

Boolean valued analysis and operator algebras

名大・教養 小澤正直 (Masanao Ozawa)

§ 1. 序論. 集合論の分野では 1963 年に P. J. Cohen
によつて、連続体仮説及び選択公理の独立性の証明が与えら
れた。この時、Cohen は forcing という集合論の新しい model
を構成する方法を開発したが、1966 年に D. Scott と R. Solovay
は、この forcing の方法を集合論の Boole 値 model の方法に
よつて再構成することに成功した。集合論の Boole 値 model
とは、通常我々が無意識に行なつてゐる 2-値論理を用いて
数学的対象を扱う代りに、与えられた完備 Boole 代数 B を用
いた B -値論理を用いて数学的対象を考へたり、様々な
数学的対象（それはすべて集合概念に帰着すると考へられ
る）がどのように変化して見えてくるかを問ふことを主眼とし
てゐる。Boolean valued analysis とはこの Boole 値 model
の方法を analysis の問題に適用する統一的方法を意図し
てゐる。本稿の目的は、この Boolean valued analysis の
operator algebra の問題にどのように適用されるかを解説

することである。同様の趣旨で筆者は既に数研講究録及び
函数解析学シムポジウム報告集 ([1-3]) にも報告を載せて
いるので、重複を避ける意味から、こゝでも参考として
載せたいと思ふ。

§2. 連続体仮説の独立性. Boole 値 model がどういふ
ものかを示すために、Boole 値 model を用いた連続
体仮説の独立性の証明を概観しておく。

連続体仮説というのは、論理式 " $(\exists f) f: 2^{\aleph_1} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} X_1$ " を
意味する。この論理式を CH とする、その独立性とは、CH
が集合論の他の公理からは証明できないことである。その独
立性の証明のために、ある完備 Boole 代数を B , 集合論の論
理式の全体を $\mathcal{L}$ とし、 $\mathcal{L}$ から B への次の様な性質をもつ函
数 $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket_B \in B$ を定義することとする。

P.1. 論理式 φ が集合論の公理ならば、 $\llbracket \varphi \rrbracket_B = 1$.

P.2. 論理計算, $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \neg \varphi$ (not φ) に対して,
 $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_B = \llbracket \varphi \rrbracket_B \vee \llbracket \psi \rrbracket_B$, $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_B = \llbracket \varphi \rrbracket_B \wedge \llbracket \psi \rrbracket_B$,
 $\llbracket \neg \varphi \rrbracket_B = \neg \llbracket \varphi \rrbracket_B$ (the complement of $\llbracket \varphi \rrbracket_B$) が成立する。

P.3. 論理式 φ から論理式 ψ が推論されるならば、

$$\llbracket \varphi \rrbracket_B \leq \llbracket \psi \rrbracket_B.$$

もし、このような関数 $\varphi \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket_B$ がどんな完備 Boolean 代数に
 対しても定義できるといふ。その時、ある適当な完備 Boolean
 代数 B を探し出しさえすれば、 $\llbracket CH \rrbracket_B \neq 1$ となることを証明すれば、
 連続体仮説の独立性が証明されることになる。実際、 CH が集
 合論の公理 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ を用いて証明できたとすれば、その証
 明は $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \Rightarrow \psi_1 \Rightarrow \psi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \psi_m \Rightarrow CH$ という
 推論の連鎖になるであろう。すると、P.1. から $\llbracket \varphi_1 \rrbracket_B = 1, \dots,$
 $\llbracket \varphi_n \rrbracket_B = 1$, P.2. から $\llbracket \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rrbracket_B = 1$, さらに、P.3. から
 $1 = \llbracket \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rrbracket_B \leq \llbracket \psi_1 \rrbracket_B \leq \llbracket \psi_2 \rrbracket_B \leq \dots \leq \llbracket \psi_m \rrbracket_B \leq \llbracket CH \rrbracket_B$ となる
 ので、 $\llbracket CH \rrbracket_B = 1$ となるはずである。従って、もし、 $\llbracket CH \rrbracket_B \neq 1$
 となる B が存在すれば、背理法によつて、 CH の独立性が
 証明されることになる。残された問題は、 $P1 \sim P3$ を満たす
 関数 $\varphi \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket_B$ を構成する方法と、どんな B に対しても $\llbracket CH \rrbracket_B$
 $\neq 1$ となるかを知ればよいことになる。

