

Klein 群の安定性について

阪市大・理 佐官 謙一

序. non-elementary 有限生成 Klein 群の擬等角変形空間は, Bers[4]によって1970年に初めて明確に論じられたように思われる. それはまた, Maskit[14]及びKra [10]によっても論じられた. Bers[4]では, Teichmüller 空間論に関わる様々な議論, 結果は言うまでもなく, extremal 擬等角写像に関するいくつかの結果(Bers[5] およびそこに引用された文献参照)もまた本質的な役割を果たしている. Maskit[14]及びKra [10]では, extremal 擬等角写像は議論の表面に現れず, その代わりに Maskit's Identity Theorem ([14]の主定理)と呼ばれる擬等角写像に関する新しい種類の定理が重要な役割を果たしている.

そのMaskitの結果を顧慮して, Bers[4]は

“すべての有限生成Klein 群はquasi-stable(擬安定)である”
と予想した. 数年後Kruškal' [11]は, この予想に肯定的に答えた. しかし, そこに展開された議論を検証することは容易で

はないように思われる.

ここでは, B-groups に対してはこの予想が正しいことを, Kruškal' とはかなり違った方法で示してみたい. あわせて, 有限生成 Klein 群の quasiconformal stability (擬等角安定性) に関することにも言及したい (付記参照).

1. 3 種類の stability の定義. Riemann 球 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の等角自己同型の全体は Möbius 群 Möb をなす. Möb の各元 α は $z \rightarrow \alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc=1$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ とかける. 従って Möb は $SL(2, \mathbb{C}) / \pm id$ (ここに id は $SL(2, \mathbb{C})$ の単位元) と同型である複素 3 次元 Lie 群と考えられる.

G を有限生成 Klein 群, $\Omega = \Omega(G)$ をその不連続領域, $\Lambda = \Lambda(G)$ をその limit set とする. $y_1, y_2, \dots, y_k$ を G の一組の生成元, $\chi: G \rightarrow \text{Möb}$ を準同型とする. そのとき χ は点 $(\chi(y_1), \chi(y_2), \dots, \chi(y_k)) \in (\text{Möb})^k$ によって表わされ, 従って準同型 $\chi: G \rightarrow \text{Möb}$ の全体 $\text{Hom}(G, \text{Möb})$ は $(\text{Möb})^k$ の部分集合と考えてよい. すべての parabolic $\gamma \in G$ に対し $(\text{trace } \chi(\gamma))^2 = 4$ をみたす $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ は parabolic と呼ばれる. parabolic な $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ の全体を $\text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ であらわす. 類似に, $\Omega(G)/G$ の punctures に対応するすべての parabolic $\gamma \in G$ に対

し $(\text{trace } \chi(\gamma))^2 = 4$ をみたす $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ を $\Omega(G)$ -parabolic と, ここで呼ぶことにする. $\Omega(G)$ -parabolic な $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ の全体を $\text{Hom}_{\Omega-p}(G, \text{Möb})$ であらわす.

G に関する Beltrami coefficients からなる集合を $M(G)$ であらわす. すなわち

$$M(G) = \left\{ \mu \in L_{\infty}(\mathbb{C}) ; \begin{array}{l} (1.1) \mu(\gamma z) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \mu(z), \gamma \in G, \\ (1.2) \mu|_{\Lambda(G)} = 0, (1.3) \|\mu\| < 1 \end{array} \right\},$$

ここに $L_{\infty}(\mathbb{C})$ は L_{∞} ノルム $\|\cdot\|$ が有限な $\mathbb{C}$ 上の可測函数のなす複素 Banach 空間である. $\mu \in L_{\infty}(\mathbb{C}), \|\mu\| < 1$, に対し, Beltrami 方程式 $w_{\bar{z}}(z) = \mu(z) w_z(z)$ の解で 3 点 $0, 1, \infty$ を不動点にもつ $\hat{\mathbb{C}}$ の自己位相同型 (一意に存在する) を w^{μ} であらわす. 上記条件 (1.1) は $w^{\mu} G (w^{\mu})^{-1} \subset \text{Möb}$ がなりたつことと必要十分であることが容易に確かめられる.

G の擬等角変形とは準同型 $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ で

$G \ni \gamma \rightarrow \chi(\gamma) = \alpha \circ w^{\mu} \circ \gamma \circ (\alpha \circ w^{\mu})^{-1}, \alpha \in \text{Möb}, \mu \in M(G)$ の形で与えられるものをいう. G の擬等角変形の全体は $\text{Hom}(G, \text{Möb})$ の部分集合 $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ をなす. $(\alpha, \mu), \alpha \in \text{Möb}, \mu \in M(G)$ を準同型

$\chi: G \ni \gamma \rightarrow \chi(\gamma) = \alpha \circ w^{\mu} \circ \gamma \circ (\alpha \circ w^{\mu})^{-1}$ へうつす自然な上への写像

$\Phi_G: \text{Möb} \times M(G) \rightarrow \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ を定義できるが, それは正則写像である (Bers [3], [4] 参照). ここで

$$\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_{\Omega-p}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}(G, \text{Möb}) \subset (\text{Möb})^{\mathbb{R}}$$

であることを注意する. また G の生成元のトリオの変化によって, $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$, $\text{Hom}_p(G, \text{Möb})$, $\text{Hom}_{\Omega-p}(G, \text{Möb})$ は各々それぞれ自身と双有理双正則なものにうつるだけであるから, 下記する定義はすべて well-defined, すなわち G の生成元のトリオに依存しないことにも注意しておく.

G を有限生成 Klein 群, $y_1, y_2, \dots, y_k$ を任意に選び固定した G の一組の生成元とする. その仮定下に次の定義を与える.

定義 1. $M(G)$ の原点 0 の任意の開近傍 N に対し, $(\text{Möb})^k$ における $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ の開近傍 U で $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times N)$ をみたすものが存在するとき G は quasi-stable (擬安定) であると呼ばれる.

定義 2. $(\text{Möb})^k$ における $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ の開近傍 U で $U \cap \text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ をみたすものが存在するとき G は quasiconformally stable (擬等角安定) であるという.

