

三角格子 Heisenberg Spin 系 (有限系) の Chaos

福岡工大・教養

中村勝弘

最近、Hamilton 力学系の Chaotic 又は Irregular な挙動に関心が集まりつつある。天体力学における Henon-Heiles 系や Anisotropic Kepler 系の問題、更には、原子分子のレベルにおける、強磁場中の水素原子 (ワニエ励起子) や シリコンのドナー不純物の irregular な量子準位分布の問題がその一例である。

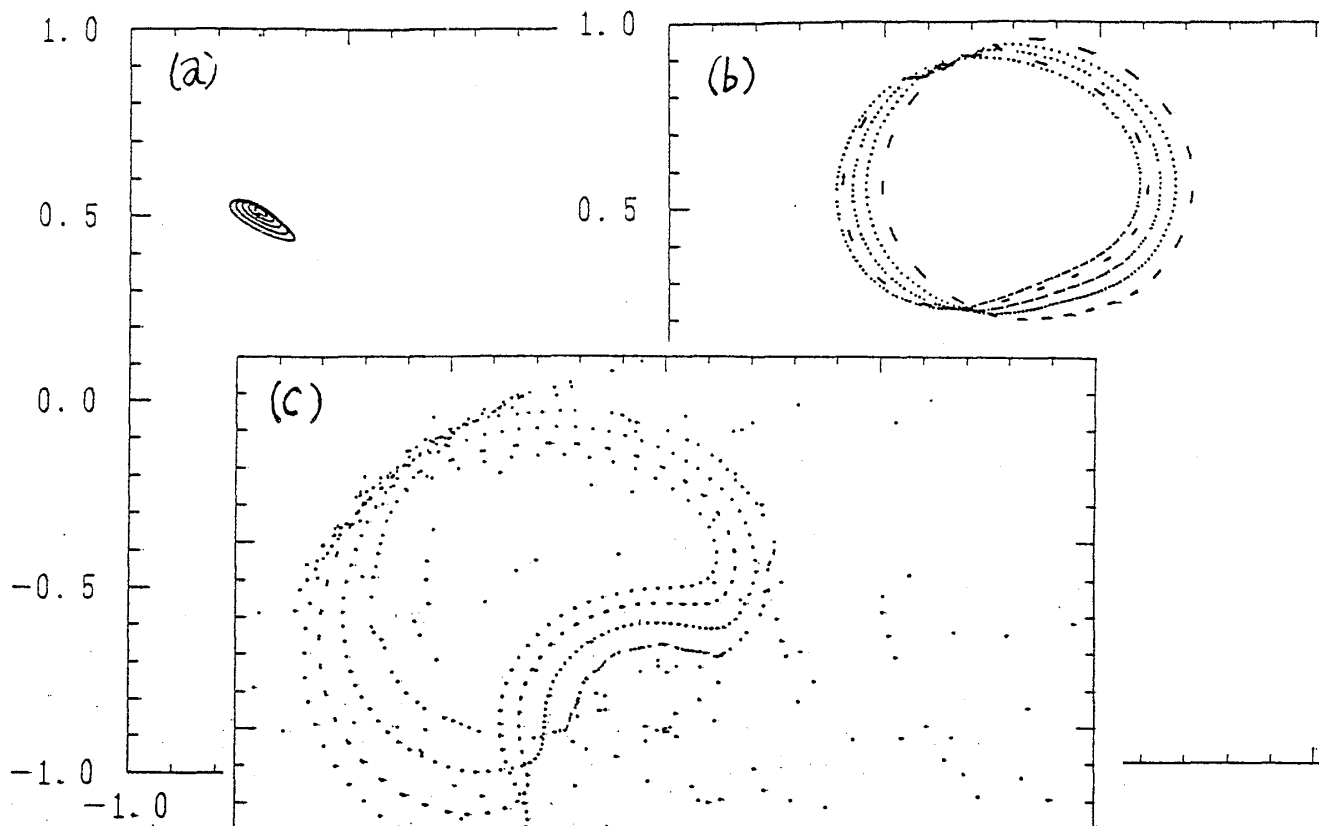
ここでは Solid State における Chaos の可能性をさぐる。まず、思いつくのが非線型相互作用で結合した調和振動子の格子である。Fermi-Pasta-Ulam によるこの系の数値研究は、一方において K.A.M. の概念を産み出し、他方において、高次の非線型項をとり入れることによって生じる完全可積分な Toda 鎖を産み出した。しかし、Toda 鎖 (格子) は、そもそもは、soliton, phonon 型以外の新しいタイプの状態 (Chaotic or Irregular States) をもたない。

