

連分数展開とエルゴード理論

津田塾大学 伊藤 俊次 (Shunji Ito)

§0 Introduction. 次の定理から出発しよう。

定理 1 $x \in [0, 1)$ の連分数による n 次近似分数 $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| = -\frac{\pi^2}{6 \log 2} \quad \text{a.e.}$$

定理 2 $f(q)$ は 整数 q に対して定義された正の函数とする。このとき,

- (i) $\sum f(q) < \infty$ ならば, a.e x に対して
 $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{f(q)}{q}$ は無限に多く, 整数解をもつ。
- (ii) $\sum f(q) = \infty$ ならば, ほとんど全ての x に対して
 $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{f(q)}{q}$ は高々有限個の解しか持たない。

これらの 2 つの定理は連分数展開についての測度論的 (エルゴード理論的) 視点からのアプローチの典型である。上記の定理に共通して n なることは, 数論的対象, ここでは連分数展開, についての測度論的 (エルゴード論的) 手法を用いて, 何らかの意味で, 数論的に意味のある主張が試みられている。

今のところエルゴード理論的手法とは、変換とその上の
不変測度とを導入し、これを用いて何んらかの主張を試みるこ
ととする。

例えば通常の連分数展開 (ordinary simple continued
fraction, 以後簡単のため OCF と書く) において、

変換 $T: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$

$$x \mapsto \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$$

と $a(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ と定めれば、

$$x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \dots}}$$

(ここで $a_n(x) = a(T^{n-1}x)$ for $n \geq 1$ とする。)

と得ることは出来る。ところで、この変換 T の不変測度 ^{μ} は

$$\frac{d\mu}{dm} = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x} \quad (\text{但し } m \text{ は } [0, 1) \text{ 上の Lebesgue 測度})$$

となる。更に T は μ に関してエルゴード的となる。この事実と
用いて定理 1, 2 が得られる。

ところで、エルゴード理論的手法を用いたときの最大の「弱
点」は「殆んどいたるところ」(a.e.) の実数 x に対して云々とい
う主張しか出来ないところにある。しかるに、一方「平均的には」(a.e.)
云々という、数論的な対象に対して異なる角度からの接近を提
供している。(詳しくは [1] を参照のこと)

§1 有理整数体上の連分数展開と不変測度

実数 x の連分数展開 $x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \dots}}$ とし $0, C, F$ といふ

$a_i(x) \in \{1, 2, \dots\}$ となつてゐる。上記 x の展開の形式 q も z $a_i(x) \in \mathbb{Z}$ と許したものとて、整数論的に重要な2つの展開について主にこの§では議論しよう。

1つは nearest integer continued fraction (N.I.C.F) と呼ばれるもので、次の Algorithm よりなるものである。

各整数 n に對して $[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}] = U_n$ と考へ、 $x \in \mathbb{R}$ の Gauss part とし $[x]_{1/2} = n$ とは $x \in U_n$ と定める。

Algorithm とする S は新しい Gauss part と用ゐる

$$S: [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\begin{matrix} \psi \\ x \end{matrix} \rightsquigarrow \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]_{1/2}$$

とし $b(x) = [\frac{1}{x}]_{1/2}$ とする。このとき、 $b_n(x) = b(S^{n-1}x)$

とすれば $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は $x = \frac{1}{b_1(x) + \frac{1}{b_2(x) + \dots}}$ とする

展開を得る。

このようにして得られる N.I.C.F の数論的意味について z は z はふれたこととしよう。([2], [3] 参)。 z z z

$b_i(x)$ は $b_i(x) \in \{\pm 2, \pm 3, \dots\}$ となつてゐる。更に重要な

ことは $b_i(x) = 2$ なら $b_{i+1}(x) \geq 2$ ($b_i(x) = -2$ なら $b_{i+1}(x) \leq -2$)

という性質をもつてゐる。

3: 2 次のような整数の両側 sequence と後のため準備しよ

$$) \circ M_S = \{ (\dots b_{-1}, b_0, b_1, \dots) \mid |b_i| \geq 2, \text{ if } b_i = 2 \text{ then } b_{i+1} \leq 2 \\ \text{and if } b_i = -2 \text{ then } b_{i+1} \leq -2 \}$$