定義 3. $(\text{Möb})^k$ における $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ の開近傍 U で $U \cap \text{Hom}_{\Omega-p}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ をみたすものが存在するとき, ここでは G は $\Omega(G)$ -parabolic な意味で quasiconformally stable ($\Omega(G)$ -parabolic な意味で擬等角安定) であると呼ぶこと

にする。

定義 2 は Bers [3] にのべられた *quasiconformal stability* より形の上では強い条件であるが, 両方の定義が同値であることが容易に確かめられる. Gardiner-Kra [7] では定義 3 の条件をみたす G を *quasiconformally stable* であると呼んでいる。

2. いくつかの補題. G を Klein 群とする. G の不連続領域 $\Omega = \Omega(G)$ の成分を G の成分と呼ぶ. G の成分 Δ に対する component subgroup G_Δ とは Δ を不変にする G の maximal subgroup のこととする. $G_\Delta = G$ をみたす G の成分 Δ は G の不変成分と呼ばれる. 不変成分をもつ Klein 群は function group (函数群) と呼ばれる。

Ahlfors の有限性定理 (Kra [9] の VII 章及びそこに引用された文献参照) により, G が有限生成ならば G の non-conjugate な成分のなす finite complete list $\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$ が存在して $\Omega(G)/G = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ (disjoint union) がなりたつ, ここに各 $S_i = \Delta_i/G_{\Delta_i}$, $1 \leq i \leq n$, は有限型の Riemann 面である. この定理の副産物として, G の任意の成分 Δ に対する component subgroup G_Δ は Δ を不変成分にもつ有限生成函数群であること

が Ahlfors [2] の補題 2 によって知られている. 従って G の各成分 Δ の境界 $\partial\Delta$ が G_Δ の limit set $\Lambda(G_\Delta)$ と一致することも容易に確かめられる.

補題 1. G を有限生成 Klein 群, Δ を G の成分, G_Δ を Δ に対する component subgroup とする. f を Δ 上で定義された擬等角写像で $f \circ \gamma(z) = \gamma \circ f(z)$, $z \in \Delta$, $\gamma \in G_\Delta$ をみたすとする. そのとき $f(\Delta) = \Delta$ である.

証明. 先づ $f(\Delta) \subset \Omega(G_\Delta)$ を示す. もしも G_Δ が有限群ならば, 明らかに $f(\Delta) \subset \Omega(G_\Delta) = \hat{\mathbb{C}}$. G_Δ が無限群でしかも $f(\Delta) \cap \Lambda(G_\Delta) \neq \emptyset$ と仮定する. このとき G_Δ の loxodromic または parabolic な元の不動点からなる集合は $\Lambda(G_\Delta)$ で dense であり, $f(\Delta)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない開集合であるから, G_Δ のある loxodromic または parabolic な元 γ_0 の不動点 z_0 で $z_0 \in f(\Delta) \cap \Lambda(G_\Delta)$ をみたすものが存在する. また, 仮定より $\gamma_0 \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ \gamma_0(z)$, $z \in f(\Delta)$, $\gamma \in G_\Delta$ がなりたつ. 従って $\gamma_0 \circ f^{-1}(z_0) = f^{-1}(z_0)$ がなりたち $f^{-1}(z_0)$ は G_Δ の loxodromic または parabolic な元 γ_0 の不動点であるから $f^{-1}(z_0) \in \Lambda(G_\Delta)$. 一方, 明らかに $f^{-1}(z_0) \in \Delta \subset \Omega(G_\Delta)$ がなりたつ. この矛盾は $f(\Delta) \subset \Omega(G_\Delta)$ がなりたつことを示している.

G_Δ の各元 γ は Δ 上 f と可換なので γ は $f(\Delta)$ を不変にする. かくして $f(\Delta)$ は G_Δ で不変な, $\Omega(G_\Delta)$ の空でない連結開集合であ

ることがわかる。従って $f(\Delta)$ を含む G_Δ の不変成分 Δ_1 が存在する。 $f(\Delta)/G_\Delta$ も Δ_1/G_Δ もともに有限型の Riemann 面であり, その punctures は G_Δ の parabolic な元に対応し $f(\Delta)/G_\Delta \subset \Delta_1/G_\Delta$ がなりたつ。このとき [2] の補題 2 と同様に $f(\Delta) = \Delta_1$ を示すことができる。

$f(\Delta) \neq \Delta$ と仮定する。そのときすでに注意したことより, G_Δ は 2 つの不変成分 Δ と $f(\Delta)$ とをもつ有限生成函数群である。かくして Maskit [13] の定理 2 により G_Δ は quasi-fuchs 群であり, Δ の境界及び $f(\Delta)$ の境界は, ともに quasi-circle であり G_Δ の limit set $\Lambda(G_\Delta)$ と一致する。このとき f は $\Delta \cup \partial\Delta$ から $f(\Delta) \cup \partial(f(\Delta))$ の上への位相同型写像に拡張される (Lehto — Virtanen [12] 参照)。その拡張されたものを f であらわす。

さて Kra [10] の補題 1 及び Maskit [14] の系 2 の証明と同様にして矛盾を導くことができる。実際, $z_0 \in \Lambda(G_\Delta) = \partial\Delta$ を G_Δ のある元 γ の attractive な不動点とする。そのとき高々 4 点を除いたすべての $z \in \Delta$ に対し $f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f \circ \gamma^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n \circ f(z) = z_0$ 。

そのような点 z_0 は $\Lambda(G_\Delta)$ で dense に存在するから $f(z) = z$ がすべての $z \in \Lambda(G_\Delta) = \partial\Delta$ に対しなりたつ。かくして f は quasi-fuchs 群 G_Δ の不変成分 Δ を G_Δ のもう一方の不変成分 $f(\Delta)$ にうつし, $\Lambda(G_\Delta) = \partial\Delta = \partial(f(\Delta))$ 上では $f(z) = z$ をみたすから, f は orientation を保ち得ない。このことは, f が擬等角写

像であることに矛盾する。この矛盾は $f(\Delta) = \Delta$ がなりたつことを示している。

補題 2. G を有限生成 Klein 群, Δ を G の成分, w を $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型で G と compatible, すなわち $wGw^{-1} \subset \text{Möb}$ をみたすものとする。 f を Δ 上で定義された擬等角写像で G_Δ と compatible で $f \circ \gamma(z) = w \circ \gamma \circ w^{-1} \circ f(z)$, $z \in \Delta$, $\gamma \in G_\Delta$, をみたすものとする。そのとき $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F で, F は f の拡張であり, また F は w の $\hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{\gamma \in G} \gamma(\Delta)$ への制限 $w|_{\hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{\gamma \in G} \gamma(\Delta)}$ の拡張でもあり, $F \circ \gamma(z) = w \circ \gamma \circ w^{-1} \circ F(z)$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $\gamma \in G$ をみたすものが存在する。

