

Magnetic な不純物がある超伝導体の order parameter の空間的变化

— 多時間 Green 関数の方法 —

東教大理 北 村 豊 平

(10月15日受理)

§ 1. 序

1)
前の論文 (以下 I と記す) で, 1 個の magnetic impurity による, Order parameter $\Delta(r)$ の空間的变化を遷移温度 T_c の極近傍で, J の 3 次まで議論した, impurity spin の dynamics をとり入れることにより, J^3 の項に Kondo 効果が現われ, $\log$ 返散が起こることを述べたが, J の高次の振舞いをさらに検討する必要がある。

2)
spin の dynamics をとり入れた Doniach の方法, Abrikosov の方法等³⁾は取扱いが複雑であり, 超伝導体に拡張することは一層, 複雑になろう, 最近, Kawamura は Temperature Green 関数を, δ - 関数を導入して,⁴⁾ 2 時刻から, 多時刻に拡張し, systematic に lower divergent term まで拾うことに成功した, 彼の方法の essential なことは,

$$\begin{aligned} & \ll T \{ A(\tau_{i-1}), B(\tau_{i-1}), C(\tau_{i-2}), \dots, D(\tau) \} \gg \\ &= \int_{-\beta}^{\beta} \delta(\tau_i - \tau_{i-1}) \ll T \{ A(\tau_i), B(\tau_{i-1}), C(\tau_{i-2}), \dots, D(\tau) \} \gg d\tau_i \end{aligned} \quad (1)$$

として同時刻の electron field operator と, impurity spin operator を, δ - 関数を導入して, 2 時刻に分離し, electron field operator の運動だけを逐次追求し, spin operator のみの Green 関数で記述し, その後, spin operator の運動をしらべることにある。

彼の論文では, Green 関数の self-energy part を定義して, 検討しているが, 空間的变化を問題にする限り, その方法は使えない, しかし,

彼の多時間 Green 関数を, 空間的変化を exact に取扱えるように, reformulate することにより, 見やすくすることが出来る。即ち, s-d 相互作用の normal 状態の場合も, super 状態の場合も, systematic に議論出来, 空間的変化を無視すれば, Kawamura の結論と一致する。また, この論文で明らかにするように, 超伝導体の Order parameter の空間的変化について, most divergent term を拾うことは, 容易に出来る。

以下 § 2 では, 多時間 Green 関数の方法で, $\hat{\Gamma}$ -matrix を exact に求める。§ 3 では, $\hat{t}$ -matrix を導入し, most divergent term を, Δ の一次まで求める。§ 4 では, I と平行して, order parameter の積分方程式をとく, Δ の空間的変化を求める。

§ 2 $\hat{\Gamma}$ -matrix

I で扱ったように, Temperature Green 関数を考える。

$$\begin{aligned}\hat{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathcal{F}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathcal{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), -\mathcal{G}_\omega(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle\langle \phi_\uparrow(\mathbf{r}); \phi_\uparrow^+(\mathbf{r}') \rangle\rangle_\omega & \langle\langle \phi_\uparrow(\mathbf{r}); \phi(\mathbf{r}') \rangle\rangle_\omega \\ \langle\langle \phi_\downarrow^+(\mathbf{r}); \phi_\downarrow^+(\mathbf{r}') \rangle\rangle_\omega & \langle\langle \phi_\downarrow^+(\mathbf{r}); \phi(\mathbf{r}') \rangle\rangle_\omega \end{pmatrix} \quad (2)\end{aligned}$$

この運動方程式は,

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(r) \tau_1 \right) \hat{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) \hat{\Gamma}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3)$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(\chi, \chi') &= \begin{pmatrix} \Gamma(\chi, \chi') & \Phi(\chi, \chi') \\ \Phi^+(\chi, \chi') & \Gamma^+(\chi, \chi') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle\langle \phi_\uparrow S_z + \phi_\downarrow S_-; \phi_\uparrow^+(\chi') \rangle\rangle & \langle\langle \phi_\uparrow S_z + \phi_\downarrow S_-; \phi_\downarrow(\chi') \rangle\rangle \\ \langle\langle \phi_\downarrow^+ S_z - \phi_\uparrow^+ S_-; \phi_\downarrow^+(\chi') \rangle\rangle & \langle\langle \phi_\downarrow^+ S_z - \phi_\uparrow^+ S_-; \phi_\uparrow(\chi') \rangle\rangle \end{pmatrix} \quad (4)\end{aligned}$$

