

楕円単数と2変数 p -進 L -関数

九大理 小塚和人 (Kazuhito Kozuka)

§1. 序

p を奇素数とし, 各整数 $n \geq 0$ に対し, $\zeta_{p^{n+1}}$ を 1 の原始 p^{n+1} 乗根とする. $\mathbb{Q}_p$ を p -進有理数体, U_n を $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})$ の主単数群とする. C_n を $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})$ の円単数で, U_n に属するものの全体のなす群とし, C_n の U_n における閉包を $\bar{C}_n$ と書き, $Y_\infty = \varprojlim U_n / \bar{C}_n$ とおく. ここに逆極限は, ノルムに関するものである. このとき, Y_∞ は自然に岩沢代数 $\mathbb{Z}_p[[T]]$ 上の加群になり, $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p)$ の自明でない各偶指標 χ に対し, Y_∞ の χ -固有空間の characteristic power series は, p -進 L -関数の補間級数と $\mathbb{Z}_p[[T]]$ において同伴になる. これは Coleman power series を用いると, 次の方針で証明される.

$\zeta_{p^{n+1}}$ ($n=0,1,2,\dots$) を, $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$ となるようにとる. このとき, p と素な $a \in \mathbb{Z}$ に対し, $(\zeta_{p^{n+1}}^a - 1 / \zeta_{p^{n+1}} - 1)_{n=0}^\infty \in \varprojlim_{(Norm)} \bigcup_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})}^\times$ となる. ここに, $\bigcup_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})}^\times$ は, $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})$ の単数群である. $C_a(T) = (1+T)^a - 1/T$ とおくと, $\zeta_{p^{n+1}}^a - 1 / \zeta_{p^{n+1}} - 1 = C_a(\zeta_{p^{n+1}} - 1)$ ($\forall n \geq 0$). 即ち, $C_a(T)$ は, 乗

法的形式群 G_m の Tate-module $\varprojlim (G_m)_{p^{n+1}}$ の生成元 $(\int_{p^{n+1}} -1)_{n=0}^{\infty}$ に関する $(\int_{p^{n+1}}^a -1 / \int_{p^{n+1}} -1)_{n=0}^{\infty}$ の Coleman power series である。このとき, parameter $z = \log(1+T)$ による対数微分 $d/dz \log C_a(T)$ の係数に, Bernoulli 数が現われる。従って, 巾級数 $d/dz \log C_a(T)$ と, $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p)/\mathbb{Q}_p$ の自明でない各偶指標 k に付随した p -変換の補間級数から, Cyclotomic な p -進 L -関数の補間級数が容易に構成され, さらに γ_n の k -固有空間の characteristic power series がこの補間級数であることも導かれる。

上記の内容の elliptic な場合での analogy は, 1変数の場合については Coates-Wiles [1], Goldstein [3] 等で, 2変数の場合の結果は, Yager [7] で述べられている。

ここでは, Yager [7] における楕円単数の定義を若干修正して, 改良された結果を述べる。主結果は, §6, §7 で紹介するが, これは, Goldstein [3] の定理 3.10.1) と定理 3.11.1) の2変数の場合における analogy に相当する。

§2. 記法

K を複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれる類数 1 の虚 2 次体, $-d_K$ を K の判別式, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする。 E を K 上定義された楕円曲線で, $\mathcal{O}_K$ による虚数乗法を持つものとし, γ_E を E の K 上の量指標, f を γ_E の導手とする。 E の Weierstrass model

$$(2.1) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

を, $g_2, g_3 \in \mathfrak{h}$ で, (2.1) の判別式が 64 の素因子のみで割り切れるように固定する. $p(z)$ を, (2.1) に関する Weierstrass p -関数, $\mathcal{L}$ を $p(z)$ の周期格子とし, $\mathcal{L} = \Omega_\infty \mathfrak{h}$ なる $\Omega_\infty \in \mathfrak{h}$ を固定する. $\xi(z) = (p(z), p'(z))$ とおく. $\mathfrak{h}$ の元 α を, E の自己準同型 $\xi(z) \mapsto \xi(\alpha z)$ とみなすことにより, $\mathfrak{h}$ と $\text{End}(E)$ とを同一視する.

K の素イデアル $\mathfrak{f}$ を, $(\mathfrak{f}, 6d_k N_f) = (1)$ かつ, $\mathfrak{f}$ の絶対次数が 1 となるようにとり, $\mathfrak{p} = N\mathfrak{f}$ とおく. $(\mathfrak{p})$ は K で完全分解する: $(\mathfrak{p}) = \mathfrak{f}\mathfrak{f}^*$. $\pi = \psi_E(\mathfrak{f})$, $\pi^* = \psi_E(\mathfrak{f}^*)$ とおく. π, π^* はそれぞれ, $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}^*$ の生成元である. 各 $\alpha \in \mathfrak{h}$ に対し, $E_\alpha = \ker(E \xrightarrow{\alpha} E)$ と書くことにし, $0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$F_m = K(E_{\pi^{*m+1}}), \quad K_n = K(E_{\pi^{n+1}}), \quad K_{n,m} = F_m(E_{\pi^{n+1}}),$$

$$F_\infty = \bigcup_{m \geq 0} F_m, \quad K_\infty = \bigcup_{n, m \geq 0} K_{n,m}$$

とおく. このとき $\mathfrak{f}$ は, 拡大 F_∞/K で不分岐, $\bigcup_{n \geq 0} K_n/K$ で完全分岐する. さらに, $\mathfrak{f}$ の上にある F_∞ の素イデアルの個数は有限である.

$\mathfrak{f}$ の上にある F_∞ の素イデアル $\mathfrak{f}_\infty$ を 1 つ固定し, $\mathfrak{f}_m = \mathfrak{f}_\infty \cap F_m$ とおく. $\mathfrak{f}$ の上にある F_m の各素イデアル $\mathfrak{v}$ に対し, $\mathfrak{f}_m^{(\mathfrak{v})}$ を F_m の $\mathfrak{v}$ による完備化とし, $\mathfrak{f}_m^{(\mathfrak{v})}$ の整数環を, $\mathfrak{h}_m^{(\mathfrak{v})}$ と書く. $\mathfrak{v}$ の上にある $K_{n,m}$ の素イデアルは唯一つである. この素イデアルによる $K_{n,m}$ の完備化を, $\mathfrak{K}_{n,m}^{(\mathfrak{v})}$ と書く. 特に, $\mathfrak{v} = \mathfrak{f}_m$ のときは, 添字の $\mathfrak{v}$ を省略し, 単に $\mathfrak{f}_m, \mathfrak{h}_m, \mathfrak{K}_{n,m}$ と書くことにする. $K_{\mathfrak{f}}$ を K

の σ による完備化, $\mathcal{O}_\sigma$ を K_σ の整数環とし, 以下 $\mathcal{O}_\sigma$ を $\mathbb{Q}_p$ の整数環 $\mathbb{Z}_p$ と同一視する.