証明. 仮定により Δ 上の擬等角写像 $w^{-1} \circ f$ は, 恒等式 $w^{-1} \circ f \circ \gamma(z) = \gamma \circ w^{-1} \circ f(z)$, $z \in \Delta$, $\gamma \in G_\Delta$ をみたす。従って補題 1 より $f(\Delta) = w(\Delta)$ がなりたつ。さて $\Omega(G)$ 上 $F(z)$ を次のように定義する。 $z \in \Omega(G) - \bigcup_{\gamma \in G} \gamma(\Delta)$ に対しては $F(z) = w(z)$ とおき, $z \in \gamma(\Delta)$, $\gamma \in G$ に対しては $F(z) = w \circ \gamma \circ w^{-1} \circ f \circ \gamma^{-1}(z)$ とおく。 F は well-defined である。何故ならば, もしも $\gamma_1(\Delta) = \gamma_2(\Delta)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ ならば, そのとき $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \in G_\Delta$ であり $z = \gamma_1(\xi)$, $\xi \in \Delta$ とあらわすことにより

$$\begin{aligned} w \circ \gamma_2 \circ w^{-1} \circ f \circ \gamma_2^{-1}(z) &= w \circ \gamma_2 \circ w^{-1} \circ f \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1(\xi) \\ &= w \circ \gamma_2 \circ w^{-1} \circ w \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ w^{-1} \circ f(\xi) \\ &= w \circ \gamma_1 \circ w^{-1} \circ f \circ \gamma_1^{-1}(z) \end{aligned} \quad \text{を得るから。}$$

$f(\Delta) = w(\Delta)$ がなりたつので $F(\gamma(\Delta)) = w(\gamma(\Delta))$, $\gamma \in G$ を得る。

かくして $w^{-1} \circ F$ は $\Omega(G)$ 上で定義された擬等角写像で $\Omega(G)$ をそれ自身の上へうつす. $w^{-1} \circ F \circ \gamma(z) = \gamma \circ w^{-1} \circ F(z)$, $z \in \Omega(G)$, $\gamma \in G$ がなりたつことは容易に確かめられる. このことは, $w^{-1} \circ F$ が Maskit's Identity Theorem ([14] の主定理) の条件をみたすことを意味している. 従ってその定理により, $\hat{C}$ の擬等角自己同型 W で $w^{-1} \circ F$ の拡張であり $\Lambda(G)$ 上 $W(z) = z$ をみたすものが存在する. 故に, $\Lambda(G)$ 上 $F(z) = w(z)$ とおくことにより F が補題にいう性質をもつことが容易に確かめられる.

補題 3. G を Klein 群, F と w とを G と compatible な $\hat{C}$ の擬等角自己同型で $F \circ \gamma \circ F^{-1}(z) = w \circ \gamma \circ w^{-1}(z)$, $z \in \hat{C}$, $\gamma \in G$ をみたすとする. もしも w の complex dilatation μ_w が $\mu_w|_{\Lambda(G)} = 0$ をみたせば, そのとき μ_F もまた $\mu_F|_{\Lambda(G)} = 0$ をみたす. ここに $\mu_w|_{\Lambda(G)} = 0$ は, $\Lambda(G)$ のほとんどすべての点 z で $\mu_w(z) = 0$ がなりたつことを意味する.

証明. $\hat{G} = FG F^{-1}$ とおくと, そのとき $\hat{C}$ の擬等角自己同型 $F \circ w^{-1}$ は $F \circ w^{-1} \circ \hat{\gamma}(z) = \hat{\gamma} \circ F \circ w^{-1}(z)$, $z \in \hat{C}$, $\hat{\gamma} \in \hat{G}$ をみたす. このとき補題 1 の証明で示したようにして $\Lambda(\hat{G})$ 上で $F \circ w^{-1}(z) = z$ がなりたつことがわかる. そのとき, 平面集合のほとんどすべての点はその集合の point of density であること及び $F \circ w^{-1}$ は absolutely continuous on lines ([12] 参照) であることを用いて

$\Lambda(\hat{G})$ のほとんどすべての点 z で $\frac{\partial(F \circ w^{-1})(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ がなりたつことがわかる ([14] の系 3 の証明参照). とくに (2.1) $M_{F \circ w^{-1}}|_{\Lambda(\hat{G})} = 0$ がわかる. 他方 $z = w(\xi)$ とおくと (2.2) $M_{F \circ w^{-1}}(z) = \frac{M_F(\xi) - M_w(\xi)}{1 - \overline{M_F(\xi)} M_w(\xi)} e^{2i \arg w_\xi(\xi)}$ がなりたつ ([2] 参照). 仮定により (2.3) $M_w|_{\Lambda(G)} = 0$ がなりたつ. 明らかに $w(\Lambda(G)) = \Lambda(\hat{G})$ がなりたつから, (2.1), (2.2) 及び (2.3) により $M_F|_{\Lambda(G)} = 0$.

G を不変成分 Δ をもつ有限生成関数群とする. Δ/G の punctures に対応するすべての parabolic $\gamma \in G$ に対し $(\text{trace } \chi(\gamma))^2 = 4$ をみたす $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ の全体からなる集合を $\text{Hom}_{\Delta-p}(G, \text{Möb})$ であらわす. また t を $0 < t < 1$ をみたす任意の実数とし, 次の条件

(2.4) Δ 上で定義された擬等角写像 f で $f \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ f(z)$, $z \in \Delta$, $\gamma \in G$, 及び $\|M_f\| < t$ をみたすものが存在する, ここに M_f は f の Δ 上の complex dilatation,

をみたす $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ の全体からなる集合を, ここでは $\text{Hom}_{\Delta-qc}(G, \text{Möb}; t)$ であらわすことにする.