§3. Boolean 値 model $V^{(B)}$ の構成. さて、 $P1 \sim P3$ を満たす関
 数 $\varphi \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket_B$ を定義するたがいに Boolean valued universe
 $V^{(B)}$ というものを構成する必要がある。これは、さうして、
 B -値論理で考えられる集合の全体に相当する。

2-値論理で考えられる集合の全体を V とすると、 V は空集合 $\emptyset$
 から出発して、その部分集合の全体、その部分集合の全

体というように構成してやる。つまり、 V は次の超限帰納法により定義されている：

$$V_0 = \phi, \quad V_{\alpha+1} = P(V_\alpha), \quad V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \quad (\alpha: \text{極限順序数})$$

$$V = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha. \quad (\text{On は 順序数全体のクラス})$$

ここで、 $P(V_\alpha)$ は、 V_α の中集合、つまり、 V_α の部分集合の全体を表わす。ところで、集合概念を扱う論理を 2-値か B -値に代えると、 $a \in b$ という命題の真理値が 1 (真) でも 0 (偽) でもなり、 $b \in B$ の値をとることが起る。この真理値を $b(a)$ と書くと、 b は B -値のフジイ集合と考える。この考え方を押し進め $V^{(B)}$ の次の定義に到る：

$$V_\alpha = \phi, \quad V_{\alpha+1}^{(B)} = \{u \mid \text{dom}(u) \rightarrow B, \text{dom}(u) \subseteq V_\alpha^{(B)}\},$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta^{(B)} \quad (\alpha: \text{極限順序数}), \quad V^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha^{(B)}.$$

つまり、 $V_\alpha^{(B)}$ の B -値の中集合とは、定義域が $V_\alpha^{(B)}$ に含まれる B -値のフジイ集合の全体とあることがでる。

次に、 $V^{(B)}$ を用いて、集合論の任意の論理式に対して、その真理値に相当する $\llbracket \varphi \rrbracket_B$ を定義することがでる。ところで、集合論の論理式は、 $a \in b$, $a = b$ という形の原子論理式に $\neg$ (not) をつけたり、 $\vee$, $\wedge$ で結んだり、 $(\forall x)$ や $(\exists x)$ をつけることにより、 Σ 構成されているから、次のような論理式を構成に従う帰納法を用いて、集合論のすべての論理式 φ に対して $\llbracket \varphi \rrbracket_B$ が定義される (以下、 $\llbracket \cdot \rrbracket_B$ を $\llbracket \cdot \rrbracket$ と略記する.)：

$$D1. \llbracket u \in v \rrbracket = \sup_{y \in \text{dom}(v)} v(y) \wedge \llbracket u = y \rrbracket.$$

$$D2. \llbracket u = v \rrbracket = \inf_{x \in \text{dom}(u)} u(x) \Rightarrow \llbracket x \in v \rrbracket \wedge \inf_{y \in \text{dom}(v)} v(y) \Rightarrow \llbracket y \in u \rrbracket.$$

(但し, Boolean operation $\Rightarrow$ は, $a \Rightarrow b = (\neg a) \vee b$ を表す.)

$$D3. \llbracket \neg \varphi \rrbracket = \neg \llbracket \varphi \rrbracket.$$

$$D4. \llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \vee \llbracket \psi \rrbracket.$$

$$D5. \llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \wedge \llbracket \psi \rrbracket.$$

$$D6. \llbracket (\forall x) \varphi(x) \rrbracket = \inf_{u \in \mathcal{D}(B)} \llbracket \varphi(u) \rrbracket.$$

$$D7. \llbracket (\exists x) \varphi(x) \rrbracket = \sup_{u \in \mathcal{D}(B)} \llbracket \varphi(u) \rrbracket.$$

以上で, 関数 $\varphi \in \mathcal{L} \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket \in B$ が定義され, 実際には $P1 \sim P3$ を充たすことが示される。つまり, 次の定理が成立する。

Theorem 1. (Scott-Solovay) φ が ZFC の定理ならば, $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ が成立する。 (但し, ZFC とは, Zermelo-Fraenkel の公理系に選択公理をとり加えた公理系である。)