3: 2 M_S の元は S -admissible sequence と呼ぶことにする。

N, I, C, F について議論する前に 3: 4 と重要な関係にある,

3: 1 の連分数展開と準備しよう。これは Singular continued fraction (S.C.F) と呼ばれるもので 2 次の Algorithm よりなる。

$$3 \circ \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (\alpha + \beta = 1) \quad \text{とし, } n \geq 2 \text{ なる}$$

整数にたいしては $U_n = [n-\beta, n+\alpha)$, $n \leq -2$ にたいしては

$U_n = [n-\alpha, n+\beta)$ という区間を考へ、実数 x の新しい Gauss part $[x]_\alpha$ と $[x]_\alpha = n$ とは $x \in U_n$ と定める。

Algorithm 3: 5 の変換 S^* は今の Gauss part を用いて,

$$S^* : [-\alpha, \alpha) \rightarrow [-\alpha, \alpha) \\ \psi \quad \quad \quad \psi \\ x \rightsquigarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]_\alpha$$

$$\text{とし } b^*(x) = \left[\frac{1}{x} \right]_\alpha \text{ とする。このとき } b_n^*(x) = b^*(S^{n-1}x)$$

とすれば、 $x \in [-\alpha, \alpha)$ は $x = \frac{1}{b_1^*(x) + \frac{1}{b_2^*(x) + \dots}}$ という展開と
得る。この sequence $(b_1^*(x), b_2^*(x), \dots)$ は

$$b_i^*(x) \geq 2 \text{ なら } b_{i+1}^*(x) \neq -2 \quad (b_i^*(x) \leq -2 \text{ なら } b_{i+1}^*(x) \neq 2)$$

という性質をもつことは容易に確かめられる。

3: 2

$$M_{S^*} = \{ (\dots b_{-1}^* b_0^* b_1^* \dots) \mid |b_i^*| \geq 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{if } b_i^* \geq 2 \text{ then } b_{i+1}^* \neq -2 \\ \text{if } b_i^* \leq -2 \text{ then } b_{i+1}^* \neq 2 \end{array} \right\}$$

を考へ、 M_S^* の x は S^+ -admissible sequence と呼ばれ、
 定義から $(\dots b_{-1}, b_0, b_1, \dots)$ が S -admissible の父と
 分条件は $(\dots b_1, b_0, b_{-1}, \dots)$ が S^+ -admissible となる。
 すなわち、一方の admissible sequence と、逆向きに読めば他方の
 admissible sequence となる。

このことの意味は、 x が N, I, C, F による n -次近似を

$$x = \frac{1}{b_1(x) + \dots + \frac{1}{b_n(x)}} = \frac{p_n(x, \frac{1}{2})}{q_n(x, \frac{1}{2})} \quad \text{とすれば,} \quad \frac{q_{n-1}(x, \frac{1}{2})}{q_n(x, \frac{1}{2})} = \frac{1}{b_n(x) + \frac{1}{b_{n-1}(x) + \dots + \frac{1}{b_1(x)}}}$$

となることはよく知られてゐるが、この $\frac{q_{n-1}}{q_n}$ が S^+ -admissible
 となることを意味してゐる。

さて、上記の準備によつて変換 S 及び S^+ の不変測度は
 次の手順によつて求められることが出来る。 S の不変測度

については、 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に対して $R(x)$ と

$$R(x) = \left\{ \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_{-1} + \dots}} \mid (\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1(x), a_2(x), \dots) \text{ } S\text{-admissible} \right\}$$

と定める。 $(R(x))$ が well-defined なのは $(a_0, a_{-1}, \dots)$ が S^+ -
 admissible になることから $\frac{1}{(1+xy)^2}$ とする Kernel
 function とする $\int_{R(x)} \frac{dy}{(1+xy)^2} = h(x)$ とすれば、 $h(x)$ が
 S -不変測度の密度函数となる。何故 $R(x)$ が空でない、 $\frac{1}{(1+xy)^2}$
 とする h の詳略は長くなるので、ここでは省略する。

([4], [5] を参照のこと)

重要なことは、変換の不変測度の密度函数を求めるとき、逆問きの System (Dual System) を考えることが有効である。という事実がある。このことの実行により、2 得られたい結果がある。

定理 1) 変換 S の不変測度の密度函数 $h_S(x)$ は次の形であり、 S はエルゴード的である。

$$h_S(x) = \begin{cases} C \frac{1}{(1+\alpha x)(1-x\beta)} & \text{if } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ C \frac{1}{(1-\alpha x)(1+x\beta)} & \text{if } x \in [-\frac{1}{2}, 0] \end{cases}$$
 ここで C は normalizing constant.