補題 4. G を不変成分 Δ をもつ有限生成関数群, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ を G の一組の生成元とする. そのとき, G が擬安定であることと, 任意の t , $0 < t < 1$, に対し $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開

近傍 U で $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_{\Delta-qc}(G, \text{Möb}; t)$ をみたすものが存在することとは必要十分である。

証明. 任意に与えられた $t, 0 < t < 1$, に対し $N = \{\mu \in M(G); \|\mu\| < t\}$ とおくと, 明らかに $\Phi_G(\text{Möb} \times N) \subset \text{Hom}_{\Delta-qc}(G, \text{Möb}; t)$ がなりたつ. よって必要性は擬安定性の定義から従う。

逆に十分性を示すために, N を $M(G)$ の原点 0 の任意に与えられた開近傍とする. $N = \{\mu \in M(G); \|\mu\| < t_0\}$, ここに t_0 は $0 < t_0 < 1$ をみたすある実数と仮定してよい. 仮定から $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U で

$$(2.5) \quad U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_{\Delta-qc}(G, \text{Möb}; t_0)$$

をみたすものが存在する. 必要があれば (2.5) の U を十分小さいものでおきかえ $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times N)$ がなりたつことを示せば十分である。

G は有限生成だからすでに述べたように G の non-conjugate な成分からなる finite complete list $\{\Delta_0 = \Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_l\}$ (possibly $l=0$) が存在して, $l \geq 1$ ならば各 component subgroup $G_{\Delta_i}, 1 \leq i \leq l$, は不変成分 Δ_i と Δ を含む別な不変成分をもつ有限生成函数群である. かくして $l \geq 1$ ならば, [3] の定理 2 によって $G_{\Delta_i}, 1 \leq i \leq l$, は有限生成 quasi-fuchs 群であり, 従って擬安定である ([3], [4] 参照).

$l \geq 1$ と仮定する. 各 $i, 1 \leq i \leq l$, に対し $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in_i}$ を G_{Δ_i} の一

組の生成元とする。そのとき各 γ_{ij} , $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq n_i$, は $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k)$ に関するある word $\omega_{ij} = \omega_{ij}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k)$ によって $\gamma_{ij} = \omega_{ij}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ とあらわされる。各 i , $1 \leq i \leq l$, に対し $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k) \in (\text{Möb})^k$ を $(\omega_{i1}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k), \omega_{i2}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k), \dots, \omega_{in_i}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k)) \in (\text{Möb})^{n_i}$ として正則写像 $\Psi_i: (\text{Möb})^k \rightarrow (\text{Möb})^{n_i}$ を定義できる。 $\chi \in \text{Hom}(G, \text{Möb})$ に対し, 明らかに $\Psi_i(\chi) = \chi|_{G_{\Delta_i}}$ になりたつ。

$N_i = \{\mu \in M(G_{\Delta_i}); \|\mu\| < t_0\}$ とおく。各 G_{Δ_i} , $1 \leq i \leq l$, は擬安定なので, $(\text{Möb})^{n_i}$ における $(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in_i})$ の開近傍 U_i で $U_i \cap \text{Hom}_{qc}(G_{\Delta_i}, \text{Möb}) \subset \Phi_{G_{\Delta_i}}(\text{Möb} \times N_i)$ をみたすものが存在する。また (2.5) の U は, すべての i , $1 \leq i \leq l$, に対し $\Psi_i(U) \subset U_i$ をみたすと仮定してよい, そのとき $\Psi_i(\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})) \subset \text{Hom}_{qc}(G_{\Delta_i}, \text{Möb})$ に注意して, $\Psi_i(U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})) \subset U_i \cap \text{Hom}_{qc}(G_{\Delta_i}, \text{Möb}) \subset \Phi_{G_{\Delta_i}}(\text{Möb} \times N_i)$ がかかる。このことは, 任意の $\chi \in U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ に対し $\hat{C}$ の擬等角自己同型 f_i で $f_i \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ f_i(z)$, $z \in \hat{C}$, $\gamma \in G_{\Delta_i}$, および $\|\mu_{f_i}\| < t_0$ をみたすものが存在することを意味する。

$\chi \in \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ なので, $w \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ w(z)$, $z \in \hat{C}$, $\gamma \in G$, 及び $\mu_{w|_{\Lambda(G)}} = 0$ をみたす $\hat{C}$ の擬等角自己同型 w が存在する。

さて, この w と $f_1|_{\Delta_1}$ に補題 2 を適用すると, $f_1|_{\Delta_1}$ 及び $w|_{\hat{C} - \bigcup_{\gamma \in G} \gamma(\Delta_1)}$ の拡張であり $F_1 \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ F_1(z)$, $z \in \hat{C}$, $\gamma \in G$ をみたす $\hat{C}$ の擬等角自己同型 F_1 が存在することがわかる。とくに F_1 は $\|\mu_{F_1|_{\bigcup_{\gamma \in G} \gamma(\Delta_1)}}\| = \|\mu_{f_1|_{\Delta_1}}\| < t_0$ をみたす。そしてまた $\mu_{w|_{\Lambda(G)}} = 0$ が

なりたつから補題3により $M_{F_1}|_{\Lambda(G)} = 0$ がわかる. この F_1 と $f_2|_{\Delta_2}$ とに再び補題2を適用して, $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F_2 で $F_2 \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ F_2(z)$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $\gamma \in G$, $\|M_{F_2}|_{\bigcup_{\gamma \in G} \gamma(\Delta_1 \cup \Delta_2)}\| < t_0$, 及び $M_{F_2}|_{\Lambda(G)} = 0$ をみたすものが存在することがわかる. F_{i-1} と $f_i|_{\Delta_i}$, $2 \leq i \leq l$, とにこの過程をくりかえして, ついに $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F_l で $F_l \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ F_l(z)$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $\gamma \in G$, $\|M_{F_l}|_{\Omega(G) - \Delta}\| < t_0$, および $M_{F_l}|_{\Lambda(G)} = 0$ をみたすものが存在する.

さて (2.5) によって Δ 上の擬等角写像 f で $f \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ f(z)$, $z \in \Delta$, $\gamma \in G = G_\Delta$, 及び $\|M_f\| < t_0$ をみたすものが存在する. F_l と f に今一度補題2を適用することにより, $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 F で $F \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ F(z)$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $\gamma \in G$, $M_F|_{\Lambda(G)} = 0$, および $\|M_F|_{\Omega(G)}\| < t_0$ をみたすものが存在する. このことは $M_F \in N$ を意味し, 従って $\chi \in \Phi_G(\text{Möb} \times N)$ を得る. $\chi \in U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ の選べ方は任意であったから $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times N)$ を得る. すなわち G は擬安定である.

$l=0$ の場合の証明は本質的に上の議論に含まれる.

3. B-groups の擬安定性. D を Riemann 球 $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない開集合でその補集合が2点より多くの点を含むとする. G は D を不変にする Klein 群とする. $\text{pair}(D, G)$ を

configuration (D, G) と呼ぶ (Bers [5] 参照).

configuration (D, G) に関する (正則) 2 次微分とは,

$\phi(\gamma(z))\gamma'(z)^2 = \phi(z)$, $\gamma \in G$ をみたす D 上の正則函数 ϕ のことである.