それでは, 連続体仮説の独立性の証明の最後の段階として, どんな B を用いたとしても示してあげよう。 I を濃度が $2^{\aleph_0}$ 以下の "index set", $X = 2^{2^{\aleph_0} \times I}$ を $2 = \{0, 1\}$ の $2^{\aleph_0} \times I$ の直積集合に連続位相を入れた generalized Cantor space とする。 $\mathcal{B}$ を X の Borel σ -field, m を $\mathcal{B}$ 上の product measure とし, 次の

よ)なものとする。

$$m(\{p \in 2^{I \times I} \mid p(j_1) = a_1, \dots, p(j_m) = a_m\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

(但し, $a_i = 0$ or 1 $i=1, \dots, m$)

このよ)な measure の存在は, Kolmogorov の拡張定理による。 $\mathcal{N}$ を null set の全体として, $B = \mathcal{B}/\mathcal{N}$ をこの measure algebra とすると, B は完備 Boolean 代数である。この B に対して $\llbracket CH \rrbracket_B$ の値を計算することができ, $\llbracket CH \rrbracket_B = 0$ が示される。以上で, 連続体仮説の独立性が証明されたことになる。

§4. Boolean valued analysis. 以上で, Boolean valued analysis のも) syntactical な側面を見るにすぎないと思う。これを analysis に応用する重要な点は, その意味論^的な側面の研究である。 φ を解析学の定理として置く。 Theorem 7. に依り, " $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ " は新しい別な定理であることがわかる。 " $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ " という命題の構成が帰納的な構成法に従っているから, 我々はいずれがどんな命題か知るにすぎない。そして, これは定理である。 " $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ " がどんな命題かわかれば, 我々のなじみの概念と使, 2, " $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ " を言い替えるにすぎないかも知れない。 φ が我々のなじみの概念を用いて書かれた解析の命題である, 2, もし, " $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ " と φ が同値であることが証明できれば, φ もまた解析学の新しい(リー)の定理となる。つまり,

我々は、 φ を直接に証明する代わりに、 φ を証明して、“ $[\varphi] = 1$ ”と φ の同値性を証明することにより、 φ の証明が得られる。それでは、 φ を証明するこの二つの方法のうち、どちらがより我々にとって容易であるのか。今まで調べたことによると、 φ より φ の方がはるかに単純な命題であり、“ $[\varphi] = 1$ ”と φ の同値性の証明は言語の翻訳に似た部分が多く、かなり見通し易いものになることが、しばしばであることが知られている。

例として、 φ を“ある (localizable) measure space $(\Omega, \mathcal{M})$ 上の可測関数の族 $\{f_\alpha\}$ が、ある可測関数 f で a.e. に上から押えられている”と云う命題としよう。この命題の証明は、すべて f_α がある特定の L^p 空間に属している場合には、かなり困難なことがある。 φ を“実数の上にある族は上界をもつ”という命題とする。この時、“ $[\varphi] = 1$ ”と φ の同値性の証明はかなり初等的な翻訳の問題に帰してしまふ。 φ の証明は明らかだから、 φ の証明はこのやり方でやれば、非常に容易になる。以下、[4]に従って、この証明を述べてみよう。

localizable の仮定から、piecewise に有限測度空間と仮定して以下、有限測度空間の場合を述べてみよう。与えられる測度空間の measure algebra を $\mathcal{B}$ とする。実数と Dedekind

cutの端点をもたない下組と定義する。"aは実数である"と

いふ命題は,

$$a \leq \mathbb{Q} \wedge \exists p \in \mathbb{Q} (p \in a) \wedge \exists p \in \mathbb{Q} (p \notin a) \wedge$$

$$\forall p \in \mathbb{Q} (p \in a \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Q} (p < t \wedge t \in a))$$

と書かれる。そこで,

$$R^{(B)} = \{u \in \mathcal{P}^{(B)} \mid \llbracket u \text{ は実数である} \rrbracket = 1\}$$