2) 変換 S^+ の不変測度の密度函数 $h_{S^+}(x)$ は次の形であり、 S^+ はエルゴード的。

$$h_{S^+}(x) = \begin{cases} C' \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}x)} & \text{if } x \in (-\alpha, \beta) \\ C' \frac{1}{(1-\frac{1}{4}x^2)} & \text{if } x \in (-\beta, \beta) \\ C' \frac{1}{2(1+\frac{1}{2}x)} & \text{if } x \in (\beta, \alpha) \end{cases}$$

このことを用いれば、別に定理 1 と類似の結果を得ることが出来る。

定理 1' $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の N, I, C, F による n -次近似分数と $\frac{P_n(x, \frac{1}{2})}{g_n(x, \frac{1}{2})}$ とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \alpha - \frac{P_n(x, \frac{1}{2})}{g_n(x, \frac{1}{2})} \right| = -\frac{\pi^2}{6 \log(\beta+1)} \quad (\text{a.e. } x)$$

この定理の意味するところは N.I.C.F. による近似の order が O.C.F. より早い、を主張してゐる。

そこで、 $x \in R$ に対して N.I.C.F. 及び O.C.F. の n -次近似分数列 $\{ \frac{p_n(x, \frac{1}{2})}{q_n(x, \frac{1}{2})}, \dots, \frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \dots, \frac{p_m(x)}{q_m(x)}, \dots \}$

とすれば、N.I.C.F. から出づる x の sequence は O.C.F. の x の部分列となることが知られてゐる。そこで $\frac{p_n(x, \frac{1}{2})}{q_n(x, \frac{1}{2})} = \frac{p_m(x)}{q_m(x)}$

となる $m \equiv m(n, x)$ と書けば、(部分列より $m(n, x) \geq n$)

$$\boxed{\text{定理}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n, x)}{n} = \frac{\log 2}{\log(\beta+1)} \quad \text{a.e.}$$

定理 1' と同様、この定理は N.I.C.F. と O.C.F. の連なり、エルゴード定理を用いて主張してゐる。[5]

< 補 >

^(要)有理数係数の連分数展開は Domain 及び各整数の近傍、とり方によつて上記の変換以外に種々の変換の class を考へることが出来る。しかし、これは数論的意味というよりはエルゴード理論的意味によつて構成されたものである。そこにおいてもこの場で展開した density function の求め方は有効に機能したこと、及びエントロピーという概念が展開の order と深く結びつてゐることを附記しておく。詳しくは [5] [6] を見ただけでよい。

§2 虚二次体上の連分数展開と不変測度

複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して §1 と類似な連分数展開を考察する。

展開にあらわれる整数として何を採用するか, によってこの Algorithm は変, z による。ここでは $\mathbb{Z}(\sqrt{3}i)$ 及び $\mathbb{Z}(i)$ と別にとりながら議論をして行く。

Perron による次の定理。

定理 A (Perron) $z \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$ に対して

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{4\sqrt{3}|q|^2} \quad \text{を満たす } p, q \in \mathbb{Z}(\sqrt{3}i) \text{ は無限に}$$

存在し, さらに定数 $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ は最良である。

この連分数展開を用いて証明するため, 金岩・田村・堀川は [6] 次のような Algorithm を導入した。

$$\zeta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i) \text{ とし, } \mathbb{Z}(\sqrt{3}) \ni n\zeta + m\bar{\zeta} \text{ に対して } D_{n\zeta+m\bar{\zeta}} = \underbrace{D + (n\zeta+m\bar{\zeta})}_{D = \{x\zeta + y\bar{\zeta} : 0 \leq x, y < 1\}}$$