である。 $\hat{\Gamma}(\chi, \chi')$ を § 1 で述べた方法で, electron field operator と spin operator の時刻を分離して,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= T \sum_{\omega_1} \tilde{\Gamma}(\omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= T \sum_{\omega_1} \left(\begin{aligned} &\langle\langle \phi_{\uparrow}, S_z; \phi_{\uparrow}^+ \rangle\rangle + \langle\langle \phi_{\downarrow}, S_-; \phi_{\uparrow} \rangle\rangle, \\ &\langle\langle \phi_{\downarrow}^+, S_z; \phi_{\uparrow}^+ \rangle\rangle - \langle\langle \phi_{\uparrow}^+, S_-; \phi_{\uparrow} \rangle\rangle, \\ &\langle\langle \phi_{\uparrow}, S_z; \phi_{\downarrow}(r') \rangle\rangle + \langle\langle \phi_{\downarrow}, S_-; \phi_{\downarrow} \rangle\rangle \\ &\langle\langle \phi_{\downarrow}^+, S_z; \phi_{\downarrow}(r') \rangle\rangle - \langle\langle \phi_{\uparrow}^+, S_-; \phi_{\downarrow} \rangle\rangle \end{aligned} \right)_{\omega_1, \omega - \omega_1, -\omega} \quad (5)\end{aligned}$$

さらに, $\hat{\Gamma}(\omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を, 形式的に, 次の様を書く,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(\omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \begin{pmatrix} \langle\langle \phi_{\uparrow}(\mathbf{r}), -\langle\langle \phi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle\rangle \\ \langle\langle \phi_{\downarrow}^+(\mathbf{r}), \langle\langle \phi_{\uparrow}^+(\mathbf{r}) \rangle\rangle \end{pmatrix}_{\omega_1} \\ &\quad \begin{pmatrix} S_z; \phi_{\uparrow}^+(\mathbf{r}) \rangle\rangle & S_z; \phi_{\downarrow} \rangle\rangle \\ -S_-; \phi_{\uparrow}^+(\mathbf{r}') \rangle\rangle & -S_-; \phi_{\downarrow}(\mathbf{r}') \rangle\rangle \end{pmatrix}_{\omega - \omega_1, -\omega} \quad (6)\end{aligned}$$

こうしておいて, 右辺の左側の matrix に注目して, electron field operator の運動を繰り返して, 追って行く。

$$\begin{aligned}&\left(i\omega_1 + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(r) \tau_1 \right) \tilde{\Gamma}(\omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -\beta \delta_{\omega, \omega_1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle\langle S_z \rangle\rangle_{\omega - \omega_1} \\ &\quad - \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \langle\langle \phi_{\uparrow} S_z + \phi_{\downarrow} S_- \rangle\rangle, & \langle\langle \phi_{\downarrow} S_z - \phi_{\uparrow} S_{\uparrow} \rangle\rangle \\ \langle\langle \phi_{\downarrow}^+ S_z - \phi_{\uparrow}^+ S_- \rangle\rangle, & -\langle\langle \phi_{\uparrow}^+ S_z + \phi_{\downarrow}^+ S_{\uparrow} \rangle\rangle \end{pmatrix}_{\omega_1} \\ &\quad \begin{pmatrix} -S_z; \phi_{\uparrow}^+ \rangle\rangle & S_z; \phi_{\downarrow} \rangle\rangle \\ -S_-; \phi_{\uparrow}^+ \rangle\rangle & -S_-; \phi_{\downarrow} \rangle\rangle \end{pmatrix}_{\omega - \omega_1, -\omega} \quad (7)\end{aligned}$$

北村豊平

ここで、右辺の第一項は、0である。第二項は、(1)式により、時間を分離する。今、簡単化するため、

$$\begin{aligned} r &= \phi_{\uparrow} S_z + \phi_{\downarrow} S_- & r^+ &= \phi_{\uparrow}^+ S_z + \phi_{\downarrow}^+ S_+ \\ \varphi &= \phi_{\downarrow} S_z - \phi_{\uparrow} S_+ & \varphi^+ &= \phi_{\downarrow}^+ S_z - \phi_{\uparrow}^+ S_+ \end{aligned} \quad (8)$$

なる記号を導入すれば、(7)式は、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} &\left(i\omega_1 + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(r) \tau_1 \right) \tilde{\Gamma}(\omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -\frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) T \sum_{\omega_2} \tilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \begin{pmatrix} \ll r, \ll \varphi \\ \ll \varphi^+, -\ll r^+ \end{pmatrix}_{\omega_2, \omega_1 - \omega_2} \\ &\quad \begin{pmatrix} S_z; \phi_{\uparrow}^+ \gg, S_z; \phi_{\downarrow} \gg \\ -S_-; \phi_{\uparrow}^+ \gg, -S_-; \phi_{\downarrow} \gg \end{pmatrix}_{\omega - \omega_1, -\omega} \end{aligned} \quad (10)$$