我々は、XXZ 型の交換相互作用で結合した古典 Heisenberg spin 系を考える。1-d 鎖の場合、spin $\frac{1}{2}$ の量子系は可積分であるが、spin $=\infty$ の古典系は非可積分である (Pfaddeev 1982)。そこで、まず、三角格子上の 3 個の古典 spin 系を考える。これは、2-d 三角格子 spin 系の Chaos の研究の出発点であると同時に、1-d 非可積分 spin 鎖 (格子) の研究の出発点でもある。結合は、XXZ 型の Antiferro 相互作用を仮定する。

この系は、energy E と磁化 M_z 以外の保存量を持たないの2次元相空間の自由度は、4 であり、Chaos が期待できる。以下 $M_z=0$ とする。格子 spin 系の運動方程式よりえられる、変分に対する線型方程式の解析から、spin dynamics の軌道の local stability がわかる。これは、Chaos の出現のための必要条件の考察にあたる。解析によると、高 energy 状態ではなく低 energy 状態で、指数関数的な変分の不安定成長が生じる。Local instability が生じる critical energy は、Heisenberg 型から planar 型に移行するに従い、上昇する。

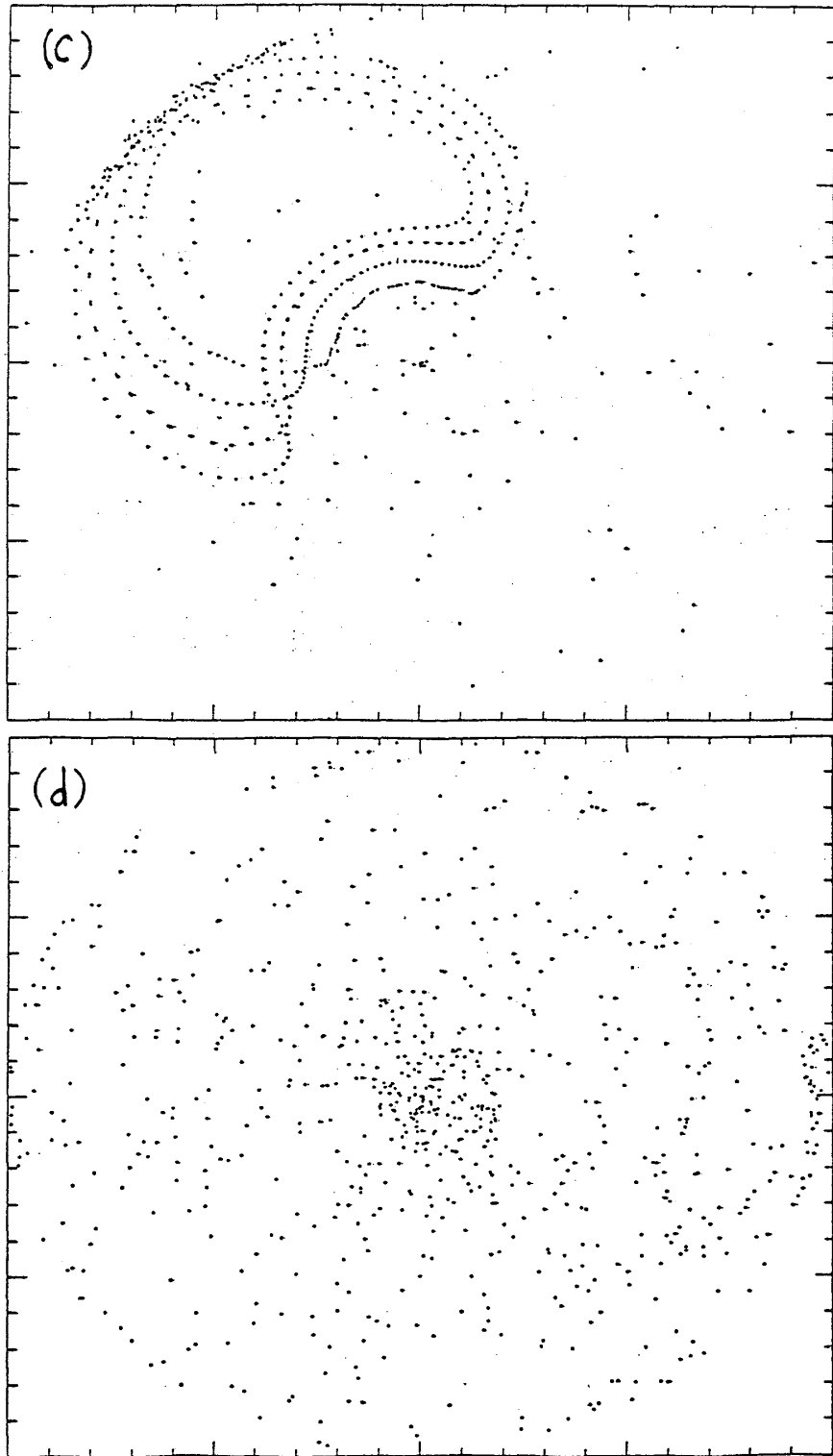
実際、高 energy 状態から energy を下げながら、spin dynamics を数値的に調べ、Poincare surface of section で spin 軌道の性質を調べると、Fig 1 (a) $\rightarrow$ (b) $\rightarrow$ (c) のようになる。図の各 stage で、それぞれ 5 種類の軌道の Poincare section の $S_z^2 - S_z^4$ 面への projection がえがかれている。I(c) 図からわかるように、 $E=-1.204$ で K.A.M. の一部 (5 番目の軌道) が崩壊する。この軌道だけの長時間 run の結果が I(d) 図である。Irregular orbit は、Poincare section の全域に広がっていることがわかる。

