A = \dim A$ を満たす時
 A は Cohen-Macaulay 環 であると言う。

(2.10) 命題. A が Cohen-Macaulay 環であれば,
 A の任意の巴系は正則列である。

(2.11) 系. A が Cohen-Macaulay 環, $\dim A = d$,
 の時, 整数 $e_1, e_2, \dots, e_d$ ($e_i > 0$) が存
 在して,

$$\prod_{i=1}^d (1 - \lambda^{e_i}) F(A, \lambda)$$

は非負整数を係数とする λ の多項式となる。

[証明] A の巴系 $\theta_1, \dots, \theta_d$ ($\theta_i \in Ae_i, e_i > 0$)

を取ると, $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ は A の正則列となる。すると, (2.9) より

$$F(A/(\theta_1, \dots, \theta_d), \lambda) = \prod_{i=1}^d (1 - \lambda^{e_i}) F(A, \lambda)$$

となる。ところが, A は $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_d]$ -加群として有限生成であったから, $A/(\theta_1, \dots, \theta_d)$ は $\mathbb{C}$ 上の vector 空間として有限次元である。特に, 任意の $n \gg 0$ に対し $\dim_{\mathbb{C}} [A/(\theta_1, \dots, \theta_d)]_n = 0$ となる。すると $F(A/(\theta_1, \dots, \theta_d), \lambda)$ は λ の多項式であり, λ^i の係数 $\dim_{\mathbb{C}} [A/(\theta_1, \dots, \theta_d)]_i$ はもちろん非負整数である。 Q. E. D.

(2.12) 系. $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ が Cohen-Macaulay 擬標準 G -代数で $\dim A = d$ であれば

$$(1 - \lambda)^d F(A, \lambda)$$

は非負整数を係数とする λ の多項式である。

【証明】 $A_0 = \mathbb{C}$ が有限体ならば, $\mathbb{C}$ の拡大体 K で無限体であるものを考え, A の代わりに係数拡大 $A \otimes_{\mathbb{C}} K = \bigoplus_{m \geq 0} (A_m \otimes_{\mathbb{C}} K)$ で仕事をすればよいから, 最初から $\mathbb{C}$ は無限体であると

仮定してよい。すると(2.4)によつて、 A_1 から巴系が選べるから、(2.11)で各 $e_i = 1$ とすることが可能である。 Q.E.D.

5) 弱規準 ideal

Cohen-Macaulay環の範疇に於て、更に際立った性質を持つものとして、Gorenstein環がある。Gorenstein環を解説するには、canonical module (規準加群)の理論に触れなければならないが、理論的に煩く言うと、煩雑になる恐れがあるので、本稿では、天下りの的に導入することを試みる。

さて、 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ を $\dim A = d$ なる Cohen-Macaulay G -代数とする。 A の斉次 ideal I が次の条件を満たす時、 I を A の 弱規準 ideal と呼ぶ：

$$(i) \quad F(I, \lambda) = (-1)^d \lambda^a F(A, \lambda^{-1}) \quad \exists a \in \mathbb{Z}$$

(ii) $I \subsetneq A$ であるば A/I は $d-1$ 次元の Cohen-Macaulay環である。

(2.13) 命題. Cohen-Macaulay G -代'数 A が整域であれば, A には弱規'準 ideal が存在する。

実は, A が整域の時には, 弱規'準 ideal は, A の canonical module K_A と同型になる ([9, (4.4)], [3, (1.7)]).

以下, A の弱規'準 ideal の存在を仮定して議論を進めたいので, それを保証するために, 整域となる Cohen-Macaulay G -代'数を考察の対象とする。

一般に, A の斉次 ideal $I = \bigoplus_{n \geq 0} (I \cap A_n)$ に対し

$$c(I) := \min \{ n ; I \cap A_n \neq (0) \}$$

と置く。そして, 整域である Cohen-Macaulay G -代'数 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ に対し, 不変量 $sq_b(A)$ を

$$sq_b(A) := \min \left\{ c(I) ; \begin{array}{l} I \text{ は } A \text{ の弱} \\ \text{規'準 ideal} \end{array} \right\}$$