こうして、次々と $\begin{pmatrix} \ll r, \ll \varphi \\ \ll \varphi^+, -\ll r^+ \end{pmatrix}$ 中の electron field operator の運動を追うことにより、

$$\begin{aligned} &\left(i\omega_2 + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(r) \tau_1 \right) \tilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -\beta \delta_{\omega_2, \omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \begin{pmatrix} \ll \uparrow S_z - \ll \uparrow S_+ \\ \ll \downarrow S_z - \ll \downarrow S_+ \end{pmatrix}_{\omega_1 - \omega} \begin{pmatrix} S_z \uparrow \gg & S_z \downarrow \gg \\ -S_- \uparrow \gg & -S_- \downarrow \gg \end{pmatrix}_{\omega - \omega_1} \\ &\quad - \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) T \sum_{\omega_3} \tilde{\Gamma}(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、右辺第一項は、matrix 演算は、普通に行い、 $\ll \uparrow$ と Couple するのは、 $\uparrow \gg$ のみとする。すなわち $\ll \uparrow \dots \downarrow \gg = 0$ と定義する。この

物理的意味は, spin が Conserve されることである。また,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \begin{pmatrix} \lll r & \lll \varphi \\ \lll \varphi^+ & -\lll r^+ \end{pmatrix}_{\omega_3, \omega_2 - \omega_3} \\ &\begin{pmatrix} S_z & -S_+ \\ -S_- & -S_z \end{pmatrix}_{\omega_1 - \omega_3} \begin{pmatrix} S_z; \phi_{\uparrow}^+ \ggg & S_z; \phi_{\downarrow} \ggg \\ -S_-; \phi_{\uparrow}^+ \ggg & -S_-; \phi_{\downarrow} \ggg \end{pmatrix}_{\omega - \omega_1, -\omega} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

である。一般的に,

$$\begin{aligned} &\left(i\omega_i + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(\mathbf{r}) \tau_1 \right) \tilde{\Gamma}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_2, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -\beta \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\omega_i, \omega} \begin{pmatrix} \lll_{\uparrow} S_z & -\lll_{\uparrow} S_+ \\ \lll_{\downarrow} S_z & -\lll_{\downarrow} S_+ \end{pmatrix}_{\omega_{i-1} - \omega_i} \begin{pmatrix} S_z & -S_+ \\ -S_- & -S_z \end{pmatrix}_{\omega_{i-2} - \omega_{i-1}} \\ &\dots \begin{pmatrix} S_z & -S_+ \\ -S_- & -S_z \end{pmatrix}_{\omega_2 - \omega_1} \begin{pmatrix} S_{z\uparrow} \ggg & S_{z\downarrow} \ggg \\ -S_{-\uparrow} \ggg & -S_{-\downarrow} \ggg \end{pmatrix}_{\omega - \omega_1} \\ &- \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) T \sum_{\omega_{i+1}} \begin{pmatrix} \lll r & \lll \varphi \\ \lll \varphi^+ & -\lll r^+ \end{pmatrix}_{\omega_{i+1}, \omega_i - \omega_{i-1}} \begin{pmatrix} S_z & -S_+ \\ -S_- & -S_z \end{pmatrix}_{\omega_{i-2} - \omega_{i-1}} \\ &\dots \begin{pmatrix} S_z & -S_+ \\ -S_- & -S_z \end{pmatrix}_{\omega_2 - \omega_1} \begin{pmatrix} S_z; \phi_{\uparrow}^+ \ggg & S_z; \phi_{\downarrow} \ggg \\ -S_-; \phi_{\uparrow}^+ \ggg & -S_-; \phi_{\downarrow} \ggg \end{pmatrix}_{\omega - \omega_1} \\ &\equiv -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega) \\ &- \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) T \sum_{\omega_{i+1}} \tilde{\Gamma}(\omega_{i+1}, \omega_i, \dots, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで, order parameter $\Delta(r)$ を effective に持つ超伝導体の Green

関数を導入する。

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \Delta(r)\right) \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (14)$$