と整数 $a = n\zeta + m\bar{\zeta} \xrightarrow{\text{の}} \text{ 近傍に定数がある。}$ z による Algorithm は

$$\text{変換 } T: D \rightarrow D_{\frac{1}{z}} \\ \zeta \mapsto \frac{1}{z} - \left[\frac{1}{z} \right]$$

(ここで $d(z) = \left[\frac{1}{z} \right]$ とは $\frac{1}{z} \in D_{d(z)}$ のことを示す。)

そこで $d_n(z) = d(T^{n-1}z)$ とすれば

$$z = \frac{1}{d_1(z) + \frac{1}{d_2(z) + \dots}} \quad \text{と } \mathbb{Z}(\sqrt{3}i) \text{ 上の連分数展開が作れる。}$$

§ 1 と同様、 $(a_1(z), a_2(z), \dots)$ は sequence は $a_i(z) = *$ ならば $a_{i+1}(z) = **$ と n の dependence を持つ。これについて は説明を略す。このことを用いて、金谷・田村・塩川は Perron の定理を連分教を用いて証明した。更に塩川は変換 T のエルゴード問題について

[定理] T は D 上 Lebesgue measure と互いに絶対連続な不変測度 μ をもち、エルゴード的

と証明した。([7])

この定理を用いれば、

[定理] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| z - \frac{P_n(z)}{g_n(z)} \right| = \text{const} \quad (\text{i.e.})$

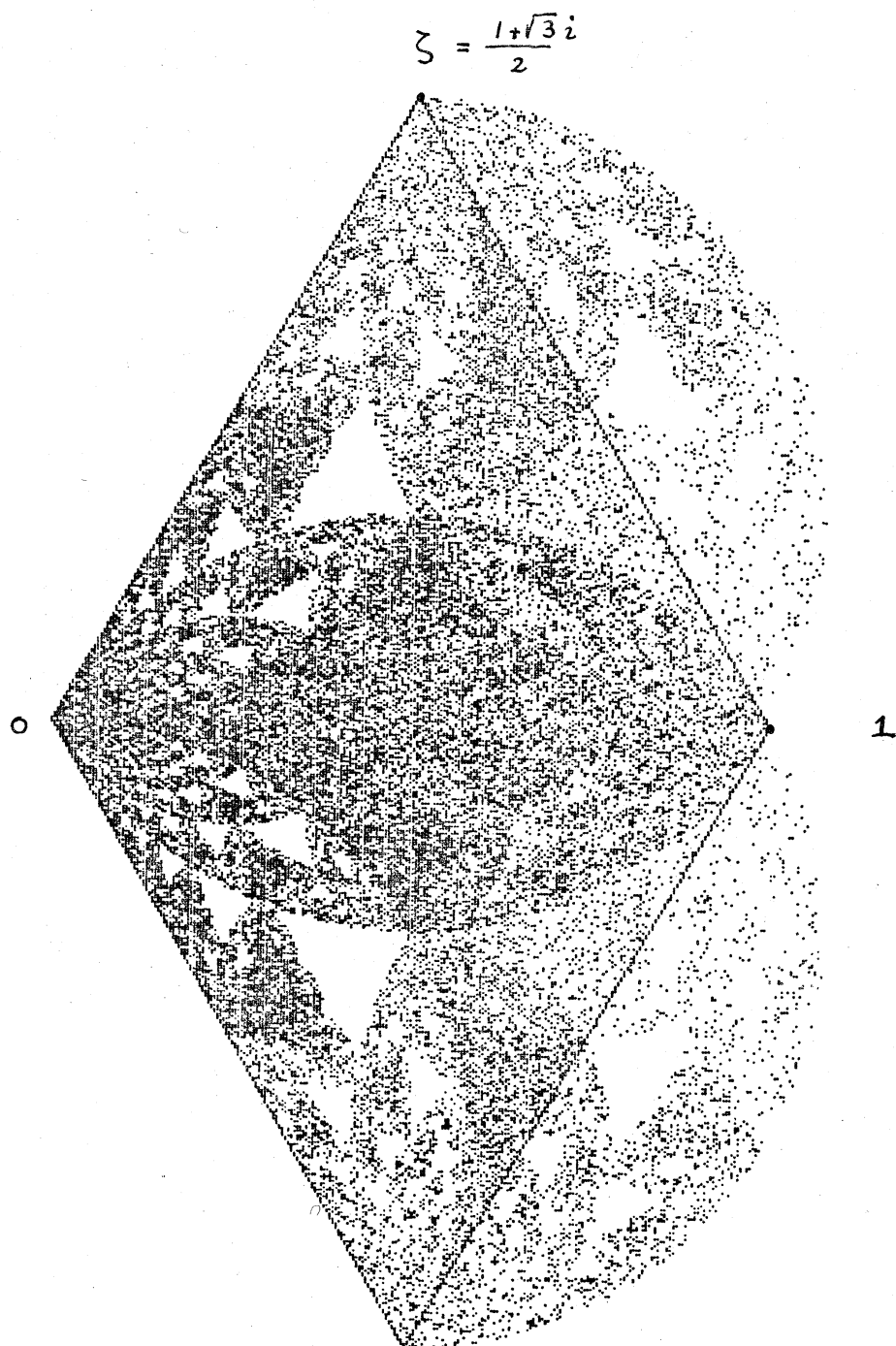
が導びかれる。しかし、このとき const の値が定まらないことは、ちょうど不変測度の密度函数が定まらないことに対応している。そこで、次の問、

