

Full-harmonic structure とマルコフ過程

静岡大理 郡 敏昭

§0 序

ポテンシャル論の公理的な 取り扱いが Brelot
Bauer によりおこなわれたが その後 Meyer Hansen
Boboc Constantinescu Cornea により 「非負
優調和函数全体と Excessive function 全
体とが一致する Semigroup を構成しその Semi
group が連続な path を持った 強マルコフ過程の
semigroup of transitions となるようにする
こと」という問題が あつかわれてきた。これ
は境界条件を自由にしたマルコフ過程である
と考えられる (State space は locally compact
, not compact)。一方 F.Y. Maeda は 倉持
による full superharmonic function を公理的
にあつかうため Full harmonic structure を

導入した。もし Maeda による *full superharmonic function* 全体で非負なもの *Excessive function* 全体とが一致する十分に良いマルコフ過程ができるなら *Full harmonic structure* を一つ与えることがいくつかの境界条件をひとまとめに与えることに相当していると考えられる。この論文では与えられた *Full harmonic structure* よりマルコフ過程を構成する問題をあつかう。

§1 準備

• Brelot の Axiom

S : *locally compact separable Hausdorff space not compact, connected*

S の開集合 U に対して $C(U) = \{ \text{finite continuous function on } U \}$ の linear subspace $\mathcal{H}(U)$ が与えられ $\mathcal{H} = \{ \mathcal{H}(U); U \text{ 開集合全体} \}$ が sheaf をつくっているとする。 G を相対 compact な開集合とするとき G が regular であるとは、すべての ∂G 上の連続函数 f が $\bar{G}$ 上への一意の連続な拡張 H_f^G をもち、その G への制限が $\mathcal{H}(G)$ に属し $f \geq 0$ on $\partial G \Rightarrow H_f^G \geq 0$ on $\bar{G}$ をみたすこととする。

Axiom T. Regular domain 全体は S の base になっている。

Axiom H. 任意の domain G に対し $h_n \in \mathcal{H}(G)$

$h_n \uparrow \Rightarrow \sup h_n \equiv +\infty$ or $\sup h_n \in \mathcal{H}(G)$

• Maeda の Axiom

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} D \text{ domain, not relatively compact} \\ \text{or } \partial D \text{ compact} \end{array} \right\}$$

$D \in \mathcal{D}$ に対し $\mathcal{H}(D)$ の linear subspace $\tilde{\mathcal{H}}(D)$ が与えられたとする。

$\mathcal{G} = \{ G \text{ open set } \mid \partial G \text{ compact} \}$ 。

$\tilde{\mathcal{H}}(G) = \{ u \in \mathcal{H}(G); \text{ 任意の } G \text{ の component } D \in \mathcal{D} \text{ に属す集合 } D \text{ に対し } \text{Rest}_D u \in \tilde{\mathcal{H}}(D) \}$ 。

$D \in \mathcal{D}$ が regular とは 2 頁の regular の定義で $G \rightarrow D; \mathcal{H}(G) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(D), H_f^G \rightarrow \tilde{H}_f^D$ とおきかえて定義されるものとする。 $G \in \mathcal{G}$ は そのすべての component が 2 頁の意味もしくは上に定義された意味で regular なとき regular という。

Axiom S. $D \in \mathcal{D}$ (i) $u \in \tilde{\mathcal{H}}(D)$ $D' \subset D$

$D' \in \mathcal{D} \Rightarrow \text{Rest}_{D'} u \in \tilde{\mathcal{H}}(D')$

(ii) if $u \in \mathcal{H}(D)$, $\exists K$ compact set $\partial D \subset K$ and $\text{Rest}_{D-K} u \in \tilde{\mathcal{H}}(D-K)$ then $u \in \tilde{\mathcal{H}}(D)$