とする。これは、 $\mathcal{P}^{(B)}$ における実数の全体に当たる。ここで、通常の集合の全体 $\mathcal{V}$ から $\mathcal{P}^{(B)}$ への埋め込み、 $x \mapsto \check{x}$ を、 $\text{dom}(\check{x}) = \{y \mid y \in x\}$, $\check{x}(y) = 1$ で定義する (これは、集合全体の構成に関する帰納法により) と、 $\llbracket \check{x} \in \check{y} \rrbracket = 1 \Leftrightarrow x \in y$, $\llbracket \check{x} \in \check{y} \rrbracket = 0 \Leftrightarrow x \notin y$, $\llbracket \check{x} = \check{y} \rrbracket = 1 \Leftrightarrow x = y$, $\llbracket \check{x} = \check{y} \rrbracket = 0 \Leftrightarrow x \neq y$ となる。このとき、 $\check{x}$ の全体は、 $\mathcal{P}^{(B)}$ のうちで、2-値論理における集合全体の役割を果たす。この時、 $\llbracket \check{\emptyset} = \check{\emptyset} \rrbracket = 1$ が成り立つ。さらに、 $\llbracket R = R \rrbracket = 1$ は一般に成立する。

一方、 $R^{(B)}$ を定義域として、恒等的に $1 \in B$ をとり関数 $R^{(B)} \times \{1\}$ は、一般に $\llbracket R^{(B)} \times \{1\} = R \rrbracket = 1$ となるので、 $\mathcal{P}^{(B)}$ における R と同一視するためには、 $R^{(B)}$ をもっと広く調べる必要がある。そこで、任意の $u \in R^{(B)}$ と $x \in \mathbb{Q}$ に対し、 $b_x = \llbracket \check{x} \in u \rrbracket$ とする。実数の定義から、この b_x に対して、次の条件が得られる:

$$1) \inf_{x \in \mathbb{Q}} b_x = 0, \quad 2) \sup_{x \in \mathbb{Q}} b_x = 1, \quad 3) b_x = \sup_{x < y} b_y.$$

実際、 $\llbracket u \text{ は実数である} \rrbracket = 1$ と $\llbracket \check{\emptyset} = \check{\emptyset} \rrbracket = 1$ より a) $\llbracket a \leq \check{\emptyset} \rrbracket = 1$,

$$b) \llbracket (\exists s \in \check{\Omega}) s \in a \rrbracket = 1, \quad c) \llbracket (\exists s \in \check{\Omega}) s \notin a \rrbracket = 1,$$

$$d) \llbracket (\forall s \in \check{\Omega}) [s \in a \Leftrightarrow (\exists t \in \check{\Omega}) [s \leq t \wedge t \in a]] \rrbracket = 1 \text{ が得られる。一般に,}$$

$$p4. \llbracket (\exists u \in v) \varphi(u) \rrbracket = \sup_{u \in \text{dom}(v)} \llbracket \varphi(u) \rrbracket$$

$$p5. \llbracket (\forall u \in v) \varphi(u) \rrbracket = \inf_{u \in \text{dom}(v)} \llbracket \varphi(u) \rrbracket$$

が成立する。これを知られる。これを同様にすると、b) かつ

$$\begin{aligned} 1 &= \llbracket (\exists s \in \check{\Omega}) s \in a \rrbracket = \sup_{s \in \text{dom}(\check{\Omega})} \llbracket s \in a \rrbracket = \sup_{s \in \Omega} \llbracket s \in a \rrbracket \\ &= \sup_{s \in \Omega} b_s \end{aligned}$$

とす、2、2) が得られる。1) 及び 3) も同様である。逆に、族 $\{b_x \mid x \in \Omega\}$ の B の元の族

$\{b_x \mid x \in \Omega\}$ が 1) - 3) を満たせば、すべての $x \in \Omega$ に対して、

$b_x = \llbracket s \in a \rrbracket$ とするある $a \in R^{(B)}$ を定めることが出来る。この時、

族 $\{b_x \in B \mid x \in \Omega\}$ は、対応する $a \in R^{(B)}$ の存在は $\llbracket a_1 = a_2 \rrbracket = 1$

の範囲で一意的である。すなわち、 B は measure algebra ならば、

$b_x = \llbracket B_x \rrbracket$ とする可測集合 B_x を対応させることが出来る、

$$1) \bigcap_{x \in \Omega} B_x = \emptyset, \quad 2) \bigcup_{x \in \Omega} B_x = \Omega, \quad 3) B_x = \bigcup_{x < y} B_y$$

とすることが出来る。すなわち、 $f: \Omega \rightarrow R$ を、

$$f(\omega) = \sup \{x \in \Omega \mid \omega \in B_x\} \in R$$

で定義すれば、 f は Ω から R の可測関数で、 $B_x = \{\omega \in \Omega \mid x < f(\omega)\}$ となる。一方、 f は Ω から R の可測関数なら、