<問題> T の不変測度の形を与えよ。

が課題となる。この課題へのアプローチとして、§ 2 で展開した Dual system が有効ではなからうか。そこで変換 T の admissible sequence $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ について

$$\left\{ \frac{1}{\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_{n-2} + \frac{1}{\alpha_{n-3}}}}} \mid (\dots \alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots) \text{ } T\text{-admissible} \right\}$$

なる列を計算機を用いて prot して見た。



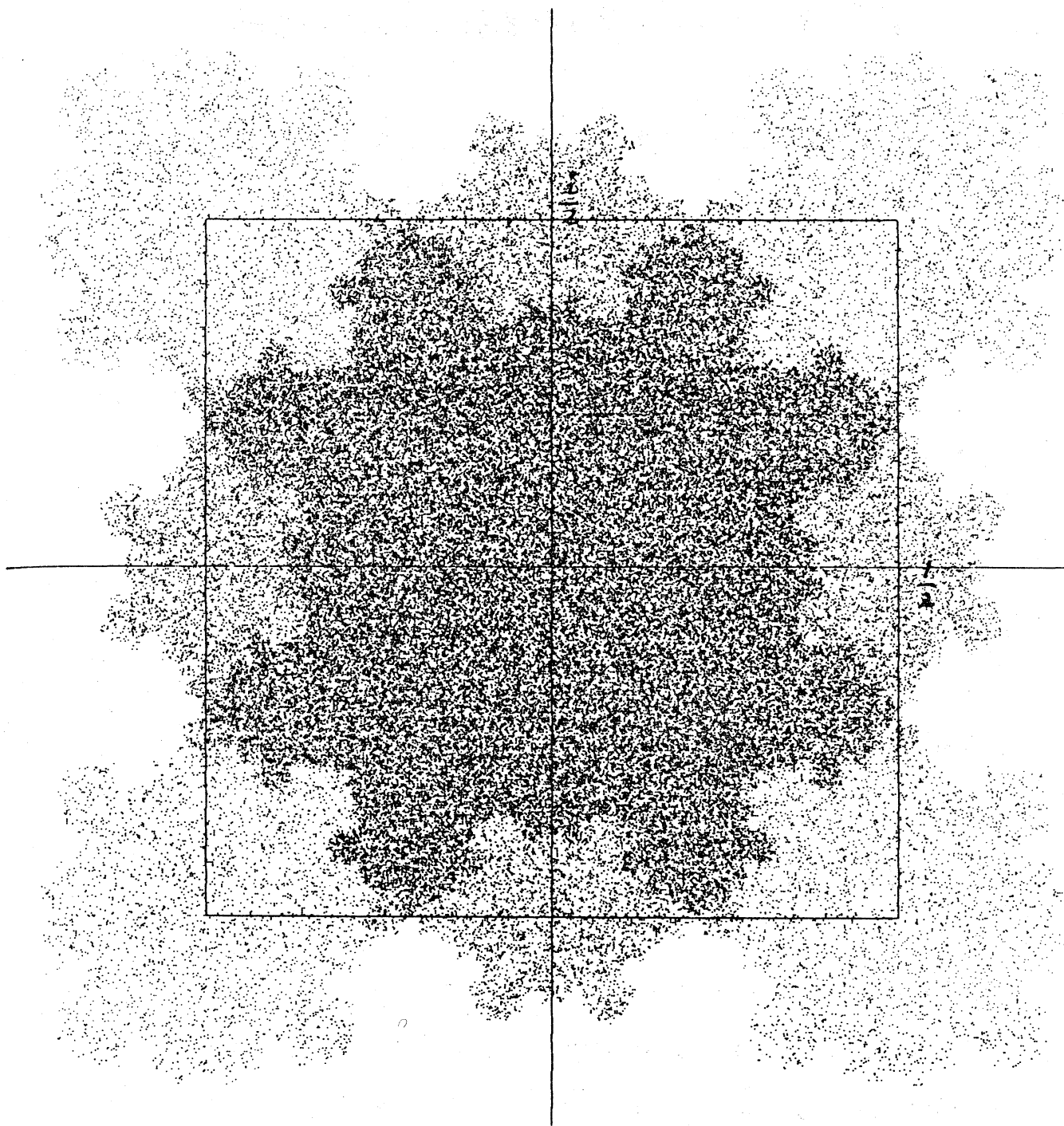
この図は、§2における S^* の domain $(-\alpha, \alpha)$ にあるものである。一見複雑そうに見えるこの図もよくみれば、規則性をもつ。しかし、現在のところこの図の数学的定式化は出来ていない。もしこれが可能であれば、§1と同様