で定義する。

すると, $sq_b(A) = 0$ ということとは, A 自身が

A の弱規準 ideal となることを意味する。この事実は、 A が Gorenstein 環である — ということと同値であるが、本稿では、Gorenstein 環には深入りしない。

ところで、 $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ が Cohen-Macaulay 擬標準 G -代数で、 $\dim A = d$ ならば、(2.12) によつて、 $(1-\lambda)^d F(A, \lambda)$ は非負整数を係数とする λ の多項式である。そこで、

$$(1-\lambda)^d F(A, \lambda) = h_0 + h_1 \lambda + \cdots + h_s \lambda^s$$

($h_s \neq 0$) とする時、 $h(A) := (h_0, h_1, \dots, h_s) \in A$ の h -vector と呼ぶことにする。すると、 $h_0 = 1$ 、 $h_1 = \dim(A_1) - d$ である。

(2.14) 補題. 擬標準 G -代数 $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ は Cohen-Macaulay 整域であると仮定せよ。この時、 A の h -vector $h(A) = (h_0, h_1, \dots, h_s)$ が symmetric, i.e., $h_i = h_{s-i}$ ($0 \leq i \leq s$) であるための必要十分条件は、 $\text{sq}_0(A) = 0$ となることである。

[証明] $\dim A = d$, $a = d - s$ と置く

$$F(A, \lambda^{-1}) = (-1)^d \lambda^a \frac{h_s + h_{s-1}\lambda + \dots + h_0\lambda^s}{(1-\lambda)^d}$$

となることに注意すればよい。 Q.E.D.

(2.15) 命題. 擬標準 G -代数 $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ は Cohen-Macaulay 整域 であると仮定し, $q = \text{sq}_G(A)$ と置く。この時, A の h -vector $h(A) = (h_0, h_1, \dots, h_s)$ に関する不等式

$$h_s + h_{s-1} + \dots + h_{s-i} \leq h_0 + h_1 + \dots + h_i + (h_{i+1} + \dots + h_{i+q})$$

が任意の $0 \leq i \leq [(s-q)/2]$ に対して成立する。

[証明] $\text{sq}_G(A) = 0$ の時は (2.14) により明白。
 $\text{sq}_G(A) > 0$ の時は, $C(I) = q$ となる A の弱標準 ideal I を取ると, 擬標準 G -代数 A/I が $d-1$ 次元 Cohen-Macaulay 環となることから, $(1-\lambda)^{d-1} F(A/I, \lambda)$ は 非負整数を係数とする λ の多項式となる。そこで, (2.7) により, $F(A/I, \lambda)$ を $F(A, \lambda)$ と

$$\begin{aligned} F(I, \lambda) &= (-1)^d \lambda^g - (d-s) F(A, \lambda^{-1}) \\ &= \lambda^g \cdot \frac{h_s + h_{s-1}\lambda + \cdots + h_0\lambda^s}{(1-\lambda)^d} \end{aligned}$$

で計算する。しかるば、 $(1-\lambda)^{d-1} F(A/I, \lambda)$ の λ^{i+g} の係数が非負ということが所期の不等式に他ならない。 Q.E.D.

(2.16) 命題 (Stanley). 擬標準 G -代数 A は Cohen-Macaulay 整域であると仮定し, $h(A) = (h_0, h_1, \dots, h_s)$ を A の h -vector とせよ。この時, 不等式

$$h_0 + h_1 + \cdots + h_i \leq h_s + h_{s-1} + \cdots + h_{s-i}$$

が任意の $0 \leq i \leq [s/2]$ に対して成立する。

8) Hochster-Stanley の理論

さて, 第1節の記号を踏襲し, 連立線型 diophantine 方程式系 $(\star)$ を考える。零元を持つ可換な半群 $E_\Phi \subset \mathbb{N}^r$ と E_Φ 上の重量写像 w から次の様にして自然に G -代数 $A_{\Phi, w}$ が構成できる。まず, r 個の変数 $z_1, z_2, \dots, z_r$ を準備し, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in E_\Phi$ に対して, 単項式