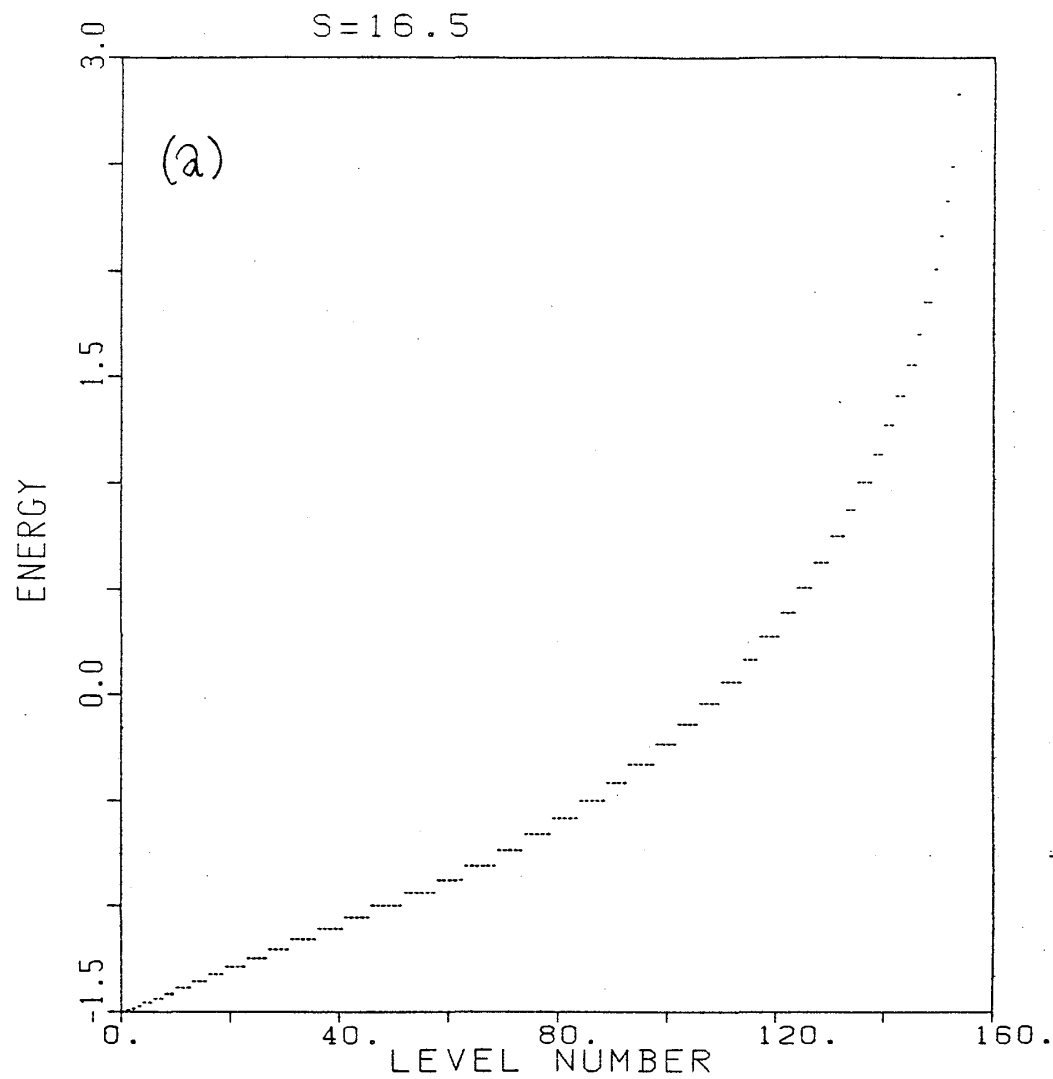
他方、基底状態 (古典 spin 系から、いわゆる 120° 構造) から energy をあげていくと、spin wave 励起に対応した K.A.M. がまず形成され、ついで K.A.M. の一部が



I ☒

$\frac{dS_1^2}{dt} = 0$
 で定義された
 Poincaré section
 の $S_1^2 - S_1^2$ 面への
 projection
 (a) $E = 0.0$
 (b) $E = -1.175$
 (c) $E = -1.204$
 (d) $E = -1.204$
 但し、(d)は
 1種類の軌道