$\tau_\sigma = (\sigma, F_\sigma/k) \in \text{Gal}(F_\sigma/k)$ とおく. $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{F}_m$ とおくと, τ_σ は拡大 $\mathcal{F}_\sigma/k_\sigma$ の Frobenius 同型を導入する. この同型も τ_σ と書くことにする.

$G_\infty = \text{Gal}(K_\infty/k)$, $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/k_{\infty,0})$, また, $E_{\pi^\infty} = \bigcup_{n \geq 0} E_{\pi^{n+1}}$, $E_{\pi^{*\infty}} = \bigcup_{m \geq 0} E_{\pi^{*m+1}}$ とおく. このとき, G_∞ の E_{π^∞} 及び $E_{\pi^{*\infty}}$ への作用を表わす標準的な指標 $k_1: G_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ 及び $k_2: G_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ が定義され,

$(k_1, k_2): G_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times$, $\Gamma \cong (1+p\mathbb{Z}_p) \times (1+p\mathbb{Z}_p)$ となる. さらに, $G_\infty = \Gamma \times \Delta$ と分解される. ここに Δ は位数 $p-1$ の $\mathbb{Z}$ 回群 2 個の直積で, 自然に $\text{Gal}(K_{\infty,0}/k)$ と同一視される. $\chi_1 = k_1|_\Delta$, $\chi_2 = k_2|_\Delta$ とおく. このとき, $\{\chi_1, \chi_2\}$ は $\text{Hom}(\Delta, \mathbb{Z}_p^\times)$ を生成する.

任意の $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ -加群 A と, $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, $A^{(i_1, i_2)}$ を A の $\chi_1^{i_1} \chi_2^{i_2}$ -固有空間とする. A は,

$$(2.2) \quad A = \bigoplus_{(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2} A^{(i_1, i_2)}$$

と分解される.

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]]$ とおく. $1+p\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元 u を固定し, $r_1, r_2 \in \Gamma$ を, $k_1(r_1) = k_2(r_2) = u$, $k_1(r_2) = k_2(r_1) = 1$ を満たす Γ の元とする. このとき, Γ は $\mathbb{Z}_p$ 上 $\{r_1, r_2\}$ によって生成される. B を Γ が連続に作用する compact な $\mathbb{Z}_p$ -加群とすると, B には,

$$(1+T_1)x = r_1 x, \quad (1+T_2)x = r_2 x \quad (\forall x \in B)$$

によつて, Λ -加群の構造が一意に定められる.

$$\omega_{n,1} = (1 + T_1)^{p^n} - 1, \quad \omega_{n,2} = (1 + T_2)^{p^n} - 1 \quad \text{とおく.}$$

ガロア群 G_0 は, 環 $\prod_{i \in \mathbb{Z}} K_{n,m}^{(i)}$, $\prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m^{(i)}$ に自然に作用する. $K_{n,m}$, F_m は, これらの環に diagonal に埋め込まれる. $\mathcal{O}_m = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_m^{(i)}$ とおく.

$\mathcal{U}_{n,m}^{(i)}$, $\mathcal{U}_{n,m}^{(i) \prime}$ をそれぞれ $K_{n,m}^{(i)}$ の単数群, 主単数群とし,

$$\mathcal{U}_{n,m}^{\prime} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{n,m}^{(i) \prime}, \quad \mathcal{U}_{n,m} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{n,m}^{(i)}$$

$$\mathcal{U}_{\infty}^{\prime} = \varprojlim \mathcal{U}_{n,m}^{\prime}, \quad \mathcal{U}_{\infty} = \varprojlim \mathcal{U}_{n,m}$$

とおく. ここに, 逆極限はノルムに関するものである. このとき, 群環 $\mathbb{Z}_p[G_0]$ は自然に $\mathcal{U}_{\infty}$ に作用し, 従つて $\mathcal{U}_{\infty}$ は compact な $\mathbb{P}$ -加群かつ Λ -加群になる.

$\hat{E}$ を, E の演算を parameter t :

$$(2.3) \quad t = -2x/y = -2P(z)/P'(z) = \varepsilon(z)$$

によつて展開して得られる形式群とする. $\mathbb{Z}$ を加法的形式群 G_a の parameter とみなすと, $\varepsilon(z)$ は $\hat{E}$ の exponential map となる. $\lambda: \hat{E} \rightarrow G_a$ を $\hat{E}$ の logarithm とする.

$\mathbb{Z}_0$ の代数閉包の完備化を $\mathbb{C}_p$ と書き, ord_p を, $\text{ord}_p(p) = 1$ と正規化した $\mathbb{C}_p$ の加法的付値とする.

K の整イデアル $\mathfrak{g}$ に対し, $\mathfrak{g} \cap \mathbb{Z}$ の正の生成元を $k_{\mathfrak{g}}$ と書くことにする. また, $\text{cl}(\mathfrak{g})$ を K の $\mathfrak{g}$ を法とする Strahl 類群, $R_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ を法とする K の Strahl 類体とする. $\text{Gal}(K_{n,m}/K)$ の指標 χ

に対し, f_x を $\ker \chi$ の固定体の K 上の導手とする. f_x が $\mathfrak{g}$ を割り切るとき, χ は reciprocity map を経て, $\mathcal{Cl}(\mathfrak{g})$ の ~~導手~~ 指標を導入する. この指標を χ' と書くことにする. 特に $\mathfrak{g} = f_x$ のとき, χ' は $\mathcal{Cl}(f_x)$ の原始的指標になる. これを, $\widehat{\chi}$ と書くことにする.

§3. 楕円単数

複素平面内の任意の格子 $\mathcal{L}$ に対し,

$$\sigma(z, \mathcal{L}) = z \prod_{\substack{\omega \in \mathcal{L} \\ \omega \neq 0}} (1 - z/\omega) \exp((z/\omega) + \frac{1}{2}(z/\omega)^2)$$

$$\theta(z, \mathcal{L}) = \Delta(\mathcal{L}) \exp(-6g_2(\mathcal{L})z^2) \sigma(z, \mathcal{L})^{12}$$

とおく. ここに, $\Delta(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の判別式で, $g_2(\mathcal{L}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{L} \\ \omega \neq 0}} \omega^{-2} |\omega|^{-2s}$ である.

K の任意の整イデアル $\mathcal{O}$ に対し,

$$\Theta(z, \mathcal{O}) = \theta(z, \mathcal{L})^{N_{\mathcal{O}}} / \theta(z, \mathcal{O}^{-1}\mathcal{L})$$

とおく. $\Theta(z, \mathcal{O})$ は, 格子 $\mathcal{L}$ に関する楕円関数となる.