Axiom $\tilde{T}$. 任意の compact set K に対し $K' \supset K$,
 $S-K'$ regular となるような compact set K' が
 存在する. superharmonic function を

$$\mathcal{S}(G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} u : \text{lower semicontinuous function} \\ \text{on } G \\ u > -\infty \text{ \& } u \not\equiv +\infty \text{ on any} \\ \text{component of } G \\ \forall f \in C(\partial G), f \leq u \Rightarrow H_f^G \leq u \end{array} \right\}$$

と, full superharmonic function を

$$\tilde{\mathcal{S}}(G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(G), \text{ 任意の } D \in \mathcal{D}, \text{ regular} \\ \bar{D} \subset G \text{ に対し} \\ \forall f \in C(\partial D) f \leq u \Rightarrow \tilde{H}_f^D \leq u \end{array} \right\}$$

と定義する。

以下 $S \supset S_0 \in \mathcal{D} : S_0 \text{ regular}$ を一つ固定し
 て話す。ことわらないかぎり 函数は S_0 上で定義さ
 れた函数とする。

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ \begin{array}{l} p \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0) \\ \text{if } \exists u \in \tilde{\mathcal{S}}(S_0), p+u \geq 0 \text{ then } u \geq 0 \end{array} \right\}$$

と定義する

仮定

① $1 \in \tilde{\mathcal{S}}(S_0)$

② For $\forall x \in S_0 \exists p \in \mathcal{P}$ such that $0 < p(x) < \infty$

定義. $P, q \in \mathcal{P}$ $P > q \Leftrightarrow P - q \in \mathcal{P}$

次の 1.1 ~ 1.5 は Maeda により証明されている.

1.1 (定義) $P \in \mathcal{P}$, $W \in \mathcal{G}$ $\overline{W} \subset S_0$ に対し

$$\mathcal{B}_W(P) \equiv \left\{ u \in \mathcal{P}; \exists s \in \mathcal{F}(W) \right. \\ \left. u = P + s \text{ on } W \right\}$$

$$P_W(x) \equiv \inf \{ u(x) , u \in \mathcal{B}_W(P) \}$$

1.2. $P_W \in \mathcal{P} \cap \mathcal{F}(S_0 - \overline{W})$

$$P_W < P$$

$$\exists u \in \mathcal{P} \cap \widetilde{\mathcal{F}}(W) \quad P = P_W + u$$

1.3. $\mathcal{P}_\# \equiv \mathcal{P} \cap \mathcal{F}(S_0)$ とおく

$$B_P(x) \equiv \sup \{ u(x) , u \in \mathcal{P}_\# , u < P \}$$

は以下を満足する.

$$B_P \in \mathcal{P}_\# , \quad B_P < P$$

$$B_P = \text{INF.} \{ u \in \mathcal{P}_\# \mid u < P \} \quad \text{ここに INF は}$$

order $<$ による inf とする.

1.4. $P, q \in \mathcal{P} \Rightarrow B(P+q) = P+q$

1.5. $B_P(x) = \inf \left\{ P_{S_0-K}(x) ; \begin{array}{l} K \text{ compact } \subset S_0 \\ S_0-K \text{ regular} \end{array} \right\}$

1.6. $P_W = \sup \{ u \in \mathcal{P} \mid u < v \quad \forall v \in \mathcal{B}_W(P) \}$

1.7. $P_K \equiv P - P_{S_0-K}$ と定義すると

$$P_K = \sup \{ u \in \mathcal{P} \mid u < P \quad u \in \widetilde{\mathcal{F}}(S_0 - K) \}$$

1.6, 1.7 の SUP は order $<$ に $\leq$ 3.