$$z^\beta := \prod_{i=1}^r z_i^{\beta_i}$$

を対応させる。そして、 $\{z^\beta : \beta \in E_{\Phi, w}(n)\}$ なる
 単項式の集合が張る $\mathbb{C}$ 上の vector 空間を
 $(A_{\Phi, w})_n$ と書き、これらの直和 $\bigoplus (A_{\Phi, w})_n$ を
 $A_{\Phi, w}$ と定義する。すると、 E_{Φ} が半群であるこ
 と及び重量写像の定義より、 $A_{\Phi, w}$ は $(A_{\Phi, w})_0$
 $= \mathbb{C}$ なる次数環である。他方、 $\{z^\beta : \beta \in \text{FUND}_{\Phi}\}$
 は $A_{\Phi, w}$ の $\mathbb{C}$ -代数としての生成系となるから、
 (1.1) より $A_{\Phi, w}$ は G -代数である。そして、 $A_{\Phi, w}$
 の G -代数としての次元は $d = r - (\Phi \text{ の階数})$
 と一致する。

さて、(2.1) より

(2.17) 補題. $A_{\Phi, w} = \mathbb{C}[\{z^\beta\}_{\beta \in \text{FUND}_{\Phi}}]$ は
 その部分 $\mathbb{C}$ -代数 $\mathbb{C}[\{z^\beta\}_{\beta \in CF_{\Phi}}]$ 上の加群
 として有限生成である。

(2.18) 定理 (Hochster [5]). $A_{\Phi, w}$ は Cohen-
 Macaulay 環である。

(2.19) 定理(Stanley [9]). $\mathcal{U}$ が E_{Φ}^* の模倣 ideal の時, $\{z^{\beta}\}_{\beta \in \mathcal{U}}$ が生成する $A_{\Phi, w}$ の次数 ideal は $A_{\Phi, w}$ の弱規準 ideal である。

第3節 凸多面体に含まれる有理点の “数え上げ”問題

“数え上げ”の組合せ論とは、離散的な数学現象に自然に現れる有限集合の族 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ に於て、集合 A_i の要素の個数を a_i とすることにより、生起する数列 $a_0, a_1, \dots, a_m$ を研究対象とする学問である。

本節では、連立線型 diophantine 方程式系の理論の応用として、凸多面体に含まれる有理点の“数え上げ”の問題を考察する。

a) 凸多面体の有理点

凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^N$ が 整凸多面体 であるとは、 P の任意の頂点が $\mathbb{Z}^N$ に含まれる時

を言う。 $P \subset \mathbb{R}^N$ が d 次元 整凸多面体の時
 $n=0, 1, 2, \dots$ に対して

$$i(P, n) := \#(nP \cap \mathbb{Z}^N)$$

と置く。ただし, $nP = \{nd; d \in P\}$ である。換
 言すれば, $i(P, n)$ は P に含まれる有理点 $d =$
 $(d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{Q}^N$ で $d_0, d_1, \dots, d_N$ の共通
 分母として n が取れるものの個数である。関
 数 $i(P, n)$ は Ehrhart, Macdonald, McMullen
 Stanley 等により研究されている。

さて, $i(P, n)$ を直接扱うよりも

$$\omega(P, \lambda) := (1-\lambda)^{d+1} \sum_{n=0}^{\infty} i(P, n) \lambda^n$$

を考察するのが好都合である。

若干の例を挙げよう。 $N=2$ の時は、簡
 単な受験問題である。図-3 の
 凸多面体を P とすると, nP とは
 $(0,0), (5n,0), (4n,3n), (0,4n)$ を
 頂点とする四角形の周及び内
 部であるから, それに含まれる $\mathbb{Z}^2$
 の点の個数を計算すると,

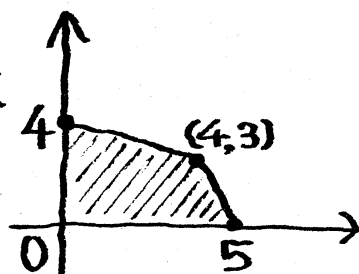
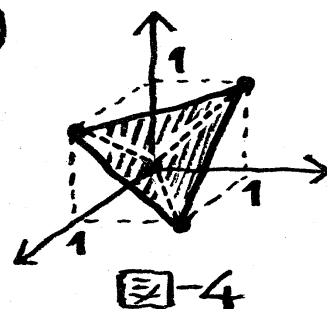