(14) 式を使って, $\tilde{\Gamma}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\int \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \{ \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') \tilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega) \\ &\quad + \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}'') T \sum_{\omega_{i+1}} \tilde{\Gamma}(\omega_{i+1}, \omega_i, \dots, \omega_1, \omega; \mathbf{r}'', \mathbf{r}') \} d\mathbf{r}'' \\ &= -\hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega) \\ &\quad - \frac{J}{2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, 0) T \sum_{\omega_{i+1}} \tilde{\Gamma}(\omega_{i+1}, \omega_i, \dots, \omega_1, \omega; 0, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (15)$$

と書かれる。

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\omega_1, \omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\hat{G}_{\omega_1}^0(\mathbf{r}, 0) T \sum_{\omega_2} \tilde{\Gamma}(\omega_2, \omega_1, \omega; 0, \mathbf{r}') \\ &= -\hat{G}_{\omega_1}^0(\mathbf{r}, 0) T \sum_{\omega_3} \frac{J}{2} \{ -\hat{G}_{\omega_2}^0(0, \mathbf{r}') \tilde{S}(\omega_2, \omega_1, \omega) \\ &\quad - \frac{J}{2} \hat{G}_{\omega_2}^0(0, 0) T \sum_{\omega_3} \tilde{\Gamma}(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega) \} \\ &= -\hat{G}_{\omega_1}^0(\mathbf{r}, 0) T \sum_{\omega_2} \left(-\frac{J}{2}\right) \{ \hat{G}_{\omega_2}^0(0, \mathbf{r}') \tilde{S}(\omega_2, \omega_1, \omega) \\ &\quad + \hat{G}_{\omega_2}^0(0, 0) T \sum_{\omega_3} \left(-\frac{J}{2}\right) \hat{G}_{\omega_3}^0(0, \mathbf{r}') \times \tilde{S}(\omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega) + \dots \} \\ &= -\hat{G}_{\omega_1}^0(\mathbf{r}, 0) \sum_{i=2}^{\infty} \left(\prod_{k=2}^{i-1} T \sum_{\omega_k} \left(-\frac{J}{2}\right) \hat{G}_{\omega_k}^0(0, 0) \right) \\ &\quad T \sum_{\omega_i} \left(-\frac{J}{2}\right) \hat{G}_{\omega_i}^0(0, \mathbf{r}') \tilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, $\prod$ の上の $\rightarrow$ は, 矢印の方向に順番に並べることを意味する。次に, $\tilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega)$ の spin の運動を追求しよう。そのとき, spin 間の Commutator が出てくるが, それを explicit に見るためには,

Commutator を必要とする matrix の積を作ってみればよい, つまり,

$$\begin{aligned}
& (i\omega_{i-1} - i\omega_{i-2}) \tilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega) \\
&= \beta \delta_{\omega_i, \omega} \left[\left(\begin{array}{c} \llcorner \uparrow S_z, -\llcorner \uparrow S_+ \\ \llcorner \downarrow S_z, -\llcorner \downarrow S_+ \end{array} \right) \left[H, \left(\begin{array}{c} S_z, -S_+ \\ -S_-, -S_z \end{array} \right) \right] \dots \left(\begin{array}{c} S_z \uparrow \gg S_z \downarrow \gg \\ -S_- \uparrow \gg -S_- \downarrow \gg \end{array} \right) \right]_{\omega_{i-1}-\omega}^{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}} \omega-\omega_1 \\
&+ \left(\begin{array}{c} \llcorner \uparrow [S_z, S_z] + [S_-, S_-], -\llcorner \uparrow [S_z, S_z] + [S_+, S_z] \\ \llcorner \downarrow [S_z, S_z] + [S_+, S_-], -\llcorner \downarrow [S_z, S_+] + [S_+, S_z] \end{array} \right)_{\omega_{i-2}-\omega} \\
&\dots \left(\begin{array}{c} S_z \uparrow \gg S_z \downarrow \gg \\ -S_- \uparrow \gg -S_- \downarrow \gg \end{array} \right)_{\omega-\omega_1} \\
&+ \left(\begin{array}{c} \llcorner \uparrow S_z, -\llcorner \uparrow S_+ \\ \llcorner \downarrow S_z, -\llcorner \downarrow S_+ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} [S_z, S_z] + [S_+, S_-], -[S_z, S_+] + [S_+, S_z] \\ -[S_-, S_z] + [S_z, S_-], [S_-, S_+] + [S_z, S_z] \end{array} \right)_{\omega_{i-1}-\omega}^{\omega_{i-3}-\omega_{i-1}} \\
&\dots \left(\begin{array}{c} S_z \uparrow \gg S_z \downarrow \gg \\ -S_- \uparrow \gg -S_- \downarrow \gg \end{array} \right)_{\omega-\omega_1}
\end{aligned}$$