1.8. (i) $W_1, W_2 \in \mathcal{G}$ $W_1 \subset W_2 \subset S_0 \Rightarrow P_{W_1} < P_{W_2}$

(ii) K_1, K_2 compact $K_1 \subset K_2 \Rightarrow P_{K_1} < P_{K_2}$

(iii) K compact $W \in \mathcal{G}$ $K \subset W \Rightarrow P_K < P_W$

(iv) $W \in \mathcal{G}$ K compact $W \subset K \Rightarrow P_W < P_K$

1.9. $P_K = (P_W)_K$ K compact $W \in \mathcal{G}$

1.10. $P_K = \inf(P_{K_n} ; K_n \downarrow \text{compact } K = \bigcap_n K_n)$

$P_W = \sup(P_K ; K \subset W \in \mathcal{G})$

$P_K = \inf(P_W ; K \subset W \text{ relatively compact })$
open

1.11. $(P_{K_1})_{K_2} = P_{K_1 \cap K_2}$, $(P_{W_1})_{W_2} = P_{W_1 \cap W_2}$

1.12. $P_{K_1 \cup K_2} + P_{K_1 \cap K_2} = P_{K_1} + P_{K_2}$

Minimum Principle

$G \in \mathcal{G}$ $\bar{G} \subset S_0$ $u \in \mathcal{J}(G)$ $\exists \exists$

$\exists \eta \exists \xi \liminf_{G \ni x \rightarrow \xi} u(x) \geq 0 \quad \forall \xi \in \partial G$

$\exists p \in \mathcal{P} \quad u + p \geq 0 \text{ on } G$

かつ $\exists t \in \mathbb{R}$ $u \geq 0$

1.13 if $P \notin \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ for some compact K
then $BP = 0$

1.14. $\alpha \geq 0, P, P_1, P_2 \in \mathcal{P} \quad P = P_1 + P_2$

$\Rightarrow P_K = (P_1)_K + (P_2)_K \quad (\alpha P)_K = \alpha P_K$

1.15. $u \in \tilde{\mathcal{H}}(G)$ ($G \in \mathcal{G}$) が $\forall V \in \mathcal{G}$ regular $\bar{V} \subset G$ に対し $\tilde{H}_{u|_V}^V(x) \leq u(x)$ ($\forall x \in V$) なるとき u を strict に full superharmonic と
いう。 $P \in \mathcal{P}$ が $W \in \mathcal{G}$ 上で strict に full superharmonic なら $\forall V \in \mathcal{G}$ $\bar{V} \subset W$ に対し P_V は V 上で strict に full superharmonic となる。
3.

§2 Complete maximum principle をみたす kernel

Theorem 2.1. 任意の $P \in \mathcal{P} \cap C(S_0)^{(1)}$ に対し 次の条件をみたす positive proper kernel V^P が一意的に存在する。

- a) $\forall g \in \mathcal{B}_f(S_0)^{(1)}$ $g \geq 0$ に対し $V^P g \in \mathcal{P} \cap C(S_0)$
 且 $g \in \mathcal{B}_K(S_0)^{(1)}$ なら $V^P g \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - \overline{\{g > 0\}})$
 b) $V^P 1(x) = p(x) - Bp(x) \quad \forall x \in S_0$

(1) $C(S_0)$ は S_0 上の連続函数全体, $\mathcal{B}(S_0)$ は Borel measurable function 全体, 下添字 f は bounded を下添字 K は compact support の函数を示す。 $\mathcal{B}_K(S_0)$ は bounded Borel measurable で compact support をもつ函数全体。

証明は Meyer [2] とまったく同様におこなわれる。すなわち $\forall x \in S_0$ を固定し $K \xrightarrow{w} P_K(x)$ が 1.8, 1.10, 1.12 より S_0 の任意の集合に対し Outer Capacity として拡張できる。その Borel set への制限 $V_x^P(dy)$ は (nonnegative) measure。 $V_{1_K}^P(x) = P_K(x)$ は lower semicontinuous だから $\forall g \in \mathcal{B}_f(S_0)$ に対し $V^P g \in \mathcal{B}(S_0)$ によって V^P は kernel。 $V^P g \in \mathcal{P}$, $V^P g < P$ ($\forall g \in \mathcal{B}_f(S_0)$) もすぐわかる。これより Meyer が示したように $V^P g(x)$ の連続性かしたかう。 $V^P 1_K(x) = P_K(x)$ は 1.2 より $\in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ 。これと「 $h_n \in \widetilde{\mathcal{H}}(W)$ $h_n \uparrow \Rightarrow \sup h_n \equiv +\infty$ or $\sup h_n \in \widetilde{\mathcal{H}}(W)$ 」が任意の $W \in \mathcal{O}$ に対し成り立つことより, $V^P g \in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - \overline{\{g > 0\}})$ が任意の $g \in \mathcal{B}_K(S_0)$ $g \geq 0$ に対ししたかう。一意性も Meyer と同様である。

