

( 続紙 1 )

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                        |    |       |  |  |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------|--|--|--|
| 京都大学                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 博士 ( 理学 )                                                                                                                                                                              | 氏名 | 廣瀬 三平 |  |  |  |
| 論文題目                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | On a WKB theoretic transformation for a completely integrable system near a degenerate point where two turning points coalesce<br>( 2 つの変わり点がぶつかる退化が起こる点の近傍での完全積分可能系の WKB 解析的な変換について ) |    |       |  |  |  |
| (論文内容の要旨)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                        |    |       |  |  |  |
| <p>学位申請者の廣瀬三平氏は、大きなパラメータを含んだ特異摂動型の 2 変数完全積分可能系の完全 WKB 解析というテーマに取り組み、まず参考論文において Pearcey 系や (1, 4) 型 2 変数退化超幾何系といった具体的な完全積分可能系の Stokes 幾何 (即ち、変わり点と Stokes 曲面) の大域構造を論じた。参考論文の議論の中で明らかになったのは、「タイプの異なる 2 個の変わり点がぶつかるという退化」が起こる点が、完全積分可能系の Stokes 幾何の大域構造の決定において非常に重要な役割を果たしているという興味深い事実である。実際、こうしたタイプの異なる 2 個の変わり点がぶつかるという退化は、完全積分可能系を制限して得られる高階常微分方程式に現れる仮想的変わり点や新しい Stokes 曲線とも密接に関係する。</p> <p>この結果を踏まえて、博士論文において廣瀬氏は、このようなタイプの異なる 2 個の変わり点がぶつかる点での挙動を、一般の 2 変数完全積分可能系に対して考察した。得られた主結果は次の通りである。考えている 2 変数完全積分可能系に対して、タイプの異なる 2 個の変わり点がぶつかるという退化が原点において起こっていると仮定する。さらに、その変わり点の集合は、原点の近傍において Pearcey 系の変わり点の集合と解析的に同値であるとする。このとき、この完全積分可能系は、原点の近傍において WKB 解析的な変換によって Pearcey 系に変換される。</p> <p>主定理で用いられた WKB 解析的な変換とは、双正則な座標変換と (大きなパラメータの逆数に関する) 形式巾級数を用いて定義される未知函数に対する可逆なゲージ変換の組み合わせであり、連立の常微分方程式系の標準形への変換論において Wasow が用いた変換を 2 変数の場合に拡張したものである。この WKB 解析的な変換は一般には収束しないが、青木-河合-竹井らにより論じられた常微分方程式に対する完全 WKB 解析の場合と同様に、この種の変換は完全積分可能系の解 (WKB 解) の Borel 変換には自然に解析的に作用し、接続公式といった WKB 解の Borel 和の諸々の性質を証明するのに有効に用いられる。主定理の意味するところは、タイプの異なる 2 個の変わり点のぶつかり方を規定する幾何学的な条件の下で、WKB 解析的な変換により一般の完全積分可能系やその WKB 解が Pearcey 系とその WKB 解に変換できるということである。さらに、その系として、こうしたタイプの異なる 2 個の変わり点がぶつかる点の近傍では、一般の 2 変数完全積分可能系の Stokes 幾何は Pearcey 系の Stokes 幾何と解析的に同値となることが示される。特にこれから、完全積分可能系を制限して得られる高階常微分方程式に現れる新しい Stokes 曲線が、その多変数化と見なし得る問題の完全積分可能系の Stokes 曲面に含まれるという参考論文において観察された事実が、Pearcey 系や (1, 4) 型超幾何系のみならずより一般の 2 変数完全積分可能系に対して成立することが結論される。</p> |                                                                                                                                                                                        |    |       |  |  |  |

(論文審査の結果の要旨)

量子力学で用いられてきた従来の WKB 近似に対して、Borel 総和法を用いることにより、近似理論の枠組を越えた exact な解析手法を与えるのが完全 WKB 解析である。完全 WKB 解析は、まず 2 階の線型常微分方程式に対して大きな成功をおさめた後、高階の線型常微分方程式や連立の線型常微分方程式系、さらに非線型常微分方程式へと次第に拡張されてきた。こうした流れの中で、完全 WKB 解析の多変数化、即ち、偏微分方程式や極大過剰決定系への完全 WKB 解析の一般化は、今後追求されるべき重要な魅力的なテーマの一つである。申請者の廣瀬三平氏は、この重要なテーマへ向けた研究の第一歩として、「大きなパラメータを含んだ 2 変数完全積分可能系の完全 WKB 解析」の問題の研究に取り組んできた。その成果をまとめたのが、参考論文とこの学位論文である。

完全 WKB 解析においては、変わり点と Stokes 曲面から構成される Stokes 幾何と、解の Stokes 現象を記述する接続公式が非常に重要な役割を演じる。ところが、常微分方程式の場合と異なり、偏微分方程式の場合の Stokes 幾何は、次元が高くなるためにその構造を理解することが非常に難しい。完全 WKB 解析の多変数化が今まで議論されて来なかった原因の一つはこの点にある。廣瀬氏は、まず参考論文(数理解析研究所講究録別冊に掲載予定)において、計算機を用いた数値計算を巧みに援用しつつ、Pearcey 系や(1, 4)型超幾何系の Stokes 幾何の大域構造を詳細に調べた。この参考論文は、査読者から「講究録別冊の趣旨によくかなった、別冊シリーズの中で最高級に属する作品と思われる」という評価をもらった労作であり、(論文内容の要旨)で述べたように、タイプの異なる 2 個の変わり点がぶつかるという退化が起こる点の重要性を指摘したという点でも意義深い論文である。この知見を踏まえて、本論文で廣瀬氏は、Pearcey 系への WKB 解析的な変換の存在を示すことによって、タイプの異なる 2 個の変わり点がぶつかる点における一般の 2 変数完全積分可能系の構造を明らかにした。Pearcey 系への WKB 解析的な変換の存在を示した本論文の主結果は、変わり点の近傍における Airy 方程式への変換の(ある意味で)2 変数版と考えられると同時に、一般の 2 変数完全積分可能系に対して Stokes 幾何の大域構造を調べる際に決定的に重要な役割を演じる。それはまた、この分野の懸案の問題の一つである高階常微分方程式の仮想的変わり点や新しい Stokes 曲線の構造解析の問題にも、新たなアプローチを提供する可能性がある。さらに、将来完全積分可能系の解に対する接続公式を議論する際にも、本質的な役割を果たすことが期待される。このように本論文は、完全積分可能系の完全 WKB 解析という分野における記念碑的な論文にもなり得る、非常に基本的かつ重要な論文だと考えられる。

以上により、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、平成 25 年 1 月 22 日に公開講演会を開催し、廣瀬氏に本論文の主結果とその意味を説明してもらい、その後に引き続いて論文内容とそれに関連した口頭試問を行った。その結果合格と判定した。