$\|\phi\|_A = \int_{D/G} |\phi(z)| dx dy < \infty$ をみたすとき ϕ は integrable と呼ば

れ, $\|\phi\|_B = \|\lambda_D^{-2}\phi\| = \sup_{z \in D} \lambda_D^{-2}(z) |\phi(z)| < \infty$ をみたすとき ϕ は bounded

と呼ばれる, ここに $\lambda_D(z)|dz|$ は D 上の Poincaré 計量である.

(D, G) に関する integrable な (正則) 2 次微分の全体は, ノルム

$\|\cdot\|_A$ を伴って複素 Banach 空間 $A(D, G)$ をなす. (D, G) に関する

bounded な (正則) 2 次微分の全体は, ノルム $\|\cdot\|_B$ を伴って複素

Banach 空間 $B(D, G)$ をなす. D/G が有限型ならば $A(D, G)$ は

$B(D, G)$ と一致して有限次元であることが知られている (例えば

Kra [9] の III 章 参照). (D, G) に関する bounded な integrable な

(正則) 2 次微分を, (D, G) に関する cusp form という. 特に G が

non-elementary 有限生成 Klein 群ならば, Ahlfors の有限性

定理より $(\Omega(G), G)$ に関する cusp forms は有限次元複素 Banach 空

間 $A(\Omega(G), G) = B(\Omega(G), G)$ をなす. $B(\Omega(G), G)$ の次元を $\sigma(G)$ で

あらわす.

単連結不変成分をもつ non-elementary 有限生成 Klein 群を

B -group と呼ぶ.

補題 5. G を単連結不変成分 Δ をもつ B -group, w と $\tilde{f}$ と

を G と compatible な $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型とする. h を $\tilde{f}(\Delta)$ 上で定義された局所的に位相同型な有理型函数で

$$(3.1) \text{ Schwarzian derivative } \{h, z\} = \left(\frac{h''(z)}{h'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{h''(z)}{h'(z)} \right)^2, \quad z \in \tilde{f}(\Delta),$$

は configuration $(\tilde{f}(\Delta), \tilde{f}G\tilde{f}^{-1})$ に関する cusp form であり,

$$(3.2) \quad h \circ \tilde{f} \circ \gamma(z) = w \circ \gamma \circ w^{-1} \circ h \circ \tilde{f}(z), \quad z \in \Delta, \gamma \in G \text{ をみたすとする.}$$

そのとき h は単葉である.

証明. $h: U \rightarrow \tilde{f}(\Delta)$ を等角写像とする, ここに U は上半平面をあらわす. $\tilde{G} = \tilde{f}G\tilde{f}^{-1}$, $\Gamma = h^{-1}\tilde{G}h$ とおく. U/Γ は有限型の Riemann 面 $\tilde{f}(\Delta)/\tilde{G}$ と等角同値だから, Γ は有限生成第一種 fuchs 群である. (3.2) より (3.3) $h \circ h \circ \Gamma = h \circ \tilde{G} \circ h = h \circ \tilde{f} \circ \tilde{G} \circ \tilde{f}^{-1} \circ h = w \circ \tilde{G} \circ w^{-1} \circ h \circ k$ かなりたつ. かくして $h \circ k$ は $\chi(\Gamma) = wGw^{-1}$ をみたす準同型 $\chi: \Gamma \rightarrow \text{Möb}$ をひきおこし, $(\chi, h \circ k)$ は Γ の deformation (その正確な定義は Kra [8] 参照) であることがわかる.

先ず, $h \circ k(U) \neq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を示す. $h \circ k(U) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と仮定し $U_1 = (h \circ k)^{-1}(w(\Delta))$ とおく. そのとき (3.3) を顧慮することにより, U_1 は Γ で不変な U の真部分集合であることがわかる. 明らかに $U_1/\Gamma \subset U/\Gamma$ かなりたち, $U_1/\Gamma (\cong w(\Delta)/wGw^{-1})$ 及び U/Γ はともに有限型の Riemann 面であり, その punctures は Γ の parabolic な元に対応する. かくして [2] の補題 2 と同様な方法によつて $U_1 = U$ かなりたつことがわかる. これは U_1 が U の真部分集合であることに矛盾する. 従つて (3.4) $h \circ k(U) \neq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ がわかる.

さらには (3.1) と Nehari [7] の定理 I より

$$\begin{aligned} \sup_{z \in U} \lambda_U^{-2}(z) |\{k \circ k, z\}| &\leq \sup_{z \in U} \lambda_U^{-2}(z) |\{k, kz\}| |k'(z)|^2 + \sup_{z \in U} \lambda_U^{-2}(z) |\{k, z\}| \\ &= \sup_{y \in \tilde{f}(\Delta)} \lambda_{\tilde{f}(\Delta)}^{-2}(y) |\{k, y\}| + \sup_{z \in U} \lambda_U^{-2}(z) |\{k, z\}| < \infty. \end{aligned}$$

かくして (3.5) $\{k \circ k, z\} \in B(U, \Gamma)$ がわかる。

さて、有限生成第一種 fuchs 群 Γ の deformation $(\chi, k \circ k)$ は (3.4) 及び (3.5) をみたすことがわかった。従って Kra [8] の定理 1 より、 $k \circ k$ は unramified, unbounded covering mapping であり、 $k \circ k(U)$ は B-group $\chi(\Gamma) = w G w^{-1}$ の不変成分であり特に単連結である。故に $k \circ k$ は単葉でなければならない。従って k は単葉である。

定理 1. すべての B-groups は擬安定である。

証明. G を単連結不変成分 Δ をもつ B-group, $y_1, y_2, \dots, y_k$ を G の一組の生成元とする。そのとき Gardiner-Kra [7] の定理 11.2 の証明の中から次の事実をひきだすことができる。

各 $t, 0 < t < 1$, に対し $(\text{Möb})^k$ における $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ の開近傍 U で次の性質をみたすものが存在する；

各 $\chi \in U \cap \text{Hom}_{\Delta-p}(G, \text{Möb})$ に対し、 G と compatible な $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 $\tilde{f}$ と $\tilde{f}(\Delta)$ 上の局所的に位相同型な有理型函数 k で次の条件

(3.6) Schwarzian derivative $\{k, z\}$, $z \in \tilde{f}(\Delta)$ は $(\tilde{f}(\Delta), \tilde{f} G \tilde{f}^{-1})$

に関する cusp form,

$$(3.7) \quad k \circ \tilde{f} \circ \gamma(z) = \chi(\gamma) \circ k \circ \tilde{f}(z), \quad z \in \Delta, \gamma \in G, \text{ および}$$

$$(3.8) \quad \|M_{\tilde{f}}\| < t$$

をみたすものが存在する.