Theorem 2.2. $P \in C_f(S_0) \cap \mathcal{P}$ に対し Theorem 2.1 による kernel を $V^P(x, dy)$ とする。このとき

- a) $V^P; \mathcal{B}_f(S_0) \xrightarrow{w} C_f(S_0)$
- b) V^P は complete maximum principle をみたす。
- c) if $\exists K$ compact $P \in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ then $V^P \neq$
— 8 —

$$\in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K) \quad (\forall f \in \mathcal{B}_b(S_0))$$

d) c) と同じ仮定で x を固定して measure $V^P(x, dy)$ の Support は K にふくまれる。

e) $\forall \varepsilon > 0$ に対して compact set K が存在して $\sup_{x \in H} V^P(x, S_0 - K) < \varepsilon$ とできる。ここに H は任意の compact set。

証明 (4) Meyer [3] p204 の Remark より

$a \geq 0$, $f, g \in C_b^+(S_0)$ に対して $a + V^P f(x) \geq V^P g(x)$ on $\{x, g(x) > 0\}$ から $a + V^P f(x) \geq V^P g(x)$ everywhere がしたかうことを言え
はよい。 $P \in \mathcal{P}_b$ の場合 $P = BP$ だから $V^P f \equiv 0$ ($\forall f \in \mathcal{B}_b(S_0)$) このときは c.m.p は成

りたっている。一般の場合 $F = \{g(x) > 0\}$ とおくと Theorem 2.1. a) より $V^P g \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - F)$

(F compact より $S_0 - F \in \mathcal{G}$ に注意)。また

仮定より constant a は full superharmonic.

よって $a + V^P f - V^P g \in \mathcal{J}(S_0 - F)$ 。 $V^P f$,

$V^P g$ は連続だから $\lim_{S_0 - F \ni x \rightarrow \zeta} (a + V^P f(x) - V^P g(x))$

$$= a + V^P f(\zeta) - V^P g(\zeta) \geq 0 \quad (\forall \zeta \in \partial(S_0 - F))$$

$\subset F$). Minimum Principle より $a + V^P f -$

$$V^P g \geq 0 \text{ on } S_0 - F.$$

(c) $0 \leq f \leq 1$ としよ。 $-V^P f = -P + BP + V^P(1-f) = -P + V^P(1-f)$ か $P \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ と 1.13 よりしたから したがって $P \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ より $-V^P f \in \tilde{\mathcal{J}}(S_0 - K) \rightarrow V^P f \in \mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{J}}(S_0 - K)$ ためから $V^P f \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$.

(d) $-P \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ より $0 \in \mathcal{B}_{S_0 - K}(P)$ (定義 1.1) よって $P_{S_0 - K} = 0$ $P = P_K$ また 1.13 より $BP = 0$. ゆえに $V^P(x, S_0) = V^P 1(x) = P(x) - BP(x) = P(x) = P_K(x) = V^P 1_K(x) = V^P(x, K)$.

(e) Axiom $\tilde{T}$ と 1.5 より $P_{S_0 - K_n}(x) \downarrow BP(x)$ か 任意の compact exhaustion (K_n) に対して言える。 $V^P(x, S_0 - K_n) = P(x) - BP(x) - P_{K_n}(x) = P_{S_0 - K_n}(x) - BP(x) \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$). Dini の定理より この収束は compact set 上で一様。

Corollary 2.3

$\exists (V_\lambda^P)_{\lambda > 0}$ submarkov resolvent kernel such that $V^P - V_\lambda^P = \lambda V^P V_\lambda^P = \lambda V_\lambda^P V^P$

Lemma 2.4.

$$P, q \in \mathcal{D} \cap C_k(S_0) \quad P > q$$

$$\Rightarrow V^P = V^q + V^{P-q}$$

($\because$ 1.14 より)

Proposition 2. 5. $P \in \mathcal{D} \cap C_k(S_0)$ V^P
 (V_λ^P) を Theorem 2.1, Corollary 2.3 のそれぞれと
 する。このとき 任意の $S \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0)$ に対
 し $\lambda V_\lambda^P S \leq S$.