+ 他の Commutator を含む項]

$$\begin{aligned}
&= \beta \delta_{\omega_i, \omega} \left[\left(\begin{array}{c} \llcorner \uparrow S_z, -\llcorner \uparrow S_+ \\ \llcorner \downarrow S_z, -\llcorner \downarrow S_+ \end{array} \right) \left[H, \left(\begin{array}{c} S_z, -S_+ \\ -S_-, -S_z \end{array} \right) \right] \dots \left(\begin{array}{c} S_z \uparrow \gg S_z \downarrow \gg \\ -S_- \uparrow \gg -S_- \downarrow \gg \end{array} \right) \right]_{\omega_{i-1}-\omega}^{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}} \omega-\omega_1 \\
&- 2 \left(\begin{array}{c} \llcorner \uparrow S_z, -\llcorner \uparrow S_+ \\ \llcorner \downarrow S_z, -\llcorner \downarrow S_+ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} S_z, -S_+ \\ -S_-, -S_z \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{c} S_z \uparrow \gg S_z \downarrow \gg \\ -S_- \uparrow \gg -S_- \downarrow \gg \end{array} \right)_{\omega_{i-2}-\omega}^{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}} \omega-\omega_1 \\
&+ 2 \left(\begin{array}{c} \llcorner \uparrow S_z, -\llcorner \uparrow S_+ \\ \llcorner \downarrow S_z, -\llcorner \downarrow S_+ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} S_z, -S_+ \\ -S_-, -S_z \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{c} S_z \uparrow \gg S_z \downarrow \gg \\ -S_- \uparrow \gg -S_- \downarrow \gg \end{array} \right)_{\omega_{i-1}-\omega}^{\omega_{i-3}-\omega_{i-1}} \omega-\omega_1
\end{aligned}$$

+ 他の Commutator を含む項] (17)

北村豊平

ここで、漸化式を完結させるために、 $\omega_{i-1} = \omega_{i-2}$ の場合を吟味する必要がある。便宜的に以下、

$$\begin{pmatrix} \langle\langle \uparrow S_z, -\langle\langle \uparrow S_+ \rangle\rangle \\ \langle\langle \downarrow S_z, -\langle\langle \downarrow S_+ \rangle\rangle \end{pmatrix} \equiv (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle), \begin{pmatrix} S_z, -S_+ \\ -S_-, -S_- \end{pmatrix} \equiv (\mathcal{S}), \begin{pmatrix} S_{z\uparrow} \gg S_{z\downarrow} \\ -S_{-\uparrow} \gg -S_{-\downarrow} \end{pmatrix} \equiv (\mathcal{S} \gg) \quad (18)$$

と定義すれば、 $\omega_{i-1} = \omega_{i-2}$ の場合は、

$$\begin{aligned} & T \sum_{\omega_{i-1}} (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\omega_{i-1}-\omega} (\mathcal{S})_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}} \dots (\mathcal{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \\ &= T \sum_{\omega_{i-1}} \int_0^\beta \dots \int d\tau_{i-1} \dots d\tau_1 d\tau \delta(\tau_{i-1} - \tau_{i-2}) \exp \\ & \quad [i(\omega_{i-1}-\omega)\tau_{i-1} + i(\omega_{i-2}-\omega_{i-1})\tau_{i-2} \\ & \quad \dots + i(\omega-\omega_1)\tau] \times (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\tau_{i-1}} (\mathcal{S})_{\tau_{i-2}} \dots (\mathcal{S})_{\tau} \\ &= \beta \delta_{\omega, \omega_{i-2}} S(S+1) (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\omega_{i-3}-\omega} \dots (\mathcal{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \\ & \quad + (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\omega_{i-2}-\omega} (\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}} \dots (\mathcal{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

(19) 式から

$$\begin{aligned} & (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\omega_{i-1}-\omega} (\mathcal{S})_0 (\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}} \dots (\mathcal{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \\ &= - \sum_{\omega_{i-2} \neq \omega_{i-1}} (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\omega_{i-1}-\omega} (\mathcal{S})_{\omega_{i-2}-\omega_{i-1}} \dots (\mathcal{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \\ & \quad + \beta^2 \delta_{\omega, \omega_{i-2}} S(S+1) (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\omega_{i-3}-\omega} (\mathcal{S})_{\omega_{i-4}-\omega_{i-3}} \dots (\mathcal{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \\ & \quad + \beta (\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle)_{\omega_{i-2}-\omega} (\mathcal{S})_{\omega_{i-3}-\omega_{i-2}} \dots (\mathcal{S} \gg)_{\omega-\omega_1} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