各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/p-1\mathbb{Z})^2$ に対し, f と $f_{\chi_1^{i_1} \chi_2^{i_2}}$ の最大公約イデアルを $f^{(i_1, i_2)}$ と書き, K のイデアル $\mathcal{L}^{(i_1, i_2)}$ を, $f \subseteq \mathcal{L}^{(i_1, i_2)} \subseteq f^{(i_1, i_2)}$ となるように固定する. Yager [7] では, $\mathcal{L}^{(i_1, i_2)} = f$ の場合が扱われた. ここでは, $\mathcal{L}^{(i_1, i_2)} = f^{(i_1, i_2)}$ 及び $\mathcal{L}^{(i_1, i_2)} = f$ の場合が後に重要になるが, しばらくこの制限を設けずに議論を進める.

$\mathcal{L}^{(i_1, i_2)}$ の生成元 $c^{(i_1, i_2)}$ を固定し, $0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$F_m^{(i_1, i_2)} = F_m(E_{c^{(i_1, i_2)}}), \quad K_{n, m}^{(i_1, i_2)} = K_{n, m}(E_{c^{(i_1, i_2)}})$$

とおく。虚数乗法論により,

$$R_{\mathbb{C}^{(i_1, i_2)} g^{*m+1}} \subseteq F_m^{(i_1, i_2)} \subseteq R_{f g^{*m+1}}, \quad R_{\mathbb{C}^{(i_1, i_2)} g^{*n+1} g^{*m+1}} \subseteq K_{n, m}^{(i_1, i_2)} \subseteq R_{f g^{*n+1} g^{*m+1}}$$

となる。 $\rho_m^{(i_1, i_2)} = \Omega_\infty / c^{(i_1, i_2)} \pi^{*m+1}$ とおく。 $B_m^{(i_1, i_2)}$ を, K の $f g^*$ と素な整イデアルの集合で, $\{(\mathfrak{c}, F_m^{(i_1, i_2)} / K); \mathfrak{c} \in B_m^{(i_1, i_2)}\}$ が重複なく $\text{Gal}(F_m^{(i_1, i_2)} / F_m)$ に一致するものとする。 $\mathcal{J}$ を $6pf$ と素な K の整イデアル全体の集合とする。各 $\mathfrak{o} \in \mathcal{J}$ に対し,

$$\Lambda_m^{(i_1, i_2)}(z, \mathfrak{o}) = \prod_{\mathfrak{c} \in B_m^{(i_1, i_2)}} \Theta(z + \psi_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{c}) \rho_m^{(i_1, i_2)}, \mathfrak{o})$$

とおく。このとき, $\Lambda_m^{(i_1, i_2)}(z, \mathfrak{o})$ は F_m 係数の $p(z)$ と $p'(z)$ の有理関数となり, $B_m^{(i_1, i_2)}$ のとり方にはよらない。

$\mathcal{S} = \{ \mu: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \mu(\mathfrak{o}) = 0 \text{ for almost all } \mathfrak{o} \in \mathcal{J}, \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{J}} (N\mathfrak{o} - 1) \mu(\mathfrak{o}) = 0 \}$ とおき, 各 $\mu \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\Theta(z; \mu) = \prod_{\mathfrak{o} \in \mathcal{J}} \Theta(z, \mathfrak{o})^{\mu(\mathfrak{o})}, \quad \Lambda_m^{(i_1, i_2)}(z; \mu) = \prod_{\mathfrak{o} \in \mathcal{J}} \Lambda_m^{(i_1, i_2)}(z, \mathfrak{o})^{\mu(\mathfrak{o})}$$

とおく。

$z_n = \Omega_\infty / \pi^{*n+1}$, $u_n = \varepsilon(z_n)$ とおく。 $\varepsilon_n \in \mathcal{O}^*$ を $\varepsilon_n \pi^* \equiv 1 \pmod{g^{*n+1}}$ なるものとする。このとき, $C_{n, m}'^{(i_1, i_2)} = \{ \Lambda_m^{(i_1, i_2)}(\varepsilon_n^{*m+1} z_n; \mu) \mid \mu \in \mathcal{S} \}$ とおくと, $C_{n, m}'^{(i_1, i_2)}$ は, $K_{n, m}$ の単数群の G_∞ -部分群となる。

各 $\mu \in \mathcal{S}$ に対し, $\Lambda_m^{(i_1, i_2)}(z; \mu) \in F_m(p(z), p'(z))$ となるから, 各 $\sigma \in \text{Gal}(F_\infty / K)$ に対し, $\Lambda_m^{(i_1, i_2) \sigma}(z; \mu)$ が定義される。

$$e_{n, m}^{(i_1, i_2)}(\mu) = \Lambda_m^{(i_1, i_2)} z_{g^{*n}}^{-1}(\varepsilon_n^{*m+1} z_n; \mu), \quad e^{(i_1, i_2)}(\mu) = (e_{n, m}^{(i_1, i_2)}(\mu))_{n, m \geq 0}$$

とおく。このとき, diagonal map により $C_{n, m}'^{(i_1, i_2)} \subseteq \mathcal{V}_{n, m}'$ とみる。 $e^{(i_1, i_2)}(\mu) \in \mathcal{V}_\infty'$ となる。

一般に, $\beta = (\beta_{n,m}^{(\omega)})_{n,m \geq 0} \in \mathcal{U}_\infty'$ とすると, 各 $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ 及び $\mathfrak{s}$ の上にある F_m の各素イデアル $\mathfrak{v}$ に対し, Coleman power series $C_{m,\beta}^{(\omega)}(T) \in \mathcal{U}_m^{(\omega)}[[T]]$ が存在して, $\beta_{n,m}^{(\omega)} = C_{m,\beta}^{(\omega)} \zeta_{\mathfrak{s}}^{-n}(u_n) \ (\forall n \geq 0)$ が成り立つ ([2], [7]). $\mathcal{U}_m[[T]] = \prod_{\mathfrak{v}|\mathfrak{s}} (\mathcal{O}_m^{(\omega)}[[T]])$ と書く. これは, G_∞ -加群になる. $C_{m,\beta}(T) = (C_{m,\beta}^{(\omega)}(T))_{\mathfrak{v}|\mathfrak{s}} \in \mathcal{U}_m[[T]]$ とおく.

定理 3.1. 各 $\mu \in \mathcal{S}$ に対し,

$$C_{m,e^{(i_1,i_2)}(\mu)}(T) = \bigwedge_m^{(i_1,i_2)} (\pi^{*-(m+1)} \lambda(T); \mu)$$

である.

§ 4. 2変数 P -変換

本節では, 後で用いられる 2変数 P -変換の基本的性質を述べる.

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ を $\mathbb{C}_p$ の整数環, μ を $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ -値 measure とする. このとき, μ に中級数

$$(4.1) \quad f_\mu(T_1, T_2) = \sum_{n,m \geq 0} \left(\int_{\mathbb{Z}_p^2} \binom{x_1}{n} \binom{x_2}{m} d\mu \right) T_1^n T_2^m \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$$

が対応し, 対応 $\mu \mapsto f_\mu$ は, $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ -値 measures 全体から, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ への全単射になる. $f(T_1, T_2) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ に対し, f に対応する measure を μ_f と書くことにする.