$$R(z) = \left\{ \frac{1}{\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_{-1} + \dots}} \mid (\dots \alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1(z) \alpha_2(z) \dots) \text{ T-admissible} \right\}$$

を定め

$\int_{R(z)} \frac{dw}{|1+zw|^2}$ を求めれば、これが密度函数と与えることとなる。

概念論にも、ほぼ平行に $(\sqrt{-1})$ に関して議論が可能である。詳細は別々、Perron の定理にある Ford の定理に対して Lakein [8] が重なる数を用いた証明に成功し、[9] 2n, エルゴード理論的には伊田の結果がある。ここでは、Hurwitz の変換の Dual system と与えるであろう図のみを示すにとどめよう。



§3 実2次元上の連分数展開とエルゴード問題

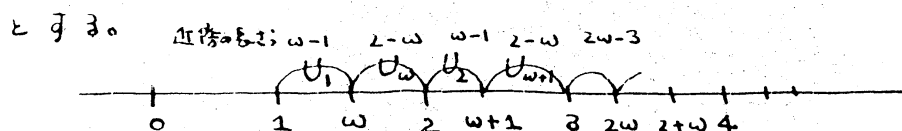
ここでは次に $x \in \mathbb{R}$ の連分数展開として実2次元の整数を許すことを考えよう。ここで連分数展開が可能とするために次のような Algorithm を導入する。話を簡単にするために $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$ のみにして話を始める。

$\omega = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ とおくと、 $\mathbb{Z}(\omega\sqrt{5})$ は $\mathbb{Z}(\sqrt{5}) = \{n+m\omega \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ となる。ここで $\mathbb{Z}^+(\sqrt{5})$ と

$$\mathbb{Z}^+(\sqrt{5}) = \{n+m\omega \mid n, m \geq 0 \text{ and } (n, m) \neq (0, 0)\}$$

として $\mathbb{Z}^+(\sqrt{5})$ の x は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の positive integer $\neq 0$ である。

ここで各 $n+m\omega \in \mathbb{Z}^+(\sqrt{5})$ の近傍 $U_{n+m\omega}$ と $\alpha = \min\{n'+m'\omega \mid n'+m'\omega > n+m\omega \text{ and } n', m' \in \mathbb{Z}\}$ とし $U_{n+m\omega} = [n+m\omega, \alpha)$