$b_x = \llbracket \{\omega \in \Omega \mid x < f(\omega)\} \rrbracket$ とすれば、 $\{b_x \in B \mid x \in \Omega\}$ は 1) - 3) を

満たし、 $R^{(B)}$ の一つの元が対応する。この f を対応する $u_f \in R^{(B)}$

の関係は, " $f \leq g$ a.e. $\Leftrightarrow \llbracket a_f \leq a_g \rrbracket = 1$ " と同値である。そこで、 $\{f_\alpha\}$ が f に a.e. で上に有界な可測関数の族である。 $f \leq a_f$ の対応から, $\llbracket (\exists a_f \in \mathcal{R}) (\forall \alpha) a_{f_\alpha} \leq a_f \rrbracket = 1$ が得られる。 " $\{a_{f_\alpha}\}$ は上に有界な実数の族である" という命題を $\varphi_1(\{a_{f_\alpha}\})$ とすれば, $\llbracket \varphi_1(\{a_{f_\alpha}\}) \rrbracket = 1$ が得られたことになる。次に, " $\{a_{f_\alpha}\}$ は上限をもつ" という命題を $\varphi_2(\{a_{f_\alpha}\})$ とすれば, " $\varphi_1(\{a_{f_\alpha}\}) \Rightarrow \varphi_2(\{a_{f_\alpha}\})$ " は実数論 $\mathcal{R}$ 上, ZFC の定理である。よって, Theorem 1 5) $\llbracket \varphi_1(a_{f_\alpha}) \Rightarrow \varphi_2(a_{f_\alpha}) \rrbracket = 1$ である。一般に, $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ に対して, " $b_1 \Rightarrow b_2 = 1 \Leftrightarrow b_1 \leq b_2$ " である。よって, $\llbracket \varphi_1(a_{f_\alpha}) \rrbracket \leq \llbracket \varphi_2(a_{f_\alpha}) \rrbracket$ であり, $\llbracket \varphi_2(a_{f_\alpha}) \rrbracket = 1$ が得られた。そこで, $\llbracket \varphi_2(a_{f_\alpha}) \rrbracket = 1$ を前述の $f \mapsto a_f$ の対応を用いて, 翻訳すると, " $\llbracket \varphi_2(a_{f_\alpha}) \rrbracket = 1$ " は, "可測関数の族 $\{f_\alpha\}$ は a.e. に限る順序で上限をもつ" と同値である。以上で, 与えられた命題の証明が完了した。

§5. AW*-algebra の問題. 前節までで, Boolean valued analysis の方法論の概要を述べたので, 以下から operator algebra のどのような問題に活用されるかを説明しよう。

AW*-algebra という概念は, von Neumann algebra の理論の純代数的な部分と Hilbert 空間を用いるに公理的に展開するたりに Kaplansky により提出された概念である。Hilbert 空間

を用いないことは、膨大な測度論の手法を放棄する結果となり、 $\text{von Neumann algebra}$ と AW^* -algebra の間に横たわる溝がどのようなものか、未だもって、確定したイメージを把握し難い状態である。このような問題に関して、Boole 代数が完備であり、 measure algebra であってもなくても、共通の理論を有する Boolean valued analysis が有効に活用される可能性は十分にある。

さて、 AW^* -algebra に関しては、次の二つの問題がある。

- I) AW^* -factor はいつ W^* -factor になるか?
- II) W^* -factor の逆理を global に拡張できるのは、どういった AW^* -algebra に対して可能で、どのような方法で可能だろうか?

I) に関しては、I 型の場合はすべて W^* -factor になることが Kaplansky によって示された。また、II 型の場合は、Dyer, Takemouchi, Wright, Saito, Hamana 等によって W^* -でない AW^* -factor の例が与えられている。II 型の場合は、未だ "open problem" であるが、肯定的である事を示そうとする、様々な試みが行われている。

II) に関しては、Boolean valued analysis がかなり完全な解答を与えていると思われるので、以下は、その解説を行なうことにする。これは、von Neumann の reduction theory という理論であり、可分な Hilbert 空間上の von Neumann algebra を

factor の direct integral に分解して, 各 factor に関する知識を利用して全体を知ろうとするやり方と, center-valued trace の理論のほうに, factor に対する概念のアナロジーを逐次構成して平行した理論を展開してゆくやり方の二通りの方法が存在している。Boolean valued analysis を用いる方法は, 第二の方法に近しい, 第三の方法であるが, factor の定理から直接に global な定理を移行してその原理を定立するという非常に強固なものである。