となり、(17)、(20) 式から、

$$\tilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega)$$

北村豊平

を使えば,

$$\widetilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega) = -\beta^2 \delta_{\omega_i, \omega} 2^{i-2} S(S+1) \sum_{k=1}^{i-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1(k)} \frac{1}{i\omega_k - i\omega_j} \right) \delta_{\omega_k, \omega} \quad (25)$$

ここで, $\prod^{(k)}$ は積の内 $j = k$ を除くことを意味する。

§ 3. $\hat{t}$ - matrix

(3) 式を (14) 式を用いて, 書きなおせば,

$$\hat{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{J}{2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, 0) \hat{\Gamma}_\omega(0, \mathbf{r}') \quad (26)$$

となる。I で述べたように, $\hat{t}(\omega)$ - matrix を次のように定義しよう。

$$\hat{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}, 0) \hat{t}(\omega) \hat{G}_\omega^0(0, \mathbf{r}') \quad (27)$$

今,

$$\widetilde{S}(\omega_i, \omega_{i-1}, \dots, \omega_1, \omega) \equiv \delta_{\omega_i, \omega} S(\omega_{i-1}, \omega_{i-2}, \dots, \omega_1, \omega) \quad (28)$$

とすれば, (5), (16), (25), (28) 式から, S は diagonal であることに注目して,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_\omega(0, \mathbf{r}') = & - \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{J}{2}T\right)^{i-1} T \sum_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}} \hat{G}_{\omega_1}^0(0, 0) \right\} \\ & S(\omega_{i-1}, \omega_{i-2}, \dots, \omega_1, \omega) \hat{G}_\omega^0(0, \mathbf{r}') \quad (29) \end{aligned}$$

となる。こうして, (26), (27), (29) 式から

$$\begin{aligned} \hat{t}(\omega) = & - \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{J}{2}T\right)^i \sum_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}} \hat{G}_{\omega_1}^0(0, 0) \dots \hat{G}_{\omega_{i-1}}^0(0, 0) \right\} \\ & S(\omega_{i-1}, \omega_{i-2}, \dots, \omega_1, \omega) \quad (30) \end{aligned}$$

以下, Δ について, linear まで考慮して, $\hat{t}(\omega)$ - matrix の most

divergent term を拾おう。そこで,

$$\hat{G}_\omega^0(0,0) = \begin{pmatrix} \rho_0(\omega) & \int K_0(S,\omega) \Delta(S) d^3S \\ \int K_0(S,\omega) \Delta(S) d^3S & \rho_0(\omega) \end{pmatrix} \quad (31)$$

を使う。ここで $\mathcal{G}_\omega^0$ を normal 状態の green 関数として、I で定義したように,

$$K_0(S,\omega) \equiv \mathcal{G}_\omega^0(S) \mathcal{G}_{-\omega}^0(S) \quad (32)$$

である。こうして,

$$\begin{aligned} \hat{t}_{ii}(\omega) &= S(S+1) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i-2}{2} \beta^2 \left(-\frac{J}{2}T\right)^i \sum_{\omega_1, \dots, \omega_{i-1}} \rho_0(\omega_1) \dots \rho_0(\omega_{i-1}) \\ &\quad \sum_{k=1}^{i-1} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{i\omega_k - i\omega_j} \delta_{\omega_k, \omega} \\ &= \frac{S(S+1)J^2}{4} \rho_0(\omega) \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) (Jg(i\omega))^{i-2} \\ &= \frac{S(S+1)J^2}{4} \rho_0(\omega) \frac{1}{(1-Jg(i\omega))^2} \quad (33) \end{aligned}$$

$\hat{t}(\omega)$ - matrix の off diagonal 成分に於いて, $g(i\omega)$ の現れ方は, $\hat{G}_{\omega_\ell}^0(0,0)$ の off diagonal 成分と $\Pi^{(k)}(1/i\omega_k - i\omega_j)$ の積において, $j = \ell$ の場合と, $j \neq \ell$ の場合で, 夫々 $(g(i\omega))^{i-2}$, $(g(i\omega))^{i-3}$ となり, most divergent term のみを考えている範囲内においては, $(g(i\omega))^{i-2}$ のみをとればよく, $\tilde{S}$ の漸化式も, (23) 式で十分である。