ここで $x \in \mathbb{R}$ に $x \in [x]\omega = n+m\omega$ であるとは

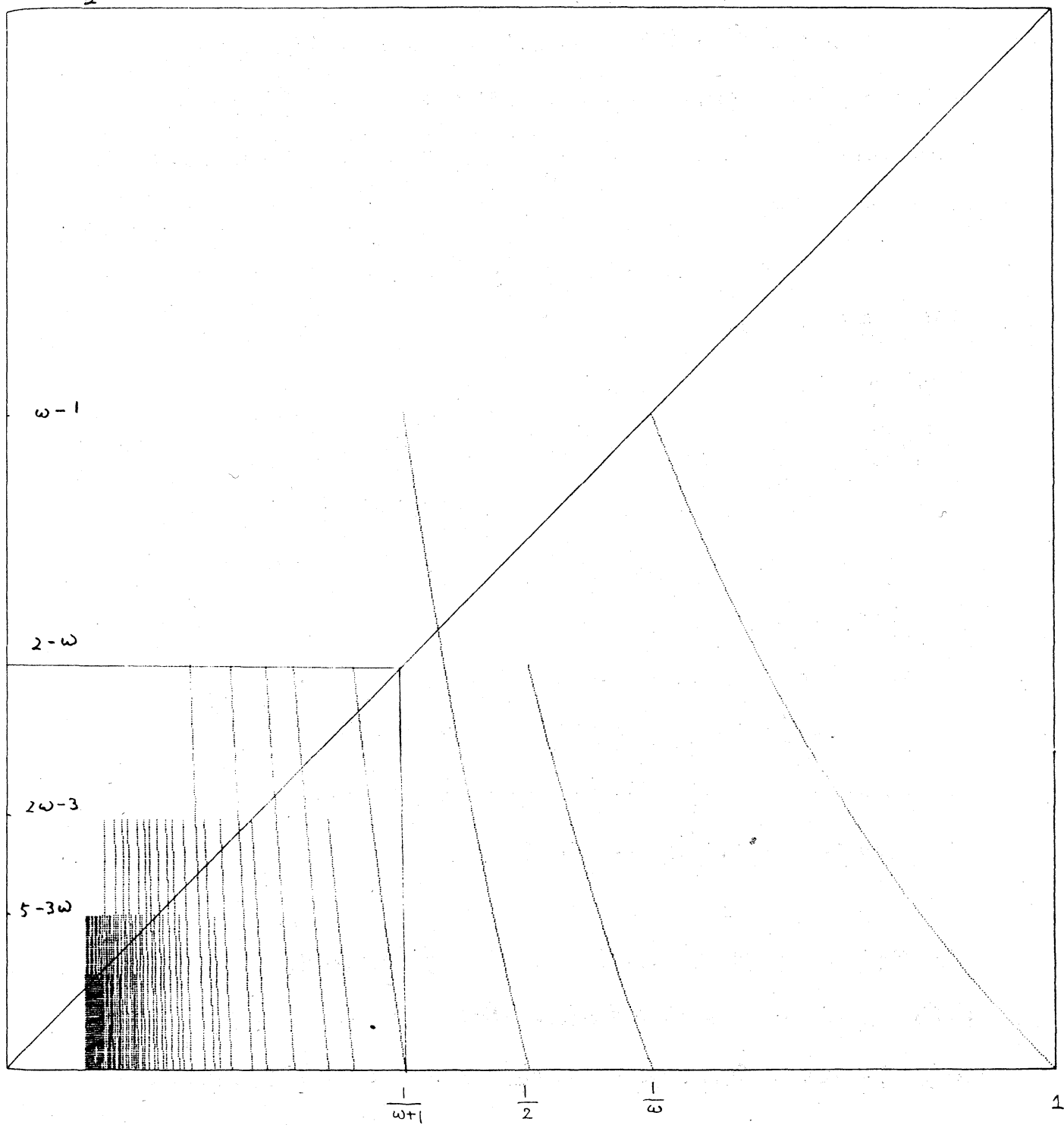
$x \in U_{n+m\omega}$ であることを Gauss part と定める。