$\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ は, $\alpha = \omega(\alpha) \langle \alpha \rangle$ と一意に分解される. ここに $\omega(\alpha)$ は, 1 の $p-1$ 乗根, $\langle \alpha \rangle \equiv 1 \pmod{p}$ である. $\ell(\alpha) \in \mathbb{Z}_p$ を, $\langle \alpha \rangle = u^{\ell(\alpha)}$ なる $\mathbb{Z}_p$ の元とする.

$(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$, $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ に対し, P -変換

$$\Gamma_f^{(i_1, i_2)} : \mathbb{Z}_p^2 \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{C}_p}$$

は,

$$\Gamma_f^{(i_1, i_2)}(\rho_1, \rho_2) = \int_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*} \langle \alpha_1 \rangle^{\rho_1} \langle \alpha_2 \rangle^{\rho_2} \omega^{i_1}(\alpha_1) \omega^{i_2}(\alpha_2) d\mu_f$$

によって定義される. さらに,

$$f^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = \sum_{n, m \geq 0} \left(\int_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*} \binom{\ell(\alpha_1)}{n} \binom{\ell(\alpha_2)}{m} \omega^{i_1}(\alpha_1) \omega^{i_2}(\alpha_2) d\mu_f \right) T_1^n T_2^m \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$$

とおくと,

$$\Gamma_f^{(i_1, i_2)}(\rho_1, \rho_2) = f^{(i_1, i_2)}(u^{\rho_1-1}, u^{\rho_2-1})$$

が成り立つ.

ν を導手が p^m の Dirichlet 指標とするとき, 任意の $f \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ に対し, $f_{(\nu, 1)}, f_{(1, \nu)} \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ を,

$$(4.2) \quad f_{(\nu, 1)} = 1/\tau(\nu^{-1}, J_{p^m}) \cdot \sum_{a=1}^{p^m} \nu^{-1}(a) f(J_{p^m}^a(1+T_1)-1, T_2)$$

$$(4.3) \quad f_{(1, \nu)} = 1/\tau(\nu^{-1}, J_{p^m}) \cdot \sum_{a=1}^{p^m} \nu^{-1}(a) f(T_1, J_{p^m}^a(1+T_2)-1)$$

によって定義する. ここに, J_{p^m} は任意の 1 の p^m 乗根, $\tau(\nu^{-1}, J_{p^m}) = \sum_{a=1}^{p^m} \nu^{-1}(a) J_{p^m}^a$ で, (4.2), (4.3) の右辺は, J_{p^m} のとりかえにはよらない.

ν_1, ν_2 が導手が p の Dirichlet 指標のとき, $(f_{(\nu_1, 1)})_{(1, \nu_2)} = (f_{(1, \nu_2)})_{(\nu_1, 1)}$ である. この中核数を, $f_{(\nu_1, \nu_2)}$ と書く.

$(j, k) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ とすると,

$$\Gamma_{f_{(\omega^j, \omega^k)}}^{(i_1, i_2)}(\rho_1, \rho_2) = \Gamma_f^{(i_1+j, i_2+k)}(\rho_1, \rho_2)$$

となる. χ_1, χ_2 が第 2 種 Dirichlet 指標のとき,

$$\Gamma_{f_{(\chi_1, \chi_2)}}^{(i_1, i_2)}(\rho_1, \rho_2) = f^{(i_1, i_2)}(\chi_1(u)u^{\rho_1-1}, \chi_2(u)u^{\rho_2-1})$$

となる. さらに,

$$(f_{(y_1, y_2)})_{(w_1^i, w_2^i)} = f_{(y_1 w_1^i, y_2 w_2^i)}$$

が成り立つ.

$f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ に対し,

$$U_1 f = f(T_1, T_2) - \frac{1}{p} \sum_{a=1}^p f(J_p^a(1+T_1)-1, T_2)$$

$$U_2 f = f(T_1, T_2) - \frac{1}{p} \sum_{a=1}^p f(T_1, J_p^a(1+T_2)-1)$$

とおく. $U_1 f, U_2 f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ である.

$$D_j = (1+T_j)^{\frac{1}{2}} T_j \quad (j=1, 2) \text{ とおく.}$$

任意の measurable function $\phi: \mathbb{Z}_p^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ に対し,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p} \phi d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi d\mu_{U_1 f}, \quad \int_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^*} \phi d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi d\mu_{U_2 f},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*} \phi d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi d\mu_{U_1 U_2 f},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi d\mu_{D_j f} = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi(x_1, x_2) x_j d\mu_f \quad (j=1, 2)$$

が成り立つ.

直接計算により, 作用素 $f \mapsto f_{(U_1, U_2)}$, $f \mapsto U_1 f$, $f \mapsto D_j f$ ($j=1, 2$) は, 互いに可換であることがわかる.

補題 4.1. $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ とし, $g \in \mathbb{C}_p[[T_1, T_2]]$ は $D_1 g = f$ を満たすとする. このとき,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p} x_1^{-1} d\mu_f = g(0, 0) - \frac{1}{p} \sum_{a=1}^p g(J_p^a - 1, 0)$$

である.

§ 5. $\mathcal{G}_p^{(1,1)}(J-1, J'-1)$ の計算

$\widehat{\mathcal{O}}_\infty$ を $\mathbb{Z}_p$ の整数環の完備化とする. $\eta(T) = \Omega_p T + \dots$ を, Yager [7] で与えられた, $\widehat{\mathcal{E}}$ から G_m への $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$ 上の同型とし, $i(T)$ を,

$\eta(T)$ の inverse とする.

各 $\beta \in \mathcal{U}_\infty$ & $0 \leq m \in \mathbb{Z}$ に対し, [7] で定義されたように,

$$g_{m,\beta}(T) = \lambda'(T)^{-1} d/dT \log C_{m,\beta}(T) \in \mathcal{O}_m[[T]],$$

$$g_\beta(T_1, T_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(F_m/K)} (g_{m,\beta}^\sigma(T_1))_{g_m} (1+T_2)^{k_2(\sigma)} \in \widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$$

$$h_\beta(T_1, T_2) = g_\beta(i(T_1), T_2)$$

とおく. さらに, $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し,

$$g_\beta^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = (U, h_\beta)^{(i_1-1, i_2-1)} (U^{-1}(1+T_1)-1, (1+T_2)^{-1}-1)$$

とおく. このとき, $\beta \mapsto g_\beta^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ は, $\mathcal{U}_\infty$ から $\widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$ への $\wedge$ -準同型で ([7] 定理 22), $g_\beta^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = g_{\beta^{(i_1, i_2)}}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ となる. ここに, $\beta^{(i_1, i_2)}$ は, canonical な分解 (2.2) で, $A = \mathcal{U}_\infty$ の場合における β の $\mathcal{U}_\infty^{(i_1, i_2)}$ -成分である.