まず, どのほうにいて可能かという点について, $\varphi(x)$ を "x は $\mathcal{W}^*$ -factor である" という命題とすると, " $\llbracket \varphi(x) \rrbracket = 1$ " は "x はある種の AW^* -algebra である" という命題と同値になる。従って, factor に関する global な定理 φ に対しても, それを global な場合に拡張した定理 " $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ " を自動的に構成する手段を我々は持っている。次に, 確かに, 確かに, どのほうに AW^* -algebra に対して, factor の定理の二通りの移行が可能になるのだろうか。これに対する解答は, 確かに embeddable な AW^* -algebra であるということである。

AW^* -algebra M が embeddable とは, ある I 型 AW^* -algebra A と, monomorphism $\theta: M \rightarrow A$ があって, A 上で, $\theta(M)'' = \theta(M)$ となることである。以下, M を $\mathcal{U}^{(B)}$ における $\mathcal{W}^*$ -factor, i.e. $\llbracket M \text{ is } \mathcal{W}^*\text{-factor} \rrbracket = 1$ とする。

$$M^{(B)} = \{u \in \mathcal{U}^{(B)} \mid \llbracket u \in M \rrbracket = 1\},$$

$$M_{\infty}^{(B)} = \{u \in M^{(B)} \mid \exists k \in \mathbb{R}, \|u\| \leq k\} = 1\}$$

とする。また、 E と B は projection の全体 Σ にも可換な AW^* -algebra となる。

Theorem 2. $M_{\infty}^{(B)}$ は E を中心とする embeddable AW^* -algebra であり、逆に、中心が E と同型な任意の embeddable AW^* -algebra N に対して、 $\mathcal{U}^{(B)}$ の中のある W^* -factor M が存在して、 $N \cong M_{\infty}^{(B)}$ となる。また、 $M_{\infty}^{(B)}$ が von Neumann algebra になるための必要十分条件は B がある localizable measure space の measure algebra となることである。

この定理から、 φ が W^* -factor の定理なる $\|\varphi\|=1$ は embeddable AW^* -algebra の定理であることがわかる。

Theorem 3. M が $\mathcal{U}^{(B)}$ において、I 型, II₁ 型, II_{\infty} 型, III 型であることは、 $M_{\infty}^{(B)}$ が AW^* -algebra として、I 型, II₁ 型, II_{\infty} 型, III 型であることは、それぞれ同値である。

この定理から、 φ の $\|\varphi\|=1$ への移行に関する型の概念は等しいことがわかる。ところが同じ I 型でも、基数がからんで素子と概念のズレが生じて来る。これを基数とする。次の $\mathcal{U}^{(B)}$

への埋め込み $\check{K}$ は順序数であるが、基数になる場合がある。
 $\check{K}$ の $\mathcal{V}^{(B)}$ における濃度と $\text{card}(\check{K})_B$ と表わす。 $\lambda = \text{card}(\check{K})_B$
 として、 λ は $\mathcal{V}^{(B)}$ の基数である。

Theorem 4. $\lambda = \text{card}(\check{K})_B$ の時、 M が $\mathcal{V}^{(B)}$ で I_λ -型であることと、 $M_\infty^{(B)}$ が $\check{K}$ -homogeneous であることは同値である。

B が measure algebra の時は、常に $\lambda = \check{K}$ であるから、homogeneous von Neumann algebra の degree of homogeneity $\check{K}$ は常に一意である。もし、 $\lambda \neq \check{K}$ ならば、degree of homogeneity の一意性は成立しなくなる。Kaplansky は AW^* -algebra の場合には、degree of homogeneity の一意性が成立しなくなるのではなかろうかという conjecture を提出していたが、これの矛盾から、この conjecture を解くことができた。

α と β を二つの無限基数として、 P を次の条件を満たす一対一写像 P の全体とする。

$$\text{dom}(p) \leq \alpha, \text{ran}(p) \leq \beta, \text{card}(\text{dom}(p)) < \alpha$$

更に、 p の拡張になっている P の元の全体を $[p]$ で表わす。 $\{[p] \mid p \in P\}$ を open base としての位相を P に導入して、この位相に関する正則閉集合の全体がなす完備 Boolean 代数を B とする。この時、 $\mathcal{V}^{(B)}$ では、 $\llbracket \text{card}(\check{\alpha})_B = \text{card}(\check{\beta})_B \rrbracket = 1$ が成立する。従って、

この B を projection の全体とする可換 AW^* -algebra を $Z_{\alpha, \beta}$ とすると, 次の定理が成立する.

