

東大理.

周 睦 雄

特異点をもたない hypersurface $H \subset \mathbb{CP}^{n+1}$ は
その isotopy class まで、次数 d と n のみで完
全に、決定される ([5])。そこで、孤立特異点、
何個か持つ hypersurface V の cohomology ring
 $H^*(V; \mathbb{Q})$ に point をしほって、その構造をしらべる
ことにする。 $f(z_0, \dots, z_{n+1})$ を d 次斉次多項式で、
 $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{CP}^{n+1}$ とする。 $\Sigma V = \{p_1, \dots, p_r\}$ を
 V の singular point とする。必要はら適當な、座
標変換をして、 $\Sigma V \subset U_0 = \{(z_0, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{CP}^{n+1} \mid z_0 \neq 0\}$
と考えらる。

§2. Euler number, characteristic polynomials
及 η zeta-函数.

$F \in \mathbb{C}^{n+2}$ の hypersurface で, $f^{-1}(1)$ で定義
ある。 F は f で原点に定義される Milnor fibering:

(*) $f/|f|: S^{2n+3} - K \rightarrow S^1$ ($K = f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$)
 $\Rightarrow$ fiber = diffeomorphic $\mathbb{R}^2$, $\perp \Rightarrow$ fibering $\Rightarrow$

自然な connection による lifted diffeomorphism
 は $h: F \rightarrow F$, $h(z_0, \dots, z_{n+1}) = (z_0 \exp \frac{2\pi i}{d}, \dots, z_n \exp \frac{2\pi i}{d})$
 で定義される。明らかに, $h^d = \text{id}$. 一般に differential manifold N とその上の periodic map
 $h: N \rightarrow N$ ($h^d = \text{id}$) が与えられた時, h の zeta 函数
 を $\zeta(t) = \exp \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \frac{t^j}{j}$ (ここで, $\chi_j = \text{Euler number of } \text{Fix}(h^j)$) で定義する。又 j -th character-
 istic polynomial $P_j(t)$ は $t \cdot h_* - I_*: H_j(N; \mathbb{Q}) \rightarrow$
 $H_j(N; \mathbb{Q})$ の行列式で定義する。 $\zeta(t)$ と $P_j(t)$ は次の
 等式も満している。(BT)

$$\zeta(t) = P_0(t)^{-1} P_1(t) P_2(t)^{-1} \dots P_n(t)^{\pm 1} \dots (A)$$

以下 $H^*(N), H_*(N)$ は $\mathbb{Q}$ 係数とする。元にもとって,

$h: F \rightarrow F$ の zeta 函数は, 容易な計算によって,

$$\zeta(t) = (1-t^d)^{-\frac{\chi(F)}{d}} \dots (B)$$

今 α_j を $P_j(t)$ の $(t-1)$ 多重度とする (=rank of kernel
 $h_* - I_*: H_j(F) \rightarrow H_j(F)$). 我々の場合, $\alpha_j = 0$ ($j \leq n-1$)
 は容易に示される (cf Th.2 の Corollary 4). 従って (A), (B)
 より

$$\text{Proposition 1. } \frac{\chi(F)}{d} = 1 + (-1)^n (\alpha_n - \alpha_{n+1})$$

V 及び W F の Euler 標数の間には次の等式が成立する。

$$\text{Lemma 1. } \chi(V) = (n+2) - \frac{\chi(F)}{d}$$

証明: (水谷忠良氏の idea) $(\mathbb{CP}^{n+1}, V)$ を三角分割して (2), N は V の Regular neighborhood とします。 F は明らかに $\mathbb{CP}^{n+1} - V$ 上の d -fold covering ですから, $\chi(F) = d \cdot \chi(\mathbb{CP}^{n+1} - V)$. 一方 Euler 標数に関する和公式を使えば,

$$\chi(\mathbb{CP}^{n+1}) = \chi(\mathbb{CP}^{n+1} - V) + \chi(V) - \chi(\partial N)$$

$$= \chi(\mathbb{CP}^{n+1} - V) + \chi(V)$$
 従って, $\chi(V) = (n+2) - \frac{\chi(F)}{d}$ (終)