証明 Meyer [3] IX T.70 より, $f, g \in C_K^+$
 $(S + V^P f - V^P g)(x_0) > 0$ なる x_0 が存在すると
 き $(S + V^P f - V^P g)(x) \geq 0$ on $\{x : g(x) > 0\}$
 から $S + V^P f - V^P g \geq 0$ everywhere がしただか
 ら を言えはよいが これは Theorem 2.2
 (b) と同じように Minimum Principle からし
 たかろう。

Proposition 2.6.

- a) P strictly full superharmonic on $W \in \mathcal{G}$
 $\Rightarrow P_W$ strictly full superharmonic on W
- b) P strictly full superharmonic on $\overset{\circ}{K}$ (K is
 compact set)
 $\Rightarrow P_K$ is strictly full superharmonic on $\overset{\circ}{K}$
 $\Rightarrow V^P(x, A) > 0 \quad \forall x \in K \quad \forall A \subset \overset{\circ}{K}$

§ 3 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_{\lambda}^p f(x)$ について。及び Excessive functions.

Full superharmonic function の理論においても superharmonic function の理論の場合と同じように 各点 x での $\mathcal{P}$ の positive な element の存在 (§1 の仮定) より 次のことがわかる (方法は Bauer [4] §2.4 ~ §2.7 におけると同様である)

Theorem 3.1. 次の条件 a) も) をみたす可算個の $(P_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ が存在する

a) $\forall K$ compact subset of S_0 に対して 部分列 (n_j) が存在し (P_{n_j}) は $C(K)$ で total: すなわち $\forall \mu$: Radon measure on K に対し $\mu(P_{n_j}) = 0 \ \forall P_{n_j} \Rightarrow \mu(f) = 0 \ \forall f \in C(K)$.
さらに 各 P_{n_j} は $\widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ に属するようになる。

も) $r_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{P_n}{\|P_n\|} \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ for $\forall N \geq 1$.

今後 任意の $f \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ を一つ固定して

$$P \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{P_n}{\|P_n\|} + f \quad \text{と おく。}$$

Lemma 3.2.

μ を bounded Radon measure on S_0 とする

$$\mu(S) \leq S(x) \quad \forall S \in \mathcal{F}_+(S_0)$$

$$\Rightarrow \mu(P) < P(x) \quad \text{if } \mu \neq \varepsilon_x$$

(証) 仮定より $\mu(P_n) \leq P_n(x)$ もし $\mu(P)$

$$= P(x) \quad \text{なら} \quad \forall n \text{ に 対し } \mu(P_n) = P_n(x).$$

したがって $\nu = \mu - \varepsilon_x$ とおくと x を含む任

意の compact set K に 対し $\nu(f) = 0 \quad \forall f \in$

$C(K)$ 故に Theorem 3.1 (a) より したがって ゆえに

$$\mu = \varepsilon_x.$$

Corollary 3.3. P は strictly full super harmonic.

Corollary 3.4. K compact subset of S_0 .

