

非線形常微分方程式の特異点の定性的理論

東大・理 村田嘉弘 (Yoshihiko Murata)

§0. 序

複素領域で定義された非線形常微分方程式の解には、タイプの異なる次のような2種類の特異点が見れる:

- ① 方程式の形から予測できるどの解にも共通な位置に見れる特異点 (動かない特異点という)
- ② 方程式の形からだけでは予測できない解毎に異なる位置に見れる特異点 (動く特異点という)

例 (E)
$$y'' = -\frac{(y')^2}{y} + \frac{y'}{x} - \frac{y}{2x^2}$$

一般解:
$$y = \sqrt{x} (A + B \log x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 : \text{動かない特異点, 超越的} \\ x=e^{-\frac{A}{B}} : \text{動く特異点, 代数的} \end{array} \right.$$

線形方程式では①の特異点しかありえないが、非線形になると①以外に②の特異点もありうるのである。

非線形方程式における動かない特異点, 動く特異点は古くから研究の対象となり, L. Fuchs, Briot-Bouquet, Picard, Painlevé,

Garnier, Malmquist, Chazy, 福原, 本村, 松田の諸先生方により深く研究されてきた。その歴史的成果は [1], [2], [3], [8] を参照されたい。本稿では, Painlevé と本村先生の研究を踏まえて, 筆者が [6], [7] で発表したり連立有理的方程式の特異点についての定性的理論の要点を紹介しよう。尚, 当初は動く特異点を持たない方程式についてもふれる予定であったが, それは今後の機会に譲ることにしたい。

§1. 非線形方程式の特異点における Painlevé の定理, 本村の定理

1° 以下, 本稿で以下の記号を使う。

[記号] $D \subset \mathbb{C}$: 領域

$\mathcal{O}_D$: D 上の正則函数 (独立変数 x) 全体のなす環

$\mathcal{O}_D[y_1, \dots, y_n]$: $\mathcal{O}_D$ 係数の多項式環

$P, Q \in \mathcal{O}_D[y_1, \dots, y_n]$ のとき

$(P, Q) = 1 \iff P, Q$ は互いに素

2° 1 階単独方程式の特異点の定性的理論

$$(E_1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \left[P, Q \in \mathcal{O}_D[y], (P, Q) = 1 \right]$$

に对し, $y = \frac{1}{v}$ で方程式を書き直すと,

$$(E_1)_2 \quad \frac{dv}{dx} = \frac{P_2(x, v)}{Q_2(x, v)} \quad \left[P_2, Q_2 \in \mathcal{O}_D[v], (P_2, Q_2) = 1 \right]$$

このとき、不動特異点の集合 Θ を次で定める：

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$$

$$\Theta_1 = \{z \in D \mid Q(z, y) = 0\}$$

$$\Theta_2 = \{z \in D - \Theta_1 \mid \exists \eta \in \mathbb{C} \text{ s.t. } P(z, \eta) = Q(z, \eta) = 0\} \\ \cup \{z \in D - \Theta_1 \mid P_2(z, 0) = Q_2(z, 0) = 0\}$$

(Θ_i ($i=1, 2$) を第 i 種不動特異点という)

Φ を (E) の解とすると、次の定理が成り立。

定理 α (Painlevé [9])

- (1) Φ が $z \in D - \Theta$ 上特異点 ω を持てば、 ω は代数的特異点である。(i.e. 動く特異点は代数的特異点である)
- (2) Φ が $z \in \Theta_2$ 上超越特異点 ω を持てば、 ω は通性超越特異点である。(i.e. Φ が $z \in \Theta$ 上真性特異点を持てば、 $z \in \Theta_1$ である) $\blacksquare$

定理 β (T. Kimura [4])

R を Φ の Riemann 面とする。 Φ が $z \in \Theta_1$ 上真性超越特異点 ω を持ち、 ω での集積値集合が $S_\omega \subset \mathbb{P}^1$ であるとする。このとき、

- (1) $S_\omega = \mathbb{P}^1$
- (2) (Picard 型の性質) Φ は ω の任意の近傍 U で、 $\mathbb{C} - \{\eta \in \mathbb{C} \mid P(z, \eta) = 0\}$ のすべての値をとる。 $\blacksquare$