ここで Algorithm を与える変換 T_ω とする (図, 参)

$$T_0 : [0, 1) \rightarrow [0, 1) \\ x \mapsto \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\omega$$

$$x \mapsto d(x) = \left[\frac{1}{x}\right]\omega \text{ and } d_n(x) = \alpha(T_\omega^{n-1} x) \text{ とおけば,}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



$$x = \frac{1}{d_1(x) + \frac{1}{d_2(x) + \dots}}$$
 と実2次根を用いた連分数展開が可能となる。

このとき各座標の長さ $|U_{n+m\omega}|$ はヒボナッチ数 $\{g_n\}$ を用いて, $|g_k\omega - g_{k+1}|$ となることから分かる。このとき $\{g_n\}$ は admissible sequence と異質的に記述することができることも可能となる。(証明は全に省略)。

このことから, この $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上連分数展開によって得られる結果を並列挙しよう。

Hruitz type の定理として

定理 $x \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ならば

$$(1) \quad \left| x - \frac{p_n}{g_n} \right| < \frac{1}{2\sqrt{2}g_n^2} \quad \text{for infinite many } \frac{p_n}{g_n}$$

さらに $x = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$ のとき constant $2\sqrt{2}$ は最良となる。

$$(2) \quad x \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \cup \{\sqrt{2} - 1\} \text{ ならば}$$

$$\left| x - \frac{p_n}{g_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 2\omega + 5} g_n^2} \quad \text{for infinite many } \frac{p_n}{g_n}$$

$$\text{さらに } x = \frac{-(\omega+1) + \sqrt{\omega^2 + 2\omega + 5}}{2} = \frac{1}{(\omega+1) + \frac{1}{(\omega+1) + \dots}} \quad \text{のとき}$$

constant $\sqrt{\omega^2 + 2\omega + 5}$ は最良

2次根の有理数 $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のこの連分数展開によって得られる特徴づけについては次の定理が得られる。($x \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$)

の連分数展開が有限で終るとは限らないことに注意して(以下)

定理 $x \in \mathbb{Q}(\omega)$ の連分教展開の項 $(d_1(x), d_2(x), \dots)$

とすると (1) $(d_1, \dots, d_n)$ と有限に終る。ある n は

(2) $(d_1, \dots, d_n, \dots)$ と無限につづく、しかるに

ときは $d_n \in \mathbb{Z}$ となる。

事実 2 次体上 2 次代数的数はこの連分教展開を用いて、周期的となる (Lagrange type の問題) ことを期待せしめ、しかるにこれについては、いまの証明が示す 2 次の定理を得るのみであった。

定理 $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上 2 次の代数的数とすると。このとき

$(d_1(x), d_2(x), \dots)$ は有界, i.e. $\exists M; |d_i(x)| \leq M$ for all i .

エルゴード理論上の問題としては変換 T_ω はきわめて興味深い。これは図でみるごとく、^{適当な}とりうる値が可算本の Markov map となるからである。これについては次の定理を得るのみであり、不変測度の存在は大切デリケートである。

定理 T_ω -不変な集合が存在するとすればその測度は

Lebesgue measure で測ると 0 または 1 である (エルゴード的)

§4 おわりに

連分教展開は旧く 2 新しい対象のごとくである。

最近 Adler 達は不定曲率をもつ多様体上の測地的流れ (Geodesic flow) と変分教展周との関連を明らかにした。又 Series は Fuchs 群と変分教展周の関連を研究している。これからみると、変分教展周はエルゴード理論の立場からみても新しい話題と近年再び提供されているように思われる。

文献リスト

- [1] Billingsley : 確率論とエントロピー 吉岡書店
- [2] A. Hurwitz : Über eine besondere ——— Acta. Math¹² (1889)
- [3] B. Minnigerode : ——— , Gött. Nachr 1873 (619-653)
- [4] S. ITO, H. Nakada and S. Tanaka : ——— . Keio Eng. Rep.³⁰ (1977)
- [5] S. ITO and S. Tanaka : ——— . Tokyo Journal of Math vol 4, No. 1. (1981)
- [6] Kaneiwa, Siokawa and Tamura : Keio Engineering Rep. 28 (12) (1975)
- [7] I. Siokawa : Keio Engineering Rep. 29 (2) (1976)
- [8] R. Lakein : J. Reine Angew Math 272 (1975)