$x \in K$. $\mu \in C^*(K)$ とする このとき

$$\mu(S) \leq S(x) \quad \forall S \in \mathcal{F}_+(S_0) \quad \text{なら 是}$$

$$\mu(P_K) < P_K(x) \quad \text{又は } \mu = \varepsilon_x.$$

(証) Theorem 3.1 a) の後半より $\exists (P_{n_j}) \subset C_0(S_0)$

$\cap \mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ 故より $P_{n_j} < 2^{n_j} \|P_{n_j}\| P =$

$C_{n_j} P$. $P_{n_j} \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ 故に $(P_{n_j})_{S_0 - K} = 0$,

$(P_{n_j})_K = P_{n_j}$ 故に 2.14 より $(P_{n_j})_K <$

$C_{n_j} \cdot P_K$ より $C_{n_j} \cdot P_K - P_{n_j} \in \mathcal{P}$ であるから
 $\mu(C_{n_j} P_K - P_{n_j}) \leq C_{n_j} P_K(x) - P_{n_j}(x)$
 かつ $\mu(P_{n_j}) \leq P_{n_j}(x)$. したがってもし
 $\mu(P_K) = P_K(x)$ ならば $\mu(P_{n_j}) = P_{n_j}(x) \Rightarrow$
 $\mu(f) = f(x) \quad \forall f \in C(K) \Rightarrow \mu = \varepsilon_x$.

Lemma 3.5. $\lambda V_\lambda^{P_K} f(x) \rightarrow f(x) \quad (\forall f \in C(K) \quad \forall x \in K)$

証明: Theorem 2.2.(d) より $V_\lambda^{P_K}(x, \cdot)$ の
 Support は K に含まれるから $V_\lambda^{P_K}(x, \cdot)$ の Support
 も K に含まれる. $\mu_x^{K, \lambda} : f \mapsto \lambda V_\lambda^{P_K} f(x)$ に
 より $\mu_x^{K, \lambda} \in C^*(K)$ を define すると $\mu_x^{K, \lambda}$ の
 Support は K に含まれ $\|\mu_x^{K, \lambda}\| \leq 1$ であるから部
 分列 $(\lambda_j) \uparrow \infty$ がある μ_x^{K, λ_j} はある μ_x^K
 $\in C^*(K)$ に weak* で収束する. Proposition
 2.5 より $\mu_x^K(s) \leq s(x) \quad (\forall s \in \mathcal{S}_+(S_0))$
 かつしたがって Corollary 3.4 より $\mu(P_K) \leq P_K(x)$
 かつ $\mu = \varepsilon_x$. ところで Resolvent equation
 より $\lambda V_\lambda^{P_K}(P_K)(x) = \lambda V_\lambda^{P_K} V_\lambda^{P_K} 1(x) \rightarrow V_\lambda^{P_K} 1(x)$
 $= P_K(x) - B P_K(x) = P_K(x)$. (最後の等式は
 1.13. より) .

Proposition 3.6. $\forall P \in \mathcal{P} \cap C_t(S_0)$ に對し

$$L2 \quad V_\lambda^P S \geq V_\lambda^{P_K} S \quad (\forall S \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0))$$

 言証明. $V_\lambda^P S = V^P(S - \lambda V_\lambda^P S)$, $V_\lambda^{P_K} S =$
 $V^{P_K}(S - \lambda V_\lambda^{P_K} S)$, $S \geq \lambda V_\lambda^P S$, $S \geq \lambda V_\lambda^{P_K} S$
 に注意しよう. 又 $V^P(1_K f) \in \mathcal{P} \cap C_t(S_0) \cap \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - \overline{\{f > 0\}})$, $V^P(1_K \cdot 1) \neq P_K(x) = P_K(x) - B P_K(x)$
 $= V^{P_K} 1(x)$ と Theorem 2.1 の一義性より kernel
 $V^P(x, A \cap K)$ と kernel $V^{P_K}(x, A)$ は一致する
 ことに對して $V^P(1_{S_0-K} g) = V^P g - V^P(1_K g) = V^P g -$
 $V^{P_K} g = V^{P-P_K} g \quad (\forall g \in \mathcal{B}_t(S_0))$ となる. さて
 $t = V_\lambda^P g - V_\lambda^{P_K} g$ とおくと $t = (V^P S - V^{P_K} S)$
 $-\lambda V t - \lambda V V_\lambda^{P_K} g + \lambda V^{P_K} V_\lambda^{P_K} g$ 以上の注意より
 わかる. すなわち $(I + \lambda V)t = V^{P-P_K} g -$
 $V^{P-P_K}(\lambda V_\lambda^{P_K} g) = V^{P-P_K}(g - \lambda V_\lambda^{P_K} g)$. $h \equiv$
 $g - \lambda V_\lambda^{P_K} g \geq 0$ とおくと上の注意より $(I + \lambda V^P)$
 $t = V^P(1_{S_0-K} \cdot h)$. 今 $V^P(1_{S_0-K} \cdot h)(y) =$
 $t(y) + \lambda V^P t(y) \geq \lambda V^P t(y)$ for $y \in \{ \lambda t(y) > 0 \}$,
 $0 \geq V^P(\lambda t - 1_{S_0-K} \cdot h)(y)$ on $\{ \lambda t - 1_{S_0-K} h$
 $> 0 \}$ 故に complete maximum principle より
 $0 \geq V^P(\lambda t - 1_{S_0-K} \cdot h)$ everywhere. 故に
 $t + \lambda V^P t = V^P(1_{S_0-K} h) \geq \lambda V^P t$ 故に $t \geq 0$.