図-3

$i(P, n) = (31n^2 + 11n + 2)/2$, すると $\omega(P, \lambda) = 1 + 19\lambda + 11\lambda^2$ である。 $N=3$ になると計算はちょっと複雑になる。図-4の $(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$ を頂点とする凸多面体を P とすると, $\omega(P, \lambda) = 1 + \lambda^2$ である。



他方, $\mathbb{R}^N$ の単位立方体 $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N; 0 \leq \alpha_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, N)\}$ を P とすれば, $i(P, n) = (n+1)^N$ がすぐわかる。この時, $\omega(P, \lambda)$ の係数には, N 次対称群 S_N の Euler 数 (e.g., [11, p.22]) が登場する。また, $N=5$ とし, $(\alpha_1, \dots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5$ で不等式

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_3 \leq 1$$

$$0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq 1$$

$$0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5 \leq 1$$

を満たす点の全体から成る凸多面体を P とすると, P の頂点を計算するだけでも煩雑であるが, 結果を書けば, $\omega(P, \lambda) = 1 + 5\lambda + 3\lambda^2$ となる。

b) $\omega(P, \lambda)$ の係数

$i(P, n)$ は $P \subset \mathbb{R}^N$ を平行移動しても不変

であるから、以下、 d 次元整凸多面体 P は $P \geq 0$,
i.e., P に含まれる任意の点 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ の各
座標 $\alpha_i \geq 0$ である — と仮定する。

すなわち、 P は

$$(*) \quad \begin{cases} b_{11}\alpha_1 + \dots + b_{1N}\alpha_N \leq C_1 \\ \dots\dots\dots \\ b_{M1}\alpha_1 + \dots + b_{MN}\alpha_N \leq C_M \end{cases}$$

を満たす $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ の集合であると仮定
せよ。ただし b_{ij}, C_i は整数である。この時、
 $x_1, \dots, x_N, y$ を変数とする連立線型 diophantine
方程式系

$$(**) \quad \begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1N}x_N \leq C_1 y \\ \dots\dots\dots \\ b_{M1}x_1 + \dots + b_{MN}x_N \leq C_M y \end{cases}$$

を考えると、

(3.1) 補題. $(\beta_1, \dots, \beta_N, m) \in \mathbb{N}^{N+1}$ が $(**)$
の解であることと、 $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in mP \cap \mathbb{Z}^N$ は同
値である。

【証明】 $(\beta_1, \dots, \beta_N, m) \in \mathbb{N}^{N+1}$ を $(**)$ の解とし, $m > 0$ とせよ。すると, $(\beta_1/m, \dots, \beta_N/m)$ は $(*)$ を満たすから, $(\beta_1/m, \dots, \beta_N/m) \in \mathcal{P}$, 従って $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in m\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N$ である。他方, $\mathcal{P}$ は有界であることに注意すれば, 任意の $(0, \dots, 0) \neq (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N$ は適当な $1 \leq i \leq M$ に対して $\sum_{j=1}^N b_{ij} \alpha_j > 0$ となる。すると, $(\beta_1, \dots, \beta_N, 0) \in \mathbb{N}^{N+1}$ が $(**)$ の解ならば“各 $\beta_j = 0$ ”である。 Q.E.D.

そこで, 新しい変数 $z_1, \dots, z_M$ を導入し, $(**)$ から, 連立線型 diophantine 方程式系

$$(***) \begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1N}x_N - C_1y + z_1 = 0 \\ \dots \dots \dots \\ b_{M1}x_1 + \dots + b_{MN}x_N - C_My + z_M = 0 \end{cases}$$

を構成すると,

(3.2) 系. $(\beta_1, \dots, \beta_N, m, \gamma_1, \dots, \gamma_M) \in \mathbb{N}^{N+M+1}$ が $(***)$ の解となるための必要十分条件は $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in m\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N$ となることである。