Lemma 2. $K = f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$ とすると, $H_*(K)$ は次の様になる。

$$\begin{cases} H_n(K) = \alpha_{n+1} \mathbb{Q}, & H_{n+1}(K) = (\alpha_{n+1} + \alpha_n) \mathbb{Q} \\ H_{n+2}(K) = \alpha_n \mathbb{Q}, & H_{2n+1}(K) = \mathbb{Q} \\ \widehat{H}_j(K) = 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

証明: (*) の Wang sequence

$\dots \rightarrow H_{j+1}(S^{2n+3} - K) \rightarrow H_j(F) \rightarrow H_j(F) \rightarrow H_j(S^{2n+3} - K) \rightarrow \dots$
 と, Alexander duality $\widehat{H}^j(K) = \widehat{H}_{2n+2-j}(S^{2n+3} - K)$
 より明白。(終)

さて, 以上の準備のもと, $H^*(V)$ は次の様になる。

定理 1. (i) (n : odd) $\begin{cases} H^0(V) = H^2(V) = H^4(V) = \dots = H^{n+1}(V) = \mathbb{Q} \\ H^n(V) = \alpha_{n+1} \mathbb{Q}, & H^{n+1}(V) = (\alpha_n + 1) \mathbb{Q} \\ H^{n+3}(V) = H^{n+5}(V) = \dots = H^{2n}(V) = \mathbb{Q} \\ H^{2j+1}(V) = 0 & (2j+1 \neq n+1) \end{cases}$

$$(ii) (n: \text{even}) \begin{cases} H^0(V) = H^2(V) = \dots = H^{n-2}(V) = \mathbb{Q} \\ H^n(V) = (\alpha_{n+1} + 1)\mathbb{Q}, H^{n+1}(V) = \alpha_n \mathbb{Q} \\ H^{n+2}(V) = H^{n+4}(V) = \dots = H^{2n}(V) = \mathbb{Q} \\ H^{2j+1}(V) = 0 \quad (j \neq n+1) \end{cases}$$

証明: Hopf bundle $\pi: S^{2n+3} \rightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ 及 π^* の制限

$\pi: K \rightarrow V$ を考えて, 次の2つの Gysin sequence を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H^{j+1}(K) & \rightarrow & H^j(V) & \xrightarrow{\cdot \tau} & H^{j+2}(V) & \rightarrow & H^{j+2}(K) \rightarrow \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots \rightarrow H^{j+1}(S^{2n+3}) & \rightarrow & H^j(\mathbb{CP}^{n+1}) & \xrightarrow{\cdot t} & H^{j+2}(\mathbb{CP}^{n+1}) & \rightarrow & H^{j+2}(S^{2n+3}) \rightarrow \dots \end{array} \quad (G)$$

そこで, t は Hopf bundle の Euler class $\in H^2(\mathbb{CP}^{n+1})$

τ は π^* の制限. j に関する帰納法で, 次の diagram は可換な同型を与える: ($j \leq n-3$)

$$\begin{array}{ccc} H^j(V) & \xrightarrow[\sim]{\cdot \tau} & H^{j+2}(V) \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ H^j(\mathbb{CP}^{n+1}) & \xrightarrow[\sim]{\cdot t} & H^{j+2}(\mathbb{CP}^{n+1}) \end{array} \quad \dots (G_1)$$

一方 τ^n は V の fundamental cocycle の d 倍である事が知られているから, j に関して下向きに帰納法で, (G_1) は $j \geq n+2$ でも成立する. 故に (G) は次様になる:

1) $n: \text{odd}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^n(V) & \rightarrow & H^n(K) & \rightarrow & H^{n+1}(V) & \xrightarrow{\cdot \tau} & H^{n+1}(V) \xrightarrow{j} H^{n+1}(K) \rightarrow H^{n+1}(V) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \sim & & \uparrow & & \uparrow \\ & & H^{n+1}(\mathbb{CP}^{n+1}) & \xrightarrow[\sim]{\cdot t} & H^{n+1}(\mathbb{CP}^{n+1}) & & \end{array}$$

$H^{n+1}(V) \xrightarrow{\cdot \tau} H^{n+1}(V)$ is injection である事を考えると,
 $H^n(V) \subseteq H^n(K)$, $H^{n+1}(V) \triangleq \text{Im } \tau \oplus \text{Ker } j \triangleq (\alpha_n + 1) \mathbb{Q}$

2) n : even

$$0 \rightarrow H^{n-2}(V) \xrightarrow{\cdot \tau} H^n(V) \rightarrow H^n(K) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^{n+1}(V) \rightarrow H^{n+1}(K) \rightarrow H^n(V) \xrightarrow{\cdot \tau} H^{n+2}(V) \rightarrow H^{n+2}(K) \\ \rightarrow H^{n+1}(V) \rightarrow 0$$

同様に, $H^n(V) = (\alpha_{n+1} + 1) \mathbb{Q}$, $H^{n+1}(V) = \alpha_n \mathbb{Q}$ Q.E.D.