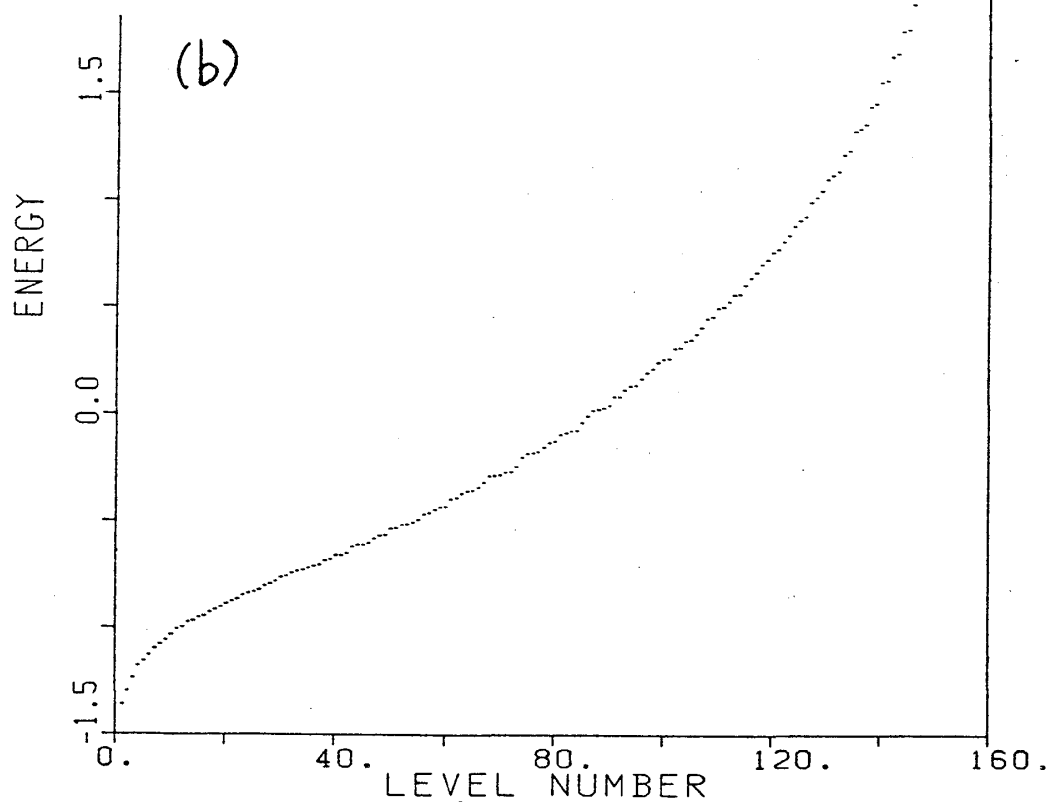


II 四

量子準位 ($S=16\frac{1}{2}$)

(a) Isotropic
Heisenberg model

(b) planar model
(spinが半整数の
ため $M_z = \frac{1}{2}$ の
manifoldを採用)



崩れて chaos (Irregular orbit) が出現する。エネルギーを更にあげると、I(c), I(d) 図の励起状態に見られるような global chaos が形成される。spin wave (KAM) の崩壊と chaos の形成は、低励起状態 ($E \approx -1.40$) で生じる。

このような irregular state は、強磁性結合の場合、少なくとも低励起状態では出現せず、三角格子 Antiferro に固有なものである。その意味では Frustration-induced chaos といえよう。この新しい動的状態は、少数個の spin cluster の関与する観測 (例えば NMR の spectral broadening) とかがわってくる。

ところで、対応する量子系では何が期待できるか、又、その半古典極限で、いかなる理論的問題が生じるかは大変興味深い。

我々は、 $S = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ と増していき、spin の大きさの自乗 $S(S+1)$ で scale されたエネルギー準位を調べた。才 II 図は $S = 16\frac{1}{2}$ の時の量子準位を Isotropic Heisenberg model の時 (II(a)) と Planar model の時 (II(b)) について示している。

Manifold は、 K (全波数) $= 0$, $M_z = \frac{1}{2}$, even parity の states に限っている。

II(b) 図の低 energy 領域では、非可積分量子系に特有な準位間反発が支配的である。nearest neighbouring level spacing の分布を調べると、random matrix の場合と同様な Wigner 分布になることがわかった。そして、spin の大きさを更に大きくすると、この傾向は一層明白となる。他方、II(a) 図では、系の可積分性を反映して、準位の縮退が支配的である (注: 3個の spin 系の場合、Isotropic Heisenberg model は、 M_z の他に M_x, M_y も保存量であるので可積分となる)。

量子論から古典論への transition において、level 間隔の spin S への依存性は、Heisenberg model と Planar model とで異なる scaling 則に従うこともわかってきた。

Pauling の Resonating Valence Bond Theory により、三角格子量子 Antiferro の基底状態が説明されるというのは、P.W. Anderson の conjecture であるが、今、又、半古典極限での lattice spin 系の strange な挙動は、量子力学と非可積分古典力学を Chaos の概念で連関させるという intriguing な研究分野を提供するようである。