§2. n 連立方程式の特異点の定性的理論

1° 主結果

$$(E_n) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1(x, y_1, \dots, y_n)}{Q_1(x, y_1, \dots, y_n)} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = \frac{p_n(x, y_1, \dots, y_n)}{Q_n(x, y_1, \dots, y_n)} \end{cases}$$

$$\left[p_l, Q_l \in \mathcal{O}_D[y_1, \dots, y_n], (p_l, Q_l) = 1 \quad (l=1 \sim n) \right]$$

に対して, 自然に不動特異点集合

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \dots \cup \Theta_{n+1}$$

(Θ_i): は第 i 種不動特異点集合)

を定めることができる。

また, 定理 α, β の自然な一般化が成り立つ。

以下では, この結果 (特に定理 α) の解説をしよう。

2° n 項解析函数の特異点

(E_n) の解 $\Phi = (y_1, \dots, y_n)$ は n 個の解析函数の組からなるベクトル値の函数であり, 通常の単独の解析函数とは若干異なる所がある。

定義 1

$a \in D$ での主要部有限な収束 Puiseux 級数の n 個の組 $(y_1, \dots, y_n)$ を D 上解析連続 (である) 解析函数を n 項解析函数

とiii, Φ とかく. またその Riemann 面を R とかく. Φ の取る値は $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ の各成分が $x=a$ 上 ∞ と取らないとき,

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\hat{\Phi}_0} & \mathbb{C}^n, \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \longmapsto (\varphi_1, \dots, \varphi_n)(a) \in \mathbb{C}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ D & & a \end{array}$$

で定める. $\square$

Φ の取る値が ∞ になるときを考察するため, $\mathbb{C}^n$ に無限遠点を付け加えよう.

定義 2 n 次元コンパクト多様体 M が $\mathbb{C}^n$ の有理的コンパクト化

であるとは, M が次の条件を満たすことである.

1 $\exists A \subset M$ 解析的集合 s.t. $M-A \cong \mathbb{C}^n$

2 $\exists M$ 上の atlas $\{(U_i, \kappa_i)\}_{i=1}^m$ s.t.

(1) $U_1 = M-A = \mathbb{C}^n, \quad \kappa_1 = \text{id} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

(2) $\kappa_j \circ \kappa_i^{-1} : (y^i) \longrightarrow (y^j), \quad y_k^j = R_k^{ij}(y^i) \in \mathbb{C}(y^i)$

(i.e. R_k^{ij} は y^i の有理式) $\square$

有理的コンパクト化は具体的には次のようになる.

$n=1$ のとき

$$M = \mathbb{P}^1$$

$n=2$ のとき

M は有理曲面となる (小平, Morrow)

$n \geq 3$ のとき

$\mathbb{P}^n, \underbrace{\mathbb{P} \times \dots \times \mathbb{P}}_n$ 等. 完全には決定されている.

$\mathbb{C}^n$ の有理的コンパクト化 M を一つとると, 定義 1 の $\hat{\Phi}$ は正則写像 $\hat{\Phi}$ に自然に拡張され, immersion $\pi \times \hat{\Phi}$ が得られる ([6], 1.1, 2° 参照) :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & M \\ \pi \downarrow & & \\ D & & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi \times \hat{\Phi}} & D \times M \\ & \searrow \pi & \downarrow pr \\ & & D \end{array}$$

$\pi \times \hat{\Phi}$ (すなわち $(\pi \times \hat{\Phi})(R)$) が方程式 (E_n) の解曲線に当たる. 最後に Φ の特異点 ω での集積値集合 $S_\omega \subset M$ を定義しよう.

定義 3 Φ が特異点 ω を持つとき,

$$S_\omega = \bigcap_{r>0} \overline{\hat{\Phi}(U_r)} \subset M$$

を ω での (M における) 集積値集合という. ただし, U_r は ω の r 近傍で, $\overline{}$ は M の中での閉包を意味する.