各 $n \geq 0$ に対し, V_n を 1 の p^n -乗根全体のなす群とし, $V_\infty = \bigcup_{n \geq 0} V_n$ とおく.

以下, 本節では, $(J, J') \in V_\infty^2$ に対し, $g_\beta^{(i_1, i_2)}(J-1, J'-1)$ を, 前節で述べた 2 変数 P -変換の性質を用いて計算する. 特に, $\beta = \langle e^{(i_1, i_2)}(u) \rangle^{(i_1, i_2)}$ の場合の結果が, §6, §7 で述べる定理の証明で有用となる.

$\varphi_J, \varphi_{J'}$ を, $\varphi_J(u) = J, \varphi_{J'}(u) = J'$ を満たす第 2 種 Dirichlet 指標とし, $\varphi_J \omega^{i_1}, \varphi_{J'} \omega^{i_2}$ の導手をそれぞれ $p^{\eta_J(i_1)}, p^{\eta_{J'}(i_2)}$ とする.

以下, $\varphi_J \omega^{i_1}, \varphi_{J'} \omega^{i_2}$ のうち少なくとも一方は自明でないとは仮定

する.

各 $m \geq 0$, $\beta \in \mathcal{U}_\infty$, $\sigma \in \text{Gal}(F_m/K)$ に対し,

$$h_{m,\beta,\sigma}(T) = (g_{m,\beta}^\sigma(W))_{g_m}|_{W=i(T)}$$

とおく. このとき, $m+1 \geq n_j(i_2)$ なる m に対して,

$$(U_i h_\beta)_{(\varphi_j^{-1} \omega^{i_1}, \varphi_j^{-1} \omega^{-i_2})} \equiv \sum_{\sigma \in \text{Gal}(F_m/K)} (U_i h_{m,\beta,\sigma}(T_1))_{(\varphi_j \omega^{i_1}, 1)} ((1+T_2)^{k_2(\sigma)})_{(1, \varphi_j^{-1} \omega^{-i_2})} \pmod{\omega_{m+1,2} \hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]}$$

が成立する. また,

$$D_1(\log(C_{m,\beta}^\sigma(W))_{g_m}|_{W=i(T_1)}) = \Omega_g^{-1} h_{m,\beta,\sigma}(T_1)$$

も成り立つ. 以下 $\int_p \pi_{n+1}$ は

$$i(\int_p \pi_{n+1} - 1) = u_n = \varepsilon(\Omega_\infty / \pi^{n+1})$$

を満たすようにとられているものとする. このとき, [7]補題

2 を考慮に入れることにより, $m+1 \geq n_j(i_2)$ なる m に対し,

次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} & g_\beta^{(i_1, i_2)}(j-1, j'-1) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p} x_1^{-1} d\mu(U_i h_\beta)_{(\varphi_j \omega^{i_1}, \varphi_j^{-1} \omega^{-i_2})} \\ &= \Omega_g \sum_{\sigma \in \text{Gal}(F_m/K)} \left\{ U_i \left(\log(C_{m,\beta}^\sigma(W))_{g_m}|_{W=i(T_1)} \right)_{(\varphi_j \omega^{i_1}, 1)} ((1+T_2)^{k_2(\sigma)})_{(1, \varphi_j^{-1} \omega^{-i_2})} \right\} \Big|_{(0,0)} \\ &= \begin{cases} \Omega_g / \pi(\varphi_j^{-1} \omega^{-i_1}, \int_p \pi_j(i_1)) \cdot \sum_{\sigma \in \text{Gal}(F_m/K)} \left(\sum_{a=1}^{p_{n_j}(i_1)} \varphi_j^{-1} \omega^{-i_1}(a) \varphi_j^{-1} \omega^{-i_2}(k_2(\sigma)) \right. \\ \quad \left. \times \log_p(C_{m,\beta}^\sigma(T))_{g_m}|_{T=[a]_{\hat{\mathbb{E}}(u_{n_j}(i_1)-1)}} \right) \quad (\text{if } \varphi_j \omega^{i_1} \neq 1) \\ \Omega_g / p \sum_{\sigma \in \text{Gal}(F_m/K)} \varphi_j^{-1} \omega^{-i_2}(k_2(\sigma)) \sum_{a=1}^{p-1} \log_p \left\{ C_{m,\beta}^\sigma(0) / (C_{m,\beta}^\sigma(T))_{g_m}|_{T=[a]_{\hat{\mathbb{E}}(u_0)}} \right\} \\ \quad (\text{if } \varphi_j \omega^{i_1} = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

ここに, $\log_p$ は $\mathbb{C}_p^\times$ 上定義された p -進対数である.

次に, $\beta = \langle e^{(i_1, i_2)}(\mu) \rangle^{(i_1, i_2)}$ ($\mu \in \mathcal{S}$) の場合を考える.

定理 3.1 により, $n, m \geq 0$, $\sigma \in \text{Gal}(F_m/k)$, $a \geq 1$ に対し,

$$(C_{m, e^{(i_1, i_2)}(\mu)}(T))_{g_m} \Big|_{T=[a]_{\mathbb{E}(u_n)}} = \Lambda_m^{(i_1, i_2)}(\varepsilon_n^{m+1} a z_n; \mu)$$

$$(C_{m, e^{(i_1, i_2)}(\mu)}(0))^\sigma = \Lambda_m^{(i_1, i_2)}(0; \mu)^\sigma$$

となる.

$n+1 \geq n_f(i_1)$, $m+1 \geq n_f(i_2)$ なる n, m に対し, $\text{Gal}(K_{n,m}/k)$ の指標 $\varphi_f^{(1)} \chi_1^{i_1} \varphi_f^{(2)} \chi_2^{i_2}$ を,

$$\varphi_f^{(1)} \chi_1^{i_1} \varphi_f^{(2)} \chi_2^{i_2}(\sigma) = \varphi_f \omega^{i_1}(k_1(\sigma)) \cdot \varphi_f \omega^{i_2}(k_2(\sigma))$$

によって定義する.