$\chi \in U \cap \text{Hom}_{g_C}(G, \text{Möb}) (\subset U \cap \text{Hom}_{\Delta-P}(G, \text{Möb}))$ と仮定する. そのとき $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 w で $w \circ \gamma \circ w^{-1}(z) = \chi(\gamma)(z), z \in \hat{\mathbb{C}}, \gamma \in G$, をみたすものが存在する. (3.7) より $k \circ \tilde{f} \circ \gamma(z) = w \circ \gamma \circ w^{-1} \circ k \circ \tilde{f}(z), z \in \Delta, \gamma \in G$, がわかる. かくして, このとき補題5より k は単葉であり, 従って (3.7) と (3.8) より $\chi \in \text{Hom}_{\Delta-g_C}(G, \text{Möb}; t)$ がわかる.

$\chi \in U \cap \text{Hom}_{g_C}(G, \text{Möb})$ の選び方は任意であるから,

$U \cap \text{Hom}_{g_C}(G, \text{Möb}) \subset \text{Hom}_{\Delta-g_C}(G, \text{Möb}; t)$ がなりたつ. 故に,

補題4より G は擬安定である.

4. 擬安定性と同値ないくつかの条件. この節では, non-elementary 有限生成 Klein 群の擬安定性と同値な条件をいくつか与える.

G を non-elementary 有限生成 Klein 群とする. $B(\Omega(G), G)$ は configuration $(\Omega(G), G)$ に関する bounded (正則) 2 次微分からなる複素 Banach 空間であり, その次元を $\sigma(G)$ であらわしたことを思いおこす. $\|\lambda_{\Omega}^{-2} \phi\| < 1$ をみたす $\phi \in B(\Omega(G), G)$ に対し

$\mu(z) = \lambda_{\Omega}^{-2}(z) \overline{\phi(z)}$, $z \in \Omega(G)$ および $\mu|_{\Lambda(G)} = 0$ とおく.

$\lambda_{\Omega}^2(\delta(z)) \overline{\delta'(z)} \delta'(z) = \lambda_{\Omega}^2(z)$, $\delta \in G$ なので $\mu \in M(G)$ になりたつ. そのような μ を G に関する canonical Beltrami coefficients という. それらは $\sigma(G)$ 次元のあるベクトル空間の単位球 $M_{\text{can}}(G)$ をなす.

補題 6. G を有限生成 Klein 群, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ を G の一組の生成元, $\alpha \in \text{Möb}$ とする. $G_1 = \alpha G \alpha^{-1}$ とおく. そのとき双正則な上への 1 対 1 写像 $\mathcal{H}: (Möb)^k \rightarrow (Möb)^k$ 及び $\tau: M(G) \rightarrow M(G_1)$ で次の性質

$$(4.1) \quad \tau(0) = 0, \quad \tau(M(G)) = M(G_1),$$

$$(4.2) \quad \mathcal{H}((\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)) = (\alpha \circ \gamma_1 \circ \alpha^{-1}, \alpha \circ \gamma_2 \circ \alpha^{-1}, \dots, \alpha \circ \gamma_k \circ \alpha^{-1}),$$

$$\mathcal{H}(\text{Hom}_{q_G}(G, \text{Möb})) = \text{Hom}_{q_{G_1}}(G_1, \text{Möb}), \quad \mathcal{H}(\text{Hom}_p(G, \text{Möb})) = \text{Hom}_p(G_1, \text{Möb}),$$

$$\mathcal{H}(\text{Hom}_{\Omega-p}(G, \text{Möb})) = \text{Hom}_{\Omega-p}(G_1, \text{Möb}), \quad \text{および}$$

(4.3) $M(G)$ の任意の部分集合 N に対し

$$\mathcal{H}(\Phi_G(Möb \times N)) = \Phi_{G_1}(Möb \times \tau(N)),$$

をみたすものが存在する. 特に G が擬安定または擬等角安定または $\Omega(G)$ -parabolic な意味で擬等角安定であることに対応して, G_1 も同じ性質をもつ.

証明. $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k) \in (Möb)^k$ に対し $\mathcal{H}((\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k)) = (\alpha \circ \tilde{\gamma}_1 \circ \alpha^{-1}, \alpha \circ \tilde{\gamma}_2 \circ \alpha^{-1}, \dots, \alpha \circ \tilde{\gamma}_k \circ \alpha^{-1})$ で $\mathcal{H}$ を定義する. $\mu \in M(G)$ に対し $\tau(\mu)(z) = \mu(\alpha^{-1}z) \frac{\overline{\alpha^{-1}'(z)}}{\alpha^{-1}'(z)}$, $z \in \mathbb{C}$ で τ を定義する. $\mu \in M(G)$ に対し $W = \mu \circ \alpha^{-1}$ とおくと $\mu_W = \tau(\mu)$ がな

りたつ。この容易に確かめられる事実には注意すると ④) とてとが上記の性質をもつことを確かめるのは難しくない。補題の後半の部分は、これらの性質と 3 種類の安定性の定義からただちに従う。

注意。さらには、 G が non-elementary の場合は $\varphi \in B(\Omega(G), G)$ に対し $\varphi(z) = \varphi(\alpha^{-1}(z))(\alpha^{-1}(z))^2$ とおくと $\varphi \in B(\Omega(G_1), G_1)$ がなりたつ。この容易に確かめられる事実には注意すると、 $M_{\text{can}}(G) = M_{\text{can}}(G_1)$ がなりたつこともわかる。

補題 7. G を non-elementary 有限生成 Klein 群, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ を G の一組の生成元とする。そのとき次の 3 条件は互いに同値である,

(i) G は擬安定である,

(ii) $M_{\text{can}}(G)$ における原点 0 の任意の開近傍 $\tilde{N}$ に対し, $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U で

$U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \tilde{N})$ をみたすものが存在する, 及び

(iii) V を $\text{Möb} \times M_{\text{can}}(G)$ における $(\text{id}, 0)$ の十分小さい開近傍とす

ると Φ_G の V への制限 $\Phi_G|_V$ は V を $\text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ における

$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ のある開近傍の上へ双正則にうつす。とくに,

$(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ のある開近傍 U で $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$