以下超越特異点 ω において

$S_\omega = \{1 \text{ 点} \}$ のとき, ω は (M において) 通性超越特異点

$S_\omega = \text{無限集合}$ のとき, ω は (M において) 真性超越特異点

であるという. $\square$

(注) S_ω は M の取り方により変わり, $n \geq 2$ のときは, 通性・真性という概念が a priori な意味を持たないことに注意する. ([6], 1.1, 4° 参照)

3° (E_n) の拡張

$\mathbb{C}^n$ の有理的コンパクト化 M を 1 つ 固定する. $X = D \times M$ の atlas

$\{(U_i, \theta_i)\}_{i=1}^m$ を次のように取る:

$$1 \quad U_i = D \times U_i, \quad \theta_i = \text{id} \times \kappa_i$$

$$2 \quad \theta_j \circ \theta_i^{-1} = \text{id} \times (\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}) : (x, y_i) \mapsto (x, y_j)$$

n 連立方程式 (E_n) は今後, ファイバー空間 $Z = (X, \text{pr}, D)$ の全空間 X の chart $\theta_i(U_i) = D \times \mathbb{C}^n$ 上の方程式と考えることにする.

座標変換 $\theta_j \circ \theta_i^{-1}$ により (E_n) と compatible な $\theta_i(U_i)$ 上の方程式

$$(E_n)_i \quad \begin{cases} \frac{dy_i^1}{dx} = \frac{p_i^1(x, y_i)}{Q_i^1(x, y_i)} = \frac{Y_i^1(x, y_i)}{X^i(x, y_i)} \\ \vdots \\ \frac{dy_i^n}{dx} = \frac{p_i^n(x, y_i)}{Q_i^n(x, y_i)} = \frac{Y_i^n(x, y_i)}{X^i(x, y_i)} \end{cases}$$

を作る. したがって, $X^i, Y_i^1, \dots, Y_i^n$ は互いに素とする.

4° 不動特異点集合 Θ の定義

$(E_n)_i$ に対して (7) autonomous system

$$(A_n)_i \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt^i} = X^i \\ \frac{dy_l^i}{dt^i} = Y_l^i \quad (l=1 \sim n) \end{cases}$$

を考える.

定義 4

$\text{pr}_i : \theta_i(U_i) = D \times \kappa_i(U_i) \rightarrow D, (a, b) \mapsto a$ とする.

$$J_i = \{(a, b) \in \mathcal{O}_i(\mathcal{U}_i) \mid (\Delta_n)_i \text{ の } \exists \text{ 解 } (x, \phi)(t^i) \quad (t^i \in \Delta \subset \mathbb{C})$$

s.t. (x, ϕ) は (a, b) を通る,

$$\text{pr}_i(\{(x, \phi)(t^i) \mid t^i \in \Delta\}) = \{a\} \},$$

$$J = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{O}_i^{-1}(J_i) \subset X = D \times M$$

とおく. J を X における (E_n) の特異初期点集合 (singular initial set) と呼ぶ. $\square$

命題 1 J は X の解析的集合である. $\square$

よって, J を次のように既約分解しよう.

$$J = \bigcup_{\sigma \in \Lambda_1} J_\sigma^{(1)} \cup \dots \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_k} J_\sigma^{(k)} \cup \dots \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_{n+1}} J_\sigma^{(n+1)}$$

$$\text{codim}_{\mathbb{C}} J_\sigma^{(k)} = k, \quad \{J_\sigma^{(k)}\} \text{ は locally finite}$$

命題 2 $\forall J_\sigma^{(k)}$ に対し, $\text{pr}(J_\sigma^{(k)}) = \{1 \text{ 点}\}$ または D である. $\square$

そこで,

定義 5 $\text{pr}(J_\sigma^{(k)}) = \{1 \text{ 点}\}$ のとき, $J_\sigma^{(k)}$ を第 k 種の垂直特異点集合 (vertical singularity set) といい, $\text{pr}(J_\sigma^{(k)}) = D$ のとき, $J_\sigma^{(k)}$ を第 k 種の被覆特異点集合 (covering singularity set) といい. $\square$

$J_\sigma^{(k)}$ の具体的な形状については, [6], 3.7 (または [8], §3) の図を参照してもらいたい.