$\mathfrak{g} \neq (1)$ を K の整イデアルとするとき, $C \in \mathcal{C}(\mathfrak{g})$ に対し, $\varphi_{\mathfrak{g}}(C) \in R_{\mathfrak{g}}$ を, Robert [6] で定義された ray class invariant とする. このとき, 直接計算により,

$$\Lambda_m^{(i_1, i_2)}(\varepsilon_n^{m+1} z_n, \alpha)_{k_{n,m}^{(i_1, i_2)}} = N_{K_{n,m}^{(i_1, i_2)}/K_{n,m}} \left(\varphi_{\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{n+1} g^{*m+1}}(C_0)^{N\alpha} / \varphi_{\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{n+1} g^{*m+1}}(C_0)^{\sigma(\alpha)} \right)_{\sigma_{n,m}^{(i_1, i_2)}},$$

$$\Lambda_m^{(i_1, i_2)}(0, \alpha)_{k_{n,m}^{(i_1, i_2)} g^{*m+1}} = N_{F_m^{(i_1, i_2)}/F_m} \left(\varphi_{\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{*m+1}}(C'_0)^{N\alpha} / \varphi_{\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{*m+1}}(C'_0)^{\sigma(\alpha)} \right)$$

が任意の $\alpha \in \mathfrak{g}$ に対して成り立つことがわかる. ここに,

$$k_{n,m}^{(i_1, i_2)} = k_{\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{n+1} g^{*m+1}}, \quad \sigma_{n,m}^{(i_1, i_2)} = ((\varepsilon_n^{m+1} C^{(i_1, i_2)} \pi^{*m+1} + \pi^{n+1}), R_{\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{n+1} g^{*m+1}}/K),$$

$\sigma(\alpha) = (\alpha, R_{\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{n+1} g^{*m+1}}/K)$ で, C_0, C'_0 はそれぞれ $\mathcal{C}(\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{n+1} g^{*m+1})$, $\mathcal{C}(\mathbb{E}^{(i_1, i_2)} g^{*m+1})$ の unit ray class である.

$\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ の任意の指標 χ に対し,

$$S_{\mathfrak{g}}^{(p)}(\chi) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathfrak{g})} \chi^{-1}(C) \log_p(\varphi_{\mathfrak{g}}(C))$$

とおく.

類体論により, $[K_{n,m}^{(i_1, i_2)} : R_{\mathbb{C}^{(i_1, i_2)} g^{n+1} g^{*m+1}}]$ は, n, m に無関係となる. この拡大次数を $d^{(i_1, i_2)}$ と書く.

$\eta_s^{(i_1, i_2)} = (\chi_1^{i_1} \chi_2^{i_2})' \left((\varepsilon_{n_s(i_1)-1}^{m+1} c^{(i_1, i_2)} \pi^{*m+1} + \pi^{n_s(i_1)}) \right)$ とおく. これは m には依存しない.

各 $\mu \in \mathcal{S}$ に対し,

$$h_\mu^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = \sum_{n \in g} \mu(n) \left(Nn - \omega^{i_1}(\psi_E(n)) \omega^{i_2}(\overline{\psi}_E(n)) \right. \\ \left. \times (1+T_1)^{l(\psi_E(n))} (1+T_2)^{l(\overline{\psi}_E(n))} \right)$$

とおく. このとき, Robert [6] §2.3 定理2を用いて直接計算することにより, 次の定理が得られる.

定理5.1. $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/p-1\mathbb{Z})^2$, $\mu \in \mathcal{S}$, $(j, j') \in \mathcal{T}_\infty^2$ とし, $\varphi_j \omega^{i_1}$, $\varphi_{j'} \omega^{i_2}$ のうち少なくとも一つは自明でないとする. このとき, $m+1 \geq n_{j'}(i_2)$ なる $m \geq 0$ に対し,

(1) $\varphi_j \omega^{i_1} \neq 1$ なら,

$$g_{\langle e^{(i_1, i_2)}_{(j)} \rangle^{(i_1, i_2)}}(j-1, j'-1) = \frac{\Omega_g d^{(i_1, i_2)} \eta_j^{(i_1, i_2)} \int l(c^{(i_1, i_2)}) \int' l(\pi^{n_s(i_1)})}{k_{\mathbb{C}^{(i_1, i_2)} g^{n_s(i_1)} g^{*m+1}} \mathcal{Z}(\varphi_j^{-1} \omega^{-i_1}, \int_p n_s(i_1)) \\ \times h_\mu^{(i_1, i_2)}(j-1, j'-1) S_{\mathbb{C}^{(i_1, i_2)} g^{n_s(i_1)} g^{*m+1}}^{(P)}((\varphi_j^{(1)} \chi_1^{i_1} \varphi_{j'}^{(2)} \chi_2^{i_2})')$$

$$(2) g_{\langle e^{(0, i_2)}_{(j)} \rangle^{(0, i_2)}}(0, j'-1) = \frac{\Omega_g d^{(0, i_2)} \omega^{i_2}(\pi) \int' l(\pi)}{p k_{\mathbb{C}^{(0, i_2)} g^{*m+1}}} \cdot h_\mu^{(0, i_2)}(0, j'-1)$$

$$\times (p - \int' l(\pi) \omega^{i_2}(\pi)) S_{\mathbb{C}^{(0, i_2)} g^{*m+1}}^{(P)}((\varphi_{j'}^{(2)} \chi_2^{i_2})')$$

となる.

次に, $\square^{(l_1, l_2)} = f^{(l_1, l_2)}$ と $\square^{(l_1, l_2)} = f$ の場合を比較してみよう.

$\square^{(l_1, l_2)} = f^{(l_1, l_2)}$ のとき, $c^{(l_1, l_2)}, e^{(l_1, l_2)}(\mu), d^{(l_1, l_2)}, \eta_f^{(l_1, l_2)}$ をそれぞれ $f^{(l_1, l_2)}, \hat{e}^{(l_1, l_2)}(\mu), \tilde{\alpha}^{(l_1, l_2)}, \hat{\eta}_f^{(l_1, l_2)}$ と書く. $\square^{(l_1, l_2)} = f$ のとき, $c^{(l_1, l_2)}, e^{(l_1, l_2)}(\mu), \eta_f^{(l_1, l_2)}$ もそれぞれ, $f, \hat{e}^{(l_1, l_2)}(\mu), \hat{\eta}_f^{(l_1, l_2)}$ と書く. 後者の場合は, $d^{(l_1, l_2)} = 1$ である.

[6] § 2.3 定理 2 により,

$$\frac{S_{fg^{n_f(l_1)}g^{n_{f'}(l_2)}}^{(P)}(l_f^{(1)}\chi_1^{(1)}l_f^{(2)}\chi_2^{(2)})'}{k_{fg^{n_f(l_1)}g^{n_{f'}(l_2)}}} = \frac{S_{fg^{n_f(l_1)}g^{n_{f'}(l_2)}}^{(P)}(l_f^{(1)}\chi_1^{(1)}l_f^{(2)}\chi_2^{(2)})'}{k_{fg^{n_f(l_1)}g^{n_{f'}(l_2)}}} \prod_{\substack{\mathcal{V} \text{ 素イデアル} \\ \mathcal{V} \nmid f, \mathcal{V} \nmid f^{(l_1, l_2)}}} \{1 - (\widetilde{l_f^{(1)}\chi_1^{(1)}l_f^{(2)}\chi_2^{(2)}})^{-1}(\mathcal{V})\}$$

となる. $f^{(l_1, l_2)}p$ と素な任意の素イデアル $\mathcal{V}$ に対し, $\alpha_{\mathcal{V}}$ を $\mathcal{V}$ の任意の生成元とする. $\nu_{\mathcal{V}}^{(l_1, l_2)} = (\widetilde{l_f^{(1)}\chi_1^{(1)}l_f^{(2)}\chi_2^{(2)}})^{-1}(\mathcal{V})$, $\varepsilon^{(l_1, l_2)} = \hat{\eta}_f^{(l_1, l_2)} / \hat{\eta}_{f^{(l_1, l_2)}}^{(l_1, l_2)}$ とおく. $\varepsilon^{(l_1, l_2)}$ は f には依存しない. $G_{\langle \hat{e}^{(l_1, l_2)}(\mu) \rangle^{(l_1, l_2)}}(T_1, T_2)$, $G_{\langle \hat{e}^{(l_1, l_2)}(\mu) \rangle^{(l_1, l_2)}}(T_1, T_2)$ の $(T_1, T_2) = (j-1, j'-1)$ における値を比較することにより, 次の系が得られる.