さて、(***) の係数行列を $\Phi(P)$ で表し、 $E_{\Phi(P)}$ や $E_{\Phi(P)}^*$ 等の記号は第1節をこのまま踏襲する。

(3.3) 補題.

$$(N+M+1) - (\Phi(P) \text{ の階数}) = d+1$$

(3.4) 補題. 写像 $\omega: E_{\Phi(P)} \rightarrow \mathbb{N}$ を

$$\omega((\beta_1, \dots, \beta_N, n, \sigma_1, \dots, \sigma_M)) = n$$

と定義すれば、 ω は $E_{\Phi(P)}$ 上の重量写像である。

(3.5) 命題. $(\beta_1, \dots, \beta_N, n, \sigma_1, \dots, \sigma_M) \in E_{\Phi(P)}$ が完全基本解となるための必要十分条件は、 $n=1$ で $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N$ が P の頂点となることである。

(3.6) 系. (3.4) の重量写像 ω は良好である。

以上の準備によって、(1.9) と (1.15) の御利益が $\omega(P, \lambda)$ に授けられる。即ち、

(3.7) 定理. $P \subset \mathbb{R}^N$ を任意の d 次元 整凸多面体 と仮定せよ。この時, $\omega(P, \lambda)$ は 非負整数 を 係数 とする λ の 多項式 で、その 次数 は 高々 d 次 である。しかも $\omega(P, \lambda) = \sum_{i=0}^d h_i \lambda^i$ とすると, 不等式

$$h_d + h_{d-1} + \cdots + h_{d-i} \leq h_0 + h_1 + \cdots + h_i + h_{i+1}$$

が 任意の $0 \leq i \leq [(d-1)/2]$ に対し 成立 する。

(3.8) 系.
$$i(P, n) = \sum_{i=0}^d h_i \binom{n+d-i}{d}$$

は n に関する d 次の 多項式 (Ehrhart 多項式 [2] と呼ぶ) で, その 最高次 の 係数 $\omega(P, 1)/d!$ は P の 相対体積 と一致 する。

(3.9) 補題. $(\beta_1, \dots, \beta_N, n, \sigma_1, \dots, \sigma_M) \in E_\Phi$ が E_Φ の 正解 となるための 必要十分条件 は, $n \geq 1$ で しかも $(\beta_1/n, \dots, \beta_N/n) \in P - \partial P$ となること である。ここで ∂P は P の 境界 である。

すると,

$$S = \max \{ i ; h_i \neq 0 \}$$

と置けば, (1.12) より

$$\begin{aligned} (d+1) - s &= c_w(E_{\Phi(P)}^*) \\ &= \min \left\{ m > 0; \exists \beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \rho - \partial\rho \text{ such that } m\beta \in \mathbb{Z}^N \right\} \end{aligned}$$

とわかる。しかも, (1.13) より

(3.10) 命題. $\omega(P, \lambda) = \sum_{i=0}^d h_i \lambda^i$, $s = \max\{i; h_i \neq 0\}$ とすると, 任意の $0 \leq i \leq [s/2]$ に対し, 不等式

$$h_0 + h_1 + \dots + h_i \leq h_s + h_{s-1} + \dots + h_{s-i}$$

が成立する。

C) 順序凸多面体

$\bar{X} = \{x_1, \dots, x_d\}$ を任意の半順序集合とする時, $\mathbb{R}^d$ の凸多面体 $\Theta_{\bar{X}}$ を

$$\Theta_{\bar{X}} := \left\{ (d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^N; \begin{array}{l} \text{(i)} 0 \leq d_i \leq 1 \\ \text{(ii)} \bar{X} \text{ 上 } x_i \leq x_j \text{ ならば } d_i \leq d_j \text{ である} \end{array} \right\}$$

で定義し, これを $\bar{X}$ の 順序凸多面体 (Stanley [11, p.241]) と呼ぶ。 $\dim \Theta_{\bar{X}} = d$ である。例としては,

$N=3$ とし.