Proposition 3.7. $\lambda V_\lambda^P f(x) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \cap C(S_0) \quad \forall x \in S_0$

(証明) Proposition 2.5 と Proposition 3.6 より

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) - \lambda V_\lambda^P f(x) \leq f(x) - \lambda V_\lambda^{P_K} f(x) \\ &= (1_K f)(x) - \lambda V_\lambda^{P_K} (1_K f)(x) \end{aligned}$$

が任意の x を含む Compact set K に対し成り立つ $1_K f \in C(K)$ だから Lemma 3.5 より 右辺 $\rightarrow 0$

Lemma 3.8. (Maeda)

$S_n \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0) \quad S_n \uparrow \Rightarrow \sup S_n \equiv +\infty$ 又は $\sup S_n \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0)$

Proposition 3.9

$\tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) = \{ \text{finite excessive function for } (V_\lambda^P) \} \equiv \mathcal{E}_f$

証明. $t \in \mathcal{E}_f. \quad \lambda V_\lambda^P t(x) \uparrow t(x)$

$$\lambda V_\lambda^P t(x) = \lambda V^P (t - \lambda V_\lambda^P t)(x) \in \mathcal{P} \cap C(S_0)$$

Lemma 3.8 より $t \in \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \therefore \mathcal{E}_f \subset \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0)$

→ Proposition 3.7 より $\tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \cap C(S_0) \subset \mathcal{E}_f$

とこから $\forall S \in \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0)$ に対し $\exists (P_n) \subset \mathcal{P} \cap$

$C(S_0) \quad P_n(x) \uparrow S(x)$ が言えるから $P_n \in \mathcal{P}$

$\cap C(S_0) \subset \tilde{\mathcal{F}}_+(S_0) \cap C(S_0) \subset \mathcal{E}_f$ 従って $S \in \mathcal{E}_f$

$$\text{すなわち } \mathcal{F}_+(S_0) \subset \mathcal{E}_f$$

Proposition 3.7, Theorem 3.1. より $\forall x \in S_0$
 $\forall f \in C_K(S_0)$ に對して $\lambda V_\lambda f(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} f(x)$
 が したかう。

$\mathcal{X} \equiv B_b(S_0)$ は sup norm で Banach space,

$$\mathcal{X}_0 \equiv \overline{V(\mathcal{X})} \subset C_b(S_0),$$

T_t strongly continuous semigroup on $\mathcal{X}_0$,
 such that

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt \quad \begin{matrix} \forall f \in \mathcal{X}_0 \\ \forall \lambda \geq 0, \end{matrix}$$

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{F}_+(S_0) \cap \mathcal{X}, \quad \mathcal{L}' \equiv \mathcal{D} \cap \mathcal{X}$$

とする。

$\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}$ への map Q_t を 以下の様に定義する。

$$Q_t S(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \uparrow T_t(\lambda V_\lambda S)(x)$$