定義 6 $\Theta_1 = \{ \beta \in D \mid \exists \text{ 垂直特異点集合 } \mathcal{A}_\beta \text{ s.t. } \text{pr}(\mathcal{A}_\beta) = \{\beta\} \}$

$\Theta_k = \{ \beta \in D - \Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_{k-1} \mid \exists \text{ 垂直特異点集合 } \mathcal{A}_\beta \text{ s.t. } \text{pr}(\mathcal{A}_\beta) = \{\beta\} \}$

($k = 2 \sim n+1$)

$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \dots \cup \Theta_{n+1}$

とある。 Θ_k を第 k 種の不動特異点集合、 Θ を不動特異点集合と呼ぶ。

また、 Θ_k の元を第 k 種の不動特異点、 Θ の元を不動特異点と呼ぶ。 $\square$

命題 3 Θ は D の中で discrete である。 $\square$

命題 4 被覆特異点集合は有限個である。 $\square$

(E) の場合、 定義 6 による Θ と Painlevé の定義による Θ (§1, 2) とは同一の集合であることが確かめられる ([6] §2)。

5° 定理 α , β の一般化

[A] 定理 α の一般化 ([6] §1, 1.5)

定理 1 (基本定理)

Φ は (E) の一般解とする。 Φ が $a \in D$ 上特異点 ω を持ち、 ω での集積値集合が $\mathcal{S}_\omega \subset M$ であるとする。 また、 $\mathcal{A}_a = \text{pr}^{-1}(a) \cap \mathcal{A}$ とおく。

(1) $\{a\} \times \mathcal{S}_\omega$ が点 $p \in X - \mathcal{A}$ を含めば、 $\{a\} \times \mathcal{S}_\omega = \{p\}$ であり、 ω は代数的特異点である。

(2) ω が超越的特異点ならば、 $\{a\} \times \mathcal{S}_\omega \subset \mathcal{A}_a$ である。

系 (被覆特異点集合の役割)

(E_n) の解の l -parameter family $\Phi(x; c)$ ($c = (c_1, \dots, c_l)$) が $x = a(c) \in D - \Theta$ 上超越特異点 $\omega(c)$ を持ち、集積値集合が $J_\omega(c)$ であると同様、集合 $\{a(c)\} \times J_\omega(c)$ は被覆特異点集合の中を動く。(i.e., 被覆特異点集合は動く超越特異点の通り道である。) $\square$

定理 2 (定理 1 の一般化)

Φ は (E_n) の解とす。

(1) (E_n) が被覆特異点集合を持たないとする。

Φ が $a \in D - \Theta$ 上特異点 ω を持つ $\Rightarrow \omega$ は代数的特異点

Φ が $\gamma \in \Theta_{n_1}$ 上特異点 ω を持つ $\Rightarrow \omega$ は代数的 γ 上通性超越的特異点

(よって, Φ が $\gamma \in \Theta$ 上真性特異点を持つ $\Rightarrow \gamma \in \Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_n$)

(2) (E_n) が第 1 ~ 第 $(n-1)$ 種の被覆特異点集合を持たないとする。

Φ が $a \in D - \Theta$ 上 $\gamma \in \Theta_{n_1}$ 上特異点 ω を持つ

$\Rightarrow \omega$ は代数的 γ 上通性超越特異点

(よって, Φ が $\gamma \in \Theta$ 上真性特異点を持つ $\Rightarrow \gamma \in \Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_n$)

(3) (E_n) が第 1 ~ 第 $(n-1)$ 種の被覆特異点集合を持つとき, Φ は $a \in D - \Theta$ 上真性特異点を持つ。 $\square$

(E_1) はどんな場合も被覆特異点集合を持たない。そこで, $n=1$ として (1) を読むと, これは取りも直さず (E_1) に対する定理 1 である。

(B) 定理 β の一般化 ([7], 1, β°)

補題 次の 2 条件を仮定する.

(C1) (E_n) は第 1 ~ 第 $(n-2)$ 種の被覆特異点集合を持つ.