$$\underline{X} = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \circ$$

図-5

とすると,

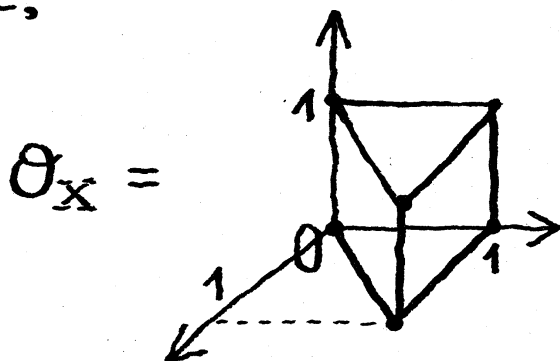


図-6

となる。

さて, θ_X は $\mathbb{R}^N$ の単位立方体に含まれる整凸多面体で, その任意の頂点の座標の各成分は 0 か 1 である。今, θ_X の頂点全体の集合 V_X に

$$(\#) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \leq (\beta_1, \dots, \beta_N) \\ \iff \alpha_i \leq \beta_i \quad (1 \leq i \leq N)$$

で順序を導入する。[例之ば, 図-6 の θ_X ならば半順序集合 V_X は 図-7 の分配束である。]

すると,

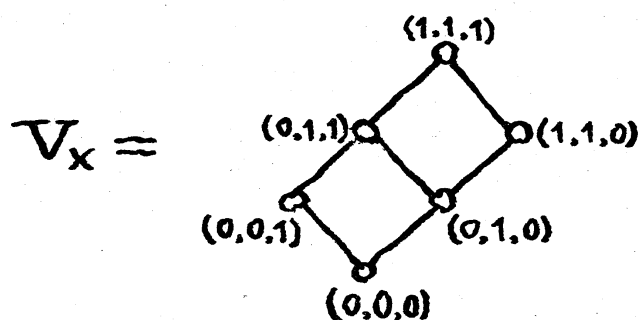


図-7

(3.11) 命題. X の半順序集合としての ideal 全体の集合を $\mathcal{I}(X)$ で表す。 $I \in \mathcal{I}(X)$ の時, $x_i \in I$ (resp. $x_i \notin I$) ならば $\varepsilon_i^{(I)} = 1$ (resp. $\varepsilon_i^{(I)} = 0$) として $(\varepsilon_1^{(I)}, \dots, \varepsilon_N^{(I)}) \in \mathbb{R}^N$ を対応させる。この時

$$V_X = \{(\varepsilon_1^{(I)}, \dots, \varepsilon_N^{(I)}); I \in \mathcal{I}(X)\}$$

である。

(3.12) 系. V_X に $(\#)$ で順序を導入すれば, $\mathcal{I}(X)$ に包含関係で順序を導入した分配束と同型になる。

一般に, 有限半順序集合 X と非負整数 n に対して, Stanley [6] に従って

$$\Omega(X, n) := \# \left\{ \sigma: X \rightarrow \mathbb{N} ; \begin{array}{l} \text{(i) } X \text{ 上 } "x < y \text{ ならば"} \\ \text{は } " \sigma(x) \geq \sigma(y) " \text{ がある。} \\ \text{(ii) } \max_{x \in X} \sigma(x) \leq n \end{array} \right\}$$

と置く。すると,

$$(3.13) \text{ 補題. } i(\mathcal{O}_X, n) = \Omega(X, n)$$

(3.14) 系. 半順序集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ の添字は X 上 $x_i < x_j$ ならば $i < j$ となるように付けられていると仮定し, $\omega(\mathcal{O}_X, \lambda) = \sum_{i=0}^d h_i \lambda^i$ と置く。この時, h_i は d 次対称群 S_d の元 $\pi = (a_1 a_2 \dots a_d)$ 上の条件を満たすものの個数に等しい:

$$(i) x_{a_r} < x_{a_s} \text{ ならば } r < s$$

$$(ii) \# \{r; a_r > a_{r+1}\} = i$$

(3.15) 系. $\#(X) = d$, $\omega(\mathcal{O}_X, \lambda) = \sum_{i=0}^d h_i \lambda^i$ とし, $s = \max\{i; h_i \neq 0\}$ と置けば

$$s = (d-1) - (X \text{ の階数})$$

となる。

(3.16) 系 (Stanley). $\omega(\mathcal{O}_X, \lambda) = \sum_{i=0}^s h_i \lambda^i$ ($h_s \neq 0$) とする時, 数列 $(h_0, h_1, \dots, h_s)$ が symmetric であるための必要十分条件は X が 系純 (pure) となることである。