が U の $\sigma(G) + 3$ 次元 (複素解析的) 部分多様体となるものが存在

する。

証明. 補題6及びその下にのべた注意により3点 $0, 1, \infty$ は各々 G の loxodromic な元 $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*$ の attractive な不動点としてよい. このとき, $M(G)$ の 0 の十分小さい開近傍 $\hat{N}$ を固定すると, 連続開写像 $\pi_\Omega: \hat{N} \rightarrow M_{\text{can}}(G)$ で $\pi_\Omega(0) = 0$ 及び $\Phi_G(M) = \Phi_G(\pi_\Omega(M))$, $M \in \hat{N}$ をみたすものが存在することが Bers [5] の定理1により知られている. G が擬安定であると仮定する. $\tilde{N}$ を $M_{\text{can}}(G)$ における与えられた 0 の開近傍とする. そのとき $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U で $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \pi_\Omega^{-1}(\tilde{N}))$ をみたすものが存在する. $\Phi_G(\text{Möb} \times \pi_\Omega^{-1}(\tilde{N})) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \tilde{N})$ であるから, (i) ならば (ii) がなりたつ. 擬安定性の定義より明らかに (iii) ならば (i) がなりたつ. かくして (ii) ならば (iii) がなりたつことを示すことだけが残されている. もしも $W = \alpha \circ W^k$, $\alpha \in \text{Möb}$, $\mu \in M(G)$ ならば, そのとき α は準同型 $\chi: \gamma \rightarrow W \circ \gamma \circ W^{-1}$ により一意にきまる.

実際, α は $0, 1, \infty$ を各々 $\chi(\gamma_1^*), \chi(\gamma_2^*)$ および $\chi(\gamma_3^*)$ の attractive な不動点へうつさねばならない. かくして Möb の id の任意の開近傍 W に対し, $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U_1 で

$$(4.4) \quad U_1 \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(W \times M(G)) \text{ をみたすものが存在する.}$$

$\tilde{N}$ を $M_{\text{can}}(G)$ における 0 の開近傍とする. (ii) を仮定する.

そのとき $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U で

$$(4.5) \quad U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(\text{Möb} \times \tilde{N}) \text{ をみたすものが存在する.}$$

$U \subset U_1$ と仮定してよい。(4.4) と (4.5) によつて

$$U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(W \times M(G)) \cap \Phi_G(\text{Möb} \times \tilde{N}) \subset \Phi_G(W \times \tilde{N}) \text{ がわかる.}$$

このことは, $\text{Möb} \times M_{\text{can}}(G)$ の $(\text{id}, 0)$ の任意の開近傍 $V = W \times \tilde{N}$ に対し, $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U で

(4.6) $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb}) \subset \Phi_G(V)$ をみたすものが存在することを意味する. Φ_G の $\text{Möb} \times M_{\text{can}}(G)$ への制限 $\Phi_G|_{\text{Möb} \times M_{\text{can}}(G)}$ は点 $(\text{id}, 0)$ で最大の階数 $\sigma(G) + 3$ をもつことが, Bers [4] の補題 1 により知られているので, 上記 (4.6) は (iii) がなりたつことを示している. すなわち, (ii) ならば (iii) がなりたつ.

5. 安定性に関する評価. Klein 群 G は 2 次の多項式からなるベクトル空間 Π に $p\gamma(z) = \frac{p\gamma(z)}{\gamma(z)}$, $p \in \Pi$, $\gamma \in G$ で作用する. 従つて (一次元 Eichler) cohomology 群 $H^1(G, \Pi) = \frac{Z^1(G, \Pi)}{B^1(G, \Pi)}$ を定義できる, こゝに $Z^1(G, \Pi)$ は cocycles のなす空間, $B^1(G, \Pi)$ は coboundaries のなす空間である. $p \in Z^1(G, \Pi)$ が G のすべての parabolic 巡回部分群 G_0 に対し $p|_{G_0} \in B^1(G_0, \Pi)$ をみたすとき, p は parabolic cocycles のなす空間 $PZ^1(G, \Pi)$ に属するという. $PH^1(G, \Pi) = \frac{PZ^1(G, \Pi)}{B^1(G, \Pi)}$ を parabolic cohomology 群という.

類似に, $p \in Z^1(G, \Pi)$ が $\Omega(G)/G$ の punctures によつてきまる G のすべての parabolic 巡回部分群 G_0 に対し $p|_{G_0} \in B^1(G_0, \Pi)$ をみた

すとき, P は $\Omega(G)$ -parabolic cocycles のなす空間 $PZ_{\Omega}^1(G, \Pi)$ に属するという. $PH_{\Omega}^1(G, \Pi) = PZ_{\Omega}^1(G, \Pi) / B^1(G, \Pi)$ と定める. 定義より,

$$(5.1) \quad \dim PH^1(G, \Pi) = \dim PZ^1(G, \Pi) - \dim B^1(G, \Pi), \text{ および}$$

$$(5.2) \quad \dim PH_{\Omega}^1(G, \Pi) = \dim PZ_{\Omega}^1(G, \Pi) - \dim B^1(G, \Pi) \text{ をうる.}$$

non-elementary Klein 群 G に対しては, いわゆる Bers 写像 $\beta^*: B(\Omega(G), G) \rightarrow H^1(G, \Pi)$ は反線形で単射であり, $\beta^*(B(\Omega(G), G)) \subset PH^1(G, \Pi)$ がなりたつことがよく知られている (Kra [9] 参照).

Gardiner-Kra は [7] において $\text{Hom}(G, \text{Möb})$ と $H^1(G, \Pi)$ との密接な関係を論じた. ここでは, [7] の中にある結果を少し強い形にして, 次の 2 つの補題としてのべる. その証明は [7] にすでに含まれている.

補題 8. G を有限生成 Klein 群, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ を G の一組の生成元とする. そのとき $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U , U の $\dim PZ^1(G, \Pi)$ 次元部分多様体 V_1 , 及び U の $\dim PZ_{\Omega}^1(G, \Pi)$ 次元部分多様体 V_2 で $U \cap \text{Hom}_p(G, \text{Möb}) \subset V_1$, $U \cap \text{Hom}_{\Omega-p}(G, \text{Möb}) \subset V_2$ をみたすものが存在する. さらに $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U に対し, $U \cap \text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ 自身が U の部分多様体ならば, それは $\dim PZ^1(G, \Pi)$ 次元であり, また $U \cap \text{Hom}_{\Omega-p}(G, \text{Möb})$ 自身が U の部分多様体ならば, それは

$\dim PZ_{\Omega}^1(G, \Pi)$ 次元である ([7] の定理 8.4 参照).