系 5.2.

$$G_{\langle \hat{e}^{(l_1, l_2)}(\mu) \rangle^{(l_1, l_2)}}(T_1, T_2) = (\tilde{\alpha}^{(l_1, l_2)})^{-1} \varepsilon^{(l_1, l_2)} (T_1 + 1)^{\ell(f) - \ell(f^{(l_1, l_2)})} \\ \times \left\{ \prod_{\substack{\mathcal{V} \nmid f \\ \mathcal{V} \nmid f^{(l_1, l_2)}}} (1 - (\nu_{\mathcal{V}}^{(l_1, l_2)})^{-1} (1 + T_1)^{-\ell(\alpha_{\mathcal{V}})} (1 + T_2)^{-\ell(\overline{\alpha_{\mathcal{V}}})}) \right\} G_{\langle \hat{e}^{(l_1, l_2)}(\mu) \rangle^{(l_1, l_2)}}(T_1, T_2)$$

である.

§ 6. $\mathcal{Y}_\infty^{(i_1, i_2)}$ の構造

本節では, 任意の $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, $\mathbb{C}^{(i_1, i_2)} = \mathbb{C}$ と仮定する.

$n, m \geq 0$ に対し, $C_{n,m}^{(i_1, i_2)}$ を $\mathcal{V}_{n,m}'$ の部分群とみて, $C_{n,m}^{(i_1, i_2)} = C_{n,m}^{(i_1, i_2)} \cap \mathcal{V}_{n,m}$ とおき, $\overline{C_{n,m}^{(i_1, i_2)}}$ を $C_{n,m}^{(i_1, i_2)}$ の閉包とする. $\overline{C_{n,m}^{(i_1, i_2)}}$ の $\chi_1^{i_1} \chi_2^{i_2}$ -固有空間を $\overline{C_{n,m}^{(i_1, i_2)}}$ と書き,

$$\overline{C_{n,m}} = \bigoplus_{(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2} \overline{C_{n,m}^{(i_1, i_2)}} \quad (\subseteq \mathcal{V}_{n,m})$$

とおく. $\overline{C_{n,m}}$ の $\chi_1^{i_1} \chi_2^{i_2}$ -固有空間は, $\overline{C_{n,m}^{(i_1, i_2)}}$ に一致する.

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1, i_2)} = \varprojlim_m (\mathcal{V}_{n,m} / \overline{C_{n,m}})^{(i_1, i_2)}$$

とおく. 逆極限はノルムに関するものである.

$D^{(i_1, i_2)}$ を $\{ \langle \vartheta^{(i_1, i_2)}(\mu) \rangle^{(i_1, i_2)} \mid \mu \in \mathcal{S} \}$ によって生成される $\mathcal{V}_\infty$ の Λ -部分加群とする. このとき,

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1, i_2)} \cong \mathcal{V}_\infty^{(i_1, i_2)} / D^{(i_1, i_2)}$$

となる.

Yager [7] で, Λ -単準同型

$$W^{(i_1, i_2)}: \mathcal{V}_\infty^{(i_1, i_2)} \longrightarrow \Lambda$$

が構成され, さらに, $\phi^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \in (\widehat{\mathcal{O}_\infty}[[T_1, T_2]])^\times$ が存在して,

$$S_\beta^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = \phi^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) W^{(i_1, i_2)}(\beta) \quad (\forall \beta \in \mathcal{V}_\infty^{(i_1, i_2)})$$

となることが証明された. $\mathcal{H}^{(i_1, i_2)} = \mathcal{I}_m W^{(i_1, i_2)}$ とおく. $H^{(i_1, i_2)}$ を,

$\{ h_\mu^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2); \mu \in \mathcal{S} \}$ によって生成される Λ のイデアルとする.

$(i_1, i_2) \neq (0, 0), (1, 1)$ のとき, $H^{(i_1, i_2)} = \Lambda$. $H^{(0, 0)} = T_1 \Lambda + T_2 \Lambda$,

$H^{(1,1)} = (T_1 + 1 - u) \wedge + (T_2 + 1 - u) \wedge$ である. ([7] 補題 28)

定理 6.1. 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \in \Lambda$ が存在して,

$$y_{\infty}^{(i_1, i_2)} \cong \mathcal{H}^{(i_1, i_2)} / g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) H^{(i_1, i_2)}$$

となる.

(証明) $W^{(i_1, i_2)}(D^{(i_1, i_2)}) = g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) H^{(i_1, i_2)}$ となる $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \in \Lambda$ を構成すればよい.

(1) $(i_1, i_2) = (0, 0)$ のとき; 定理 5.1 により, $e^{(0,0)} \in D^{(0,0)}$ が存在して,

$$g_{e^{(0,0)}}^{(0,0)}(T_1, T_2) / T_1 \in \widehat{\mathcal{O}}_{\infty}[[T_1, T_2]]$$

かつ, 任意の $(j, j') \in (\mathbb{V}_{\infty} - \{1\})^2$ に対し,

$$g_{e^{(0,0)}}^{(0,0)}(j-1, j'-1) / j-1 = \frac{\Omega_g \chi^{(0,0)} j' \ell(\pi^{\eta_{j'}(0)})}{k_g \eta_j(0) g^{\pi \eta_{j'}(0)} \tau(\varphi_j^{-1}, \int_P \eta_j(0))} S_{g^{\eta_j(0)} g^{\pi \eta_{j'}(0)}}^{(p)}((\varphi_j^{(1)} \varphi_{j'}^{(2)})')$$

となる. さらに, 任意の $\mu \in \mathcal{S}$ に対して,

$$g_{\langle e^{(0,0)} / \mu \rangle^{(0,0)}}^{(0,0)}(T_1, T_2) = h_{\mu}^{(0,0)}(T_1, T_2) \cdot 1/T_1 \cdot g_{e^{(0,0)}}^{(0,0)}(T_1, T_2)$$

が成り立つ. 従って, $g^{(0,0)}(T_1, T_2) = W^{(0,0)}(e^{(0,0)}) / T_1$ とおくことにより,

$$W^{(0,0)}(D^{(0,0)}) = g^{(0,0)}(T_1, T_2) H^{(0,0)}$$

が成立する.