さて, 有限半順序集合 X が与えられた時, X に最小元 $0^\wedge$ と最大元 $1^\wedge$ を添加した半順序集合を $X^\wedge$ で表す。 $X^\wedge$ に含まれる飽和な全順序部分集合の collection

$$\mathcal{A} = \{ \alpha_0^{(i)} < \alpha_1^{(i)} < \dots < \alpha_{p_i}^{(i)} \}_{i=1,2,\dots,t}$$

が (i) $\alpha_0^{(1)} = 0^\wedge$ (ii) $\alpha_{p_t}^{(t)} = 1^\wedge$ (iii) $\alpha_{p_{i-1}}^{(i-1)} \geq \alpha_0^{(i)}$ ($1 < i \leq t$) の条件を満たす時, $\mathcal{A}$ を $X^\wedge$ の 階段 と呼ぶ。

$$l(\mathcal{A}) := \sum_{i=1}^t p_i$$

をその 長さ と言う。そして,

$$pt(X) := \min \{ l(\mathcal{A}) ; \mathcal{A} \text{ は } X^\wedge \text{ の階段} \}$$

を X の 位置 energy と呼ぶ。[例えは, 図-8 の半順序集合 X では $pt(X) = 4$, $X^\wedge$ の階数 = 8 である。]

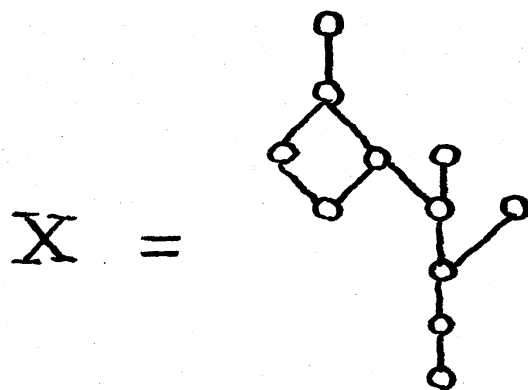


図-8

(3.17) 定理 ([4]).

$$sq(\Phi_{\mathcal{O}_X}) = (X^{\wedge} \text{の階数}) - pt(X)$$

有限半順序集合から構成される凸多面体 $\mathcal{O}_X$ の (Ehrhart の頂式 $i(\mathcal{O}_X, n)$ 或は) $\omega(\mathcal{O}_X, \lambda)$ の係数から構成される数列の特徴付けを探せ——— ということとは “数え上げ” の組合せ論の興味ある問題である。何れにせよ, $\omega(\mathcal{O}_X, \lambda) = \sum_{i=0}^s h_i \lambda^i$, $h_s \neq 0$, とした時,

$$(i) \quad h_i \leq h_{s-i} \quad (0 \leq i \leq [s/2])$$

$$(ii) \quad h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{[s/2]}$$

なる不等式を予想するのはどうであろうか。

参 考 文 献

- [1] M.F.Atiyah & I.G.Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra," Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [2] E.Ehrhart, Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire I & II, J. Reine Angew. Math. **226** (1967), 1-29 & **227** (1967), 25-49.
- [3] T.Hibi, Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, Nagoya Math. J. **112** (1988), to appear.
- [4] ———, Linear diophantine equations and Stanley's P-partitions, in preparation.
- [5] M.Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Ann. of Math. **96** (1972), 318-337.
- [6] R.Stanley, Ordered structures and partitions, Mem. Amer. Math. Soc. **119** (1972).
- [7] ———, Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs, Duke Math. J. **40** (1973), 607-632.
- [8] ———, Magic labelings of graphs, symmetric magic squares, systems of parameters, and Cohen-Macaulay rings, Duke Math. J. **43** (1976), 511-531.
- [9] ———, Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math. **28** (1978), 57-83.
- [10] ———, Linear diophantine equations and local cohomology, Inventiones Math. **68** (1982), 175-193.
- [11] ———, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wodsworth, Monterey, Calif., 1986.