従って,

$$\begin{aligned} \hat{t}_{12}(\omega) &= - \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ \beta^2 \left(-\frac{J}{2}T\right)^i \sum_{\omega_1, \dots, \omega_{i-1}} \sum_{\ell} \rho_0(\omega_1) \dots \right. \\ &\quad \left. \int K_0(S, \omega_\ell) \Delta(S) d^3S \dots \rho_0(\omega_{i-1}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-2^{i-2} S(S+1) \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\prod_{j=1}^{i-1} (k)}{i \omega_k - i \omega_j} \right) \delta_{\omega_k, \omega} \right] \\
& = \frac{S(S+1) J^2}{4} \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) (J g(i \omega))^{i-2} \int K_0(S, \omega) \Delta(S) d^3 S \\
& = \frac{S(S+1) J^2}{4} \frac{1}{(1 - J g(i \omega))^2} \int K_0(S, \omega) \Delta(S) d^3 S \quad (34)
\end{aligned}$$

こうして、十分低温においては、 D を伝導体の幅とすれば、

$$g(i \omega) = -\rho \ln \frac{D}{|\omega|} \quad (35)$$

となるから、今、

$$r_{\omega}^2 \equiv \frac{S(S+1) J^2}{4} \frac{1}{(1 + J \rho \ln \frac{D}{|\omega|})^2} \quad (36)$$

とすれば、

$$\hat{t}_{11}(\omega) = \hat{t}_{22}(\omega) = \rho_0(\omega) r_{\omega}^2 \quad (37)$$

$$\hat{t}_{12}(\omega) = \hat{t}_{21}(\omega) = r_{\omega}^2 \int K_0(S, \omega) \Delta(S) d^3 S \quad (38)$$

となる。

§ 4. $\Delta(r)$ の空間的变化

I で議論したように、Coherence length ξ_0 として、 $r \gg \xi_0$ の領域での $\Delta(r)$ の空間的变化に対する積分方程式は、次のように記述される。

$$\begin{aligned}
\Delta(r) &= g T \sum_{\omega} \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|, \omega) \Delta(S) d^3 S \\
&= -g T \sum_{\omega} \hat{t}_{12}(\omega) K_0(r, \omega) - g T \sum_{\omega} \frac{\hat{t}_{11}(\omega)}{\rho_0(\omega)} K_0(r, \omega) \\
&\quad \int K_0(S, \omega) \Delta(S) d^3 S \quad (39)
\end{aligned}$$

(39) 式に, (37), (38) 式を代入すれば,

$$\begin{aligned}\Delta(r) &= g T \sum_{\omega} \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|, \omega) \Delta(S) d^3 S \\ &= -2g T \sum_{\omega} r_{\omega}^2 \int K_0(S, \omega) \Delta(S) d^3 S, K_0(r, \omega)\end{aligned}\quad (40)$$

となる。以下 I の議論と平行して行えばよい。

$$L(r)\Delta(r) \equiv \frac{1}{g\rho} [\Delta(r) - g T \sum_{\omega} \int d^3 S K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|, \omega) \Delta(S)] \quad (41)$$

と定義すれば,

$$L(r)\Delta(r) = -\frac{2}{\rho} T \sum_{\omega} r_{\omega}^2 \langle K_0(\omega) \Delta(S) \rangle K_0(r, \omega) \quad (42)$$

となる。また,

$$\langle (L+z)\Delta \rangle \equiv 0 \quad (43)$$

なるような, z を導入すれば,

$$\ell_n \frac{T_{c0}}{T_c} = z \quad (44)$$

として, 遷移温度 T_c を決めることが出来る。ここで, T_{c0} は pure super state の遷移温度である。今, T_c の極近傍での現象を考えている限り, z は (44) 式から exact に求まる。従って,

$$\Delta(r) = \Delta_0 - \frac{1}{L+z} \left[\frac{2}{\rho} T \sum_{\omega} r_{\omega}^2 \langle K_0(\omega) \Delta \rangle K_0(r, \omega) - z\Delta \right] \quad (45)$$

$$z\langle \Delta \rangle = \frac{2}{\rho} T \sum_{\omega} r_{\omega}^2 \langle K_0(\omega) \Delta \rangle \langle K_0(\omega) \rangle \quad (46)$$

と書くことが出来,

$$\Delta(r) \equiv (1+f(r)) \Delta_0 \quad ; \quad \Delta_0 = \Delta(\infty) \quad (47)$$