(2) $(i_1, i_2) = (1, 1)$ のとき; $\mu_1, \dots, \mu_t \in \mathcal{S}$ 及び $f_1, \dots, f_t \in \Lambda$ が存在して, $T_1 + 1 - u = \sum_{j=1}^t f_j(T_1, T_2) h_{\mu_j}^{(1,1)}(T_1, T_2)$ となる.

$$\hat{e}^{(1,1)} = \prod_{j=1}^t f_j \langle \hat{e}^{(1,1)}(\mu_j) \rangle^{(1,1)}, \quad \hat{e}^{(1,1)} = \prod_{j=1}^t f_j \langle \hat{e}^{(1,1)}(\mu_j) \rangle^{(1,1)}$$

とおく. このとき, [7]定理29の証明から, $g_{\hat{e}^{(1,1)}}^{(1,1)}(T_1, T_2) \in (T_1+1-u) \hat{\mathcal{O}}_{\infty}[[T_1, T_2]]$ となり, さらに系5.2から $g_{\hat{e}^{(1,1)}}^{(1,1)}(T_1, T_2) \in (T_1+1-u) \hat{\mathcal{O}}_{\infty}[[T_1, T_2]]$ となることがわかる. よって, $g^{(1,1)}(T_1, T_2) = W^{(1,1)}(\hat{e}^{(1,1)}) / (T_1+1-u)$ とおくと, (1)と同様に,

$$W^{(1,1)}(D^{(1,1)}) = g^{(1,1)}(T_1, T_2) H^{(1,1)}$$

が成立する.

(3) $(i_1, i_2) \neq (0,0), (1,1)$ のとき; (1),(2)の場合と同様に, $e^{(i_1, i_2)} \in D^{(i_1, i_2)}$ が存在して

$$g_{\langle \hat{e}^{(i_1, i_2)}(\mu) \rangle^{(i_1, i_2)}}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = f_{\mu}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) g_{e^{(i_1, i_2)}}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \quad (\forall \mu \in \mathcal{S})$$

となる. $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = W^{(i_1, i_2)}(e^{(i_1, i_2)})$ とおけばよい.

§7. p-進 L-関数との関係

Yager [7]では, 前節の $\overline{C}_{n,m}^{(1,0)}$ の $\chi_1 \chi_2$ -固有空間を $\overline{C}_{n,m}^{(i_1, i_2)}$ とおいて, Λ -加群 $\varprojlim \overline{v}_{n,m}^{(i_1, i_2)} / \overline{c}_{n,m}^{(i_1, i_2)}$ の characteristic power series と p-進 L-関数との関連性が考察された. $\overline{C}_{n,m}^{(i_1, i_2)}$ を, 前節で述べたように定義すると, $\gamma_{\infty}^{(i_1, i_2)}$ の characteristic power series $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ は, 原始的な p-進 L-関数の補間級数と, $\hat{\mathcal{O}}_{\infty}[[T_1, T_2]]$ で同伴になる. このことについて, これから説明する.

各 $k \geq 1$ に対し, $L(\overline{\Psi}_E^k, \rho)$ を, 量指標 $\overline{\Psi}_E^k$ に対する原始的な Hecke L-関数とする. また, $L_f(\overline{\Psi}_E^k, \rho)$ を, $\overline{\Psi}_E^k$ を mod f の量指標とみたときの Hecke L-関数とする. 任意の $0 \leq j < k$ に対し,

$$(7.1) \quad L_{\infty}(\overline{\psi}_E^{k+j}, k) = (1 - \psi_E(g)^{k+j}/(Ng)^{j+1}) (1 - \overline{\psi}_E(g^*)^{k+j}/(Ng^*)^k) \\ \times (2\pi/\sqrt{d_K})^j \Omega_{\infty}^{-(k+j)} L(\overline{\psi}_E^{k+j}, k)$$

$$(7.2) \quad L_{f,\infty}(\overline{\psi}_E^{k+j}, k) = (1 - \psi_E(g)^{k+j}/(Ng)^{j+1}) (1 - \overline{\psi}_E(g^*)^{k+j}/(Ng^*)^k) \\ \times (2\pi/\sqrt{d_K})^j \Omega_{\infty}^{-(k+j)} L_f(\overline{\psi}_E^{k+j}, k)$$

とおく. Damerell の定理により, (7.1), (7.2) の右辺は代数的数になるので, $\mathbb{C}_p$ の元ともみられる. このとき, 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, $g_f^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ が $\widehat{\mathcal{O}}_{\infty}[[T_1, T_2]]$ の中に存在して, $k_1 > -k_2 \geq 0$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ なる任意の $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$(7.3) \quad g_f^{(i_1, i_2)}(u^{k_1-1}, u^{k_2-1}) = (k_1-1)! \Omega_g^{k_2-k_1} L_{f,\infty}(\overline{\psi}_E^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる. ([7] 定理 29)

$$(7.4) \quad g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = \prod_{\psi \in \mathcal{H}_f^{(i_1, i_2)}} (1 - \psi^{(i_1, i_2)-1} (1+T_1)^{-l(\psi)} (1+T_2)^{-l(\psi)})^{-1} g_f^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$$

とおく. このとき, 次の定理が成立する.

定理 7.1. 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ は, $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ と $\widehat{\mathcal{O}}_{\infty}[[T_1, T_2]]$ で同伴である. さらに, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ が, $k_1 > -k_2 \geq 0$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ を満たすとき,

$$(7.5) \quad g^{(i_1, i_2)}(u^{k_1-1}, u^{k_2-1}) = (k_1-1)! \Omega_g^{k_2-k_1} L_{\infty}(\overline{\psi}_E^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる.

(証明) 前半は, $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$, $g_f^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$, $g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ の構成法と, 系 5.2 からわかる. 後半は, $\psi_E^{k_1-k_2}$ の導手が $f^{(i_1, i_2)}$ であることと, L-関数の Euler 積分分解から得られる.

文献

- [1] J. Coates and A. Wiles, On p -adic L -functions and elliptic units, J. Austr. Math. Soc (series A) 26, (1978), 1-25.
- [2] R. Coleman, Division values in local fields, Invent. Math. 53 (1979), 91-116.
- [3] C. Goldstein, Courbes elliptiques et theorie d'Iwasawa, Pub. Math. D'orsay, 82-01.
- [4] K. Kozuka, Elliptic units and two variable p -adic L -functions, to appear in Mem. Facu. Scie., Kyushu Univ.
- [5] S. Lang, Cyclotomic fields, Springer-Verlag, New York 1978.
- [6] G. Robert, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).
- [7] R. Yager, On two variable p -adic L -functions, Ann. of Math., 115 (1982), 411-449.