Theorem 5. $Z_{\alpha, \beta}$ を中心とする δ -homogeneous AW^* -algebra は, $\alpha \leq \delta \leq \beta$ を満たす任意の基数 δ に対し, 同時に δ -homogeneous にとなる.

このことは, degree of homogeneity を用いる I 型 AW^* -algebra の分類は完全なものであることを示している。 $\mathcal{U}^{(M)}$ の基数を代りにして, 同型の不変量として選べば, I 型 AW^* -algebra の完全な分類を完成させることが出来る。 また, I 型だけでなく, embeddable な AW^* -algebra の Hilbert module 上への表現の標準形を Tomita-Takesaki 理論を移行原理に従って移行させることに容易に得ることが出来る。 二つの結果の解説は [1], [3] に譲ることにする。

§6. factor の理論への応用. 最後に将来の課題として, embeddable な AW^* -algebra をより深く調べることにし, factor の問題に際する深い結果を得ようとする可能性を示すように。

$\mathcal{C}(M)$ と factor M に際する未解決の問題がある。 解決は次の通りが望まれている。 1) $\mathcal{C}(M)$ が証明される。 2) $\mathcal{C}(M)$ の否定

が証明される。そして、第三に、3) $\mathcal{C}(M)$ は肯定も否定も証明できな
 いことが証明される。従来の数学的方法では 1), 2) の場合だけ
 が可能である。ところが, Boolean valued analysis に付いて,
 $\|\mathcal{C}(M)\|_B = 1$ は, embeddable な AW^* -algebra に関する命題で,
 あることがわかる。embeddable AW^* -algebra を深く調べると
 以下, ある B に対して $\|\mathcal{C}(M)\|_B = 1$ が証明される, 2) の可能
 性は否定される。また, ある B に対して $\|\mathcal{C}(M)\|_B \neq 1$ が証明さ
 れる, 1) の可能性が否定され, 3) の場合であることが証明
 されることになる。

現実の問題として, "Calderón alg. が Π_1 型の表現をもつ" という
 命題を $\mathcal{C}$ とすると, ある B に対して, $\|\mathcal{C}\|_B = 1$ が証明される。
 よって, この問題は 2) の可能性が否定されている。このような B に
 対して上記の $\|\mathcal{C}\|_B = 1$ が証明されたかという点, [Martin の公理]
 $= 1$ となる B に対してである。

ところで, 以前には, $\|\mathcal{C}\|_B = 1$ 1) $\mathcal{C}$ が容易な場合が多いと述べ
 たが, $\mathcal{C}$ が非常に難しい場合は, ある B に対して $\|\mathcal{C}\|_B = 1$ を示す
 方が容易になることがある。実際, a) $\mathcal{C}$ が CH の場合, b) $\mathcal{C}$ が
 Calderón alg. の問題の場合, がその case に当たっている。しかし,
 そのためには, 審判部が容易な部分と調べなくてはならない。現在の
 研究段階としては, どのように重点が置かれているかという事である。Boolean
 valued analysis の本当に重要な点はこのような, 通常の数学で

解ける問題に解決を与えた点にあり"である。

文献

(I) 報告

[1] 小澤正巳, Boolean valued analysis と その 応用, 京大
数研講究録 504 (1983), 117-131.

[2] ———, Boolean 値解析学 と 作用素環論, 京大数研講究
録 540 (1984), 145-164.

[3] ———, Boolean 値解析学 と その 作用素代数への 応用,
日本数学会. 第23回実函数論・第22回函数解析学・合同レポロム
講演集録, 52-67, 1984.

(II) 入門書

[4] Takeuti, G., Two applications of logic to mathematics,
Iwanami and Princeton UP., 1978

[5] Takeuti, G., Fda, K., Ozawa, M., Moshimura, H.,
Boolean valued analysis and Boolean valued algebra, (to
appear in Springer Lecture Notes in Math.)

詳し"文献は [1-3] と参照"下"。