なる f を導入して, z, f を r^2 の巾級数に展開して, 摂動として解こう。
今,

$$z = z_1 + z_2 + \dots \quad (48)$$

$$f = f_1 + f_2 + \dots \quad (49)$$

とすれば,

$$f_1(r) = -\frac{1}{L+z} \frac{2}{\rho} T \sum_{\omega} r_{\omega}^2 \langle K_0(\omega) \rangle K_0(r, \omega) \quad (50)$$

$$f_2(r) = \left(\frac{2}{\rho}\right)^2 T^2 \sum_{\omega, \omega'} r_{\omega}^2 r_{\omega'}^2 \frac{1}{L+z} \langle K_0(\omega) \rangle \frac{1}{L+z} K_0(\omega') > K_0(r, \omega) \langle K_0(\omega') \rangle \quad (51)$$

$$z_1 = \frac{2}{V\rho} T \sum_{\omega} r_{\omega}^2 \langle K_0(\omega) \rangle \langle K_0(\omega) \rangle \quad (52)$$

$$z_2 = \frac{2}{V\rho} T \sum_{\omega} r_{\omega}^2 \langle K_0 f_1 \rangle \langle K_0(\omega) \rangle \quad (53)$$

となる。上式を導くとき、右辺の夫々の項に比べて、 $\frac{1}{V}$ の order の項は落してある。こうして、 z_1 , f_1 のみについて示せば、

$$z_1 = \frac{S(S+1)J^2}{V T_c} \rho \sum_{n>0} \frac{1}{(2n+1)^2 (1+J\rho \ell_n \frac{1}{(2n+1)\pi T_c})^2} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{6}{7\pi\zeta(3)} \frac{m^2}{\xi_0^2} \frac{S(S+1)}{4} J^2 T \sum_{\omega} \frac{1}{(1+J\rho \ell_n \frac{D}{|\omega|})^2} \cdot \frac{1}{|\omega|} \\ &\times \left[\frac{v_F}{2|\omega|} \frac{1}{r} e^{-\frac{2(\omega)}{v_F} r} - E_1\left(\frac{2|\omega|}{v_F} r\right) - \frac{v_F}{2|\omega|} \frac{1}{r} \right] \\ &= \frac{3S(S+1)}{7\pi^2\zeta(3)} \frac{m^2}{\xi_0^2} J^2 \left[\frac{1}{(1+\rho J \ell_n \frac{D}{\pi T})^2} \left\{ \frac{\xi_0}{r} e^{-\frac{r}{\xi_0}} - E_1\left(\frac{r}{\xi_0}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n>0} \frac{1}{(1+\rho J \ell_n \frac{D}{(2n+1)\pi T})^2} \frac{1}{(2m+1)^2} \cdot \frac{\xi_0}{r} \right] \quad (55) \end{aligned}$$

この結果は、局在 spin を static に取扱ったものの各項に、

$1/(1+\rho J \ln \frac{D}{(2m+1)\pi T})^2$ を乗じたものになっている。 J の 3 次までは、

Kawamura が議論しているように、most divergent term が exact であるから、当然のこととして、I の結果に一致する。I で述べたように、

$1 = \rho |J| \ln \frac{D}{\pi T_k}$ のとき発散することが、こうして明らかにされた。

6)

Griffin は、遷移温度を求めているが、(54) 式は本質的に彼のものに一致する。彼は t -matrix として、normal の場合を使っているが、その正当性を、ここで別の角度から保証しているように思われる。

§ 5. 結 論

多時間 Green 関数の方法は、空間的変化を exact に扱え、systematic に見通しよく出来ることを示した。

order parameter $\Delta(r)$ の空間的変化において、温度が、Kondo 温度より高い場合、most divergent term まで求った、lower divergent term を考慮したものも、検討する価値はあろう。最も興味ある問題は、Kondo 温度以下の場合で、目下研究中である。

終りに、御指導して下さいった高野文彦先生に感謝致します。

参 考 文 献

- | | | | | | |
|----|-----------------|--------------------|------------|------|-------|
| 1) | 北村豊平 | 物 性 研 究 | <u>10</u> | 431 | ('68) |
| 2) | S. Doniach | Phys. Rev | <u>144</u> | 382 | ('66) |
| 3) | A. A. Abrikosov | Physics | <u>2</u> | 5 | ('65) |
| 4) | 川村 清 | 物 性 研 究 | <u>10</u> | 282 | ('68) |
| 5) | K. Kawamura | Prog. Theor. Phys | <u>39</u> | 1375 | ('68) |
| 6) | A. Griffin | Phys. Rev. Letters | <u>15</u> | 703 | ('65) |