(C2) $a \in D - \Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_{n-1}$

(i.e. $a \in D - \Theta$ ならば $a \in \Theta_n \cup \Theta_{n+1}$)

すると, 解析的集合 $J_a = p^{-1}(a) \cap J = \{a\} \times M \cap J$ は

$$J_a = \bigcup_{\tau \in \Lambda_0} \{p_\tau\} \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_1} \left\{ \bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)} \right\} \subset D \times M$$

と既約分解される. ただし, $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_\sigma$ は有限集合であり, p_τ は点,

$A_k^{(\sigma)}$ は $\dim_{\mathbb{C}} A_k^{(\sigma)} = 1$ の既約成分, $\left\{ \bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)} \right\}$ は連結集合, $\left\{ \bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)} \right\}$

$\cap \left\{ \bigcup_{k \in \Lambda_{\sigma'}} A_k^{(\sigma')} \right\} = \emptyset$ ($\sigma \neq \sigma'$ のとき) $\square$

定理 3 (定理 β の一般化)

$p_j : D \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow y_j$ とおく.

次の 3 条件を仮定する.

(C1), (C2) 上の補題と同一

(C3) 任意の σ, k について, $A_k^{(\sigma)} \not\subset S$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ただし, } S := \{(\Lambda_n)_i \text{ の特異点} \} \subset J_i \text{ に対し,} \\ S = \bigcup_{i=1}^m \partial_i^{-1}(S_i) \text{ とおいた. 定義 4 と比べよ.} \end{array} \right]$$

$\Phi \in (E_n)$ の解とし, Φ の Riemann 面を ω とする. Φ が $x=a$ 上特異点 ω を持ち, 集積値集合が S_ω であるとする. 次のことが成り立つ.

$$(I) \exists \sigma, \exists \Gamma_\sigma \subset \Lambda_\sigma \text{ s.t. } |a| \times S_\omega = \bigcup_{k \in \Gamma_\sigma} A_k^\omega$$

(i.e. $|a| \times S_\omega$ は有限個の代数曲線の和集合である.)

(II) (Picard 型の性質)

$X = D \times M$ 上の atlas (U_i, θ_i) で次の条件を満たすものとする.

$$(C_k) \begin{cases} (1) \exists \text{ 解析的集合 } A_i \subset X \text{ s.t. } U_i = X - A_i \\ (2) \theta_i(U_i) = D \times \mathbb{C}^n \\ (3) |a| \times S_\omega \cap U_i \neq \emptyset \end{cases}$$

もし、ある j に対し、

$$p_j \cdot \theta_i(|a| \times S_\omega \cap U_i) = \bigcup_{k \in \Gamma_\sigma} p_j \cdot \theta_i(A_k^\omega \cap U_i)$$

が無限集合ならば、

$$(i) E_j = \mathbb{C} - \bigcup_{k \in \Gamma_\sigma} p_j \cdot \theta_i(A_k^\omega \cap U_i) - S_i \text{ は有限集合. ただし,}$$

$$I_\sigma = \{k \in \Gamma_\sigma \mid p_j \cdot \theta_i(A_k^\omega \cap U_i) \text{ は無限集合}\}$$

$$(ii) \omega \text{ の任意の近傍 } U \subset R \text{ に対し, } \exists \text{ 開集合 } V \subset U \text{ s.t.}$$

$$(\pi \times \Phi)(V) \subset U_i, \quad p_j \cdot \theta_i \cdot (\pi \times \Phi) \text{ は } V \text{ 上 } \mathbb{C} - E_j \text{ の } \pi \times \Phi \text{ の値をとる.}$$

参考文献

[1] Hille, E., Ordinary Differential Equations in the Complex Domain,

John Wiley & Sons, 1976

[2] Hukuhara, M., Kimura, T., Matuda, T., Equations différentielles

Ordinaires du Premier Ordre dans le Champ Complexe, Publications of Japan, 7, 1961.

- [3] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations, Dover, 1956.
- [4] Kimura, T., Sur les généralisation d'un théorème de Malmquist, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 2 (1953), 47-53
- [5] Kimura, T., Sur les points singuliers essentiels mobiles des équations différentielles du second order, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 5 (1956), 81-94.
- [6] Murata, Y., On fixed and movable singularities of systems of rational differential equations of order n , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 35, no 3 (1988), 439-506.
- [7] Murata, Y., The Pécard type theorem for essential singularities of solutions of systems of n rational differential equations, J. Differential Eq., to appear
- [8] 和田孝弘, 非線形常微分方程式の特異点, 京大数理解論講究録「微分方程式の数式処理とラムの研究」1988年10月
- [9] Painlevé, P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm, Oeuvres de Paul Painlevé, t III, Centre national de la recherche scientifique. France, 1975.