注意. non-elementary Klein 群 G に対しては
 $\dim B^1(G, \Pi) = 3$ が知られている (Kra [9] 参照), かくして有限生成
 non-elementary Klein 群 G に対しては, (5.1) と (5.2) より,

$$(5.3) \quad \dim PZ^1(G, \Pi) = \dim PH^1(G, \Pi) + 3, \quad \text{および}$$

$$(5.4) \quad \dim PZ_{\Omega}^1(G, \Pi) = \dim PH_{\Omega}^1(G, \Pi) + 3 \quad \text{を得る.}$$

補題 9. G を non-elementary 有限生成 Klein 群とする.

$\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH^1(G, \Pi)$ ならば, G は擬等角安定であり擬安定
 でもある. $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH_{\Omega}^1(G, \Pi)$ ならば, G は $\Omega(G)$ -parabolic
 な意味で擬等角安定であり, 擬安定でもある. さらに G を
 B -group と仮定すると, G が $\Omega(G)$ -parabolic な意味で擬等角
 安定ならば, $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH_{\Omega}^1(G, \Pi)$ がなりたつ ([7] の定理 8.4
 及び定理 11.2 の系参照).

上の補題 9 より良く, 次の定理を得る.

定理 2. G を non-elementary 有限生成 Klein 群とする. そ
 のとき, G が擬等角安定でありかつ擬安定であることと
 $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH^1(G, \Pi)$ がなりたつこととは必要十分である.
 さらに, G が $\Omega(G)$ -parabolic な意味で擬等角安定でありかつ

つ擬安定であることと $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH_{\Omega}^1(G, \Pi)$ がなりたつこととは必要十分である。

証明. 補題9により必要性のみを示せば十分である. G が擬等角安定でありかつ擬安定であると仮定する. そのとき補題7により, $(\text{Möb})^k$ における $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U で $U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ が U の $\sigma(G)+3$ 次元部分多様体となるものが存在する, ここに $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ は G の一組の生成元である. G が擬等角安定なので, 必要があれば U を十分小さいものにおきかえることにより, (5.5) $U \cap \text{Hom}_p(G, \text{Möb}) = U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$ と仮定してよい. そのとき補題8 および (5.4) により $U \cap \text{Hom}_p(G, \text{Möb})$ は U の $\dim PH^1(G, \Pi)+3$ 次元部分多様体である. かくして (5.5) により (5.6) $\sigma(G)+3 = \dim PH^1(G, \Pi)+3$ がなりたつことがわかる. β^* は単射であるから, (5.6) は $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH_{\Omega}^1(G, \Pi)$ がなりたつことを意味する.

同様にして, G が $\Omega(G)$ -parabolic な意味で擬等角安定でありかつ擬安定ならば, $\beta^*(B(\Omega(G), G)) = PH_{\Omega}^1(G, \Pi)$ を得る.

6. 応用. K を 1 より大きい正の実数とする. K -擬等角写像の正規族に関する結果([II]のII章の定理5.1 及び定理5.2) と, K -擬等角写像による近似に関する結果([II]のIV章の定理5.2)

と前述のこと(補題3, 補題7 等)とを用いて示すことができる次の定理を, 証明なしに記す.

定理3. G を擬安定な non-elementary 有限生成 Klein 群,
 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ を G の一組の生成元とする. そのとき $(\text{Möb})^k$ における
 $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ の開近傍 U を十分小さくとると, 各 $\chi_n \in U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$
 に次の性質をもつ $\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角自己同型 W_n を対応させられる;

(i) $W_n \circ \gamma(z) = \chi_n(\gamma) \circ W_n(z)$, $\gamma \in G$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $M_{W_n} \in M_{can}(G)$, および

(ii) 列 $\chi_n \in U \cap \text{Hom}_{qc}(G, \text{Möb})$, $n=1, 2, \dots$, が identity isomorphism

$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ に収束すれば, 球面距離に関し $\hat{\mathbb{C}}$ 上 一様に

$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(z) = z$ がなりたち, また $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{W_n}(z) = 0$ が $\hat{\mathbb{C}}$ でほとんど

どこいたるところなりたち.

定理4. G を non-elementary 有限生成 Klein 群とする. G
 が擬等角安定ならば, そのとき $\Lambda(G)$ に support をもつ G に関
 する Beltrami coefficients は 0 以外に存在しない.

(付記). [1], [3], [5], [6], [15], [16] のなかのいくつかの結果あるいは
 証明法を用いて, 定理1 を礎にして, 定理1 より良く

“すべての有限生成 Klein 群は擬安定である.” という予想
 を肯定できるように思われる.

- [1] W. Abikoff : Constructability and Bers stability of Kleinian groups, *Discontinuous Groups and Riemann Surfaces*, Ann. of Math. Studies 79(1974), 3-12.
- [2] L.V. Ahlfors : The structure of finitely generated Kleinian groups, *Acta Math.* 122(1969), 1-17.
- [3] L. Bers : On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I, *Ann. of Math.* 91(1970), 570-600.
- [4] L. Bers : Spaces of Kleinian groups, *Several Complex Variables, I*(Maryland, 1970), *Lecture Notes on Mathematics* 155(Springer-Verlag, 1970), 9-34.
- [5] L. Bers : Extremal quasiconformal mappings, *Advances in the Theory of Riemann Surfaces*, Ann. of Math. Studies 66(Princeton, 1971), 27-52.
- [6] L.R. Ford : *Automorphic Functions*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1951.
- [7] F. Gardiner and I. Kra : Stability of Kleinian groups, *Indiana University Math. J.* 21(1972), 1037-1059.
- [8] I. Kra : Deformations of Fuchsian groups, II, *Duke Math. J.* 38(1971), 499-508.

- [9] I. Kra : Automorphic Forms and Kleinian Groups, W. A. Benjamin, 1972.
- [10] I. Kra : On spaces of Kleinian groups, Comment. Math. Helv. 47(1972), 53–69.
- [11] S.L. Kruškal' : Stability of Kleinian groups, Soviet Math. Dokl. 15(1974), 822–825.
- [12] O. Lehto and K.I. Virtanen : Quasiconformal mappings in the plane domain, Springer-Verlag, 1973.
- [13] B. Maskit : On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups II, Ann. of Math. 91(1970), 608–638.
- [14] B. Maskit : Self-maps on Kleinian groups, Amer. J. of Math. 93(1971), 840–856.
- [15] B. Maskit : Decomposition of certain Kleinian groups, Acta Math. 130(1973), 243–263.
- [16] M. Nakada : Cohomology of finitely generated Kleinian groups with an invariant component, J. Math. Soc. Japan 28(1976), 699–711.
- [17] Z. Nehari : Schwarzian derivatives and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949), 545–551.