次の定理は Boboc, Constantinescu Cornea
 [5] に証明されている。 ($\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}'$ に制
 限しても $Q_t: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'$ map で その他
 も成り立つことは あきらか)

Theorem 3.10

$$(1) \quad Q_t S \leq Q_t S' \quad (S, S' \in \mathcal{L} \quad S \leq S')$$

$$Q_t (S + S') = Q_t S + Q_t S'$$

$$Q_t (\alpha S) = \alpha Q_t S \quad (\alpha > 0)$$

$$(2) \quad Q_t S(x) \leq S(x)$$

$$(3) \quad S_n \in \mathcal{L} \quad S_n \uparrow S \in \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow Q_t S_n \uparrow Q_t S$$

$$(4) \quad Q_t S_n(x) \text{ は } t \text{ の右連続函数}$$

$$(5) \quad Q_t Q_u = Q_{t+u} \quad \text{on } \mathcal{L}$$

$$(6) \quad V S(x) = \int_0^\infty Q_t S(x) dt \quad (S \in \mathcal{L})$$

$$(7) \quad \forall t > 0. \quad S \in \mathcal{L} \text{ に対して } \exists (f_n) \subset C_b^+(S_0)$$

$$V f_n(x) \uparrow Q_t S(x)$$

Theorem 3.1 Theorem 3.10 より

$$\exists P_t(x, dy) \quad \text{kernel on } S_0 \times \mathcal{B}(S_0)$$

$$\text{such that } P_t(p-f)(x) = Q_t p(x) - Q_t f(x)$$

$$(p-f \in (\mathcal{L} - \mathcal{L}) \cap C_K(S_0))$$

となることはわかる (Bourbaki Integration

Chap 4, §2) しかし $P_t p = Q_t p \quad p \in \mathcal{L}$

は一般には成立しないし また $Q_t p - Q_t f$

$\in C_K(S_0)$ から $1-f \in C_K(S_0)$ からしたかう
 とはかきらないので Kernel P_t が Semigroup
 になるかどうかはわからない。

§4. S_0 のコンパクト化とその上の Transition Semigroup

Theorem 3.1 の $(P_n)_{n \geq 1}$ は $\lambda V_{\lambda+1} P_n \leq P_n$ をみたすの
 で Kunita-Watanabe [6] の方法で S_0 をコンパクト
 化し その上の V_λ の拡張を $\hat{V}_\lambda$,
 対応する Transition Semigroup を $\hat{P}_t(x, dy)$ ($x \in \hat{S}$ $dy \in \mathcal{B}(\hat{S})$) とする。

$x \in S_0$ に対しては

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \hat{P}_t \hat{f}(x) dt &= \widehat{V_\lambda f}(x) = V_\lambda f(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f(x) dt \end{aligned}$$

で $\hat{P}_t \hat{f}(x)$, $Q_t f(x)$ は t の右連続函数た
 から $\hat{P}_t \hat{f} = Q_t f$. ここに $f \in \tilde{\mathcal{F}}(S_0)$ で f
 は $\hat{S}$ へのその拡張. $\hat{P}_t$ に対応するマルコフ

過程の S_0 の Set への Hitting probability と
 full harmonic measure $\tilde{H}^G(x, dy)$ の関係, $\hat{S}$
 の Branching Point 等については別のところに述

1. 3.

References

1. F. Y. Maeda ; Axiomatic Treatment of full-superharmonic functions, J. Sci. Hiroshima Univ. 30 (1966) 197-215
2. P. A. Meyer ; Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier 13 / 2 , 357-372 (1963)
3. P. A. Meyer ; Probabilités et potentiel.
4. H. Bauer ; Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie
5. N. Bădescu, C. Constantinescu, A. Cornea ; Semigroups of transitions on harmonic spaces, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (1967)
6. H. Kunita, T. Watanabe ; Some Theorems Concerning Resolvents over Locally Compact Spaces, Proc. 5-th. Berkeley Symp. 131-164