Corollary 1. 環としての $H^*(V; \mathbb{Q})$ の構造は

$$H^*(V) \triangleq \mathbb{Q}[\tau, x_1, \dots, x_{\alpha_{n+1}}, y_1, \dots, y_{\alpha_n}] / \sim$$

ここで, $\tau \in H^2(V)$, $x_j \in H^1(V)$, $y_k \in H^{n+1}(V)$, $\sim$ は
 $\tau^{n+1} = 0$, $\tau \cdot x_j = 0$ ($j = 1, \dots, \alpha_{n+1}$), $\tau \cdot y_k = 0$ ($k = 1, \dots, \alpha_n$)

$x_j \cdot y_k = 0$, $y_j \cdot y_k = 0$, $x_i \cdot x_j = a_{ij} \tau^n$ ($a_{ij} \in \mathbb{Q}$).
 (n : odd ならば $a_{ij} = -a_{ji}$)

注意 ① Proposition 1 は全く一般に成立する.

② Theorem も全く一般に成立する. 要するに,

$\alpha_j \in \text{rank of kernel: } h_x - I_x: H_j(F) \rightarrow H_j(F)$ であると,
 $\text{rank } H^{n+j}(V) = \alpha_{n+1-j} + \varepsilon(n+j)$ であり, $\varepsilon(n+j)$ は
 $n+j$ が偶数ならば 1, 奇数ならば 0 である. 環構造も同様.

~~詳細は [6] を参照せよ. ($\Rightarrow$ §4 or [6])~~

§3. Topological resolutions

M を微分可能多様体, $\pi \in M$ から V への連続写像

する。 $\{\pi: M \rightarrow V\}$ が V の topological resolution
 であるとは, (i) π は proper (ii) surjection (iii) $M - \pi^{-1}(\Sigma V)$

$\xrightarrow{\pi} V - \Sigma V$ は diffeomorphism である時を言う。 § 1

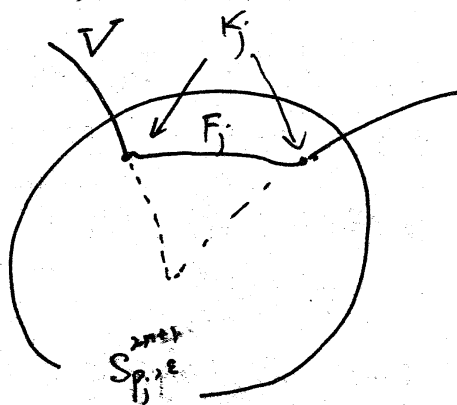
と同じ仮定の下で, P_j を中心とする Milnor fibering を
 考える。 ε を小さく選んで, $K_j = g^{-1}(0) \cap S_{P_j, \varepsilon}^{2n+1}$, $F_j =$
 $\{g > 0\} \cap S_{P_j, \varepsilon}^{2n+1}$ とする。 ($j=1, 2, \dots, s$)

X^d を $\mathbb{C}P^{n+1}$ の中の特異点を持たぬ

d 次の hypersurface とする。 X の

様なものは, 微分同型を除いて,

一意に決定される。 ([5])



定理 2. 次を満たす resolution $\pi: X^d \rightarrow V$ が存在
 する。 $\forall d \leq \varepsilon$ に対して, $N_d(P_j) \in V \cap D_{P_j, \varepsilon}^{2n+2}$ とすると,
 $\pi^{-1}(N_d(P_j))$ は F_j に diffeomorphic であって, 次の図
 式は homotopy の意味で可換。

$$X^d \xrightarrow{\pi} V$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \searrow & & \nearrow \\ & \mathbb{C}P^{n+1} & \end{array}$$

(i, j : inclusions)

補題 2. 次の条件を満たす family $\{f(z, t)\}_{t \in U}$ があ
 る。 (0) U は $0 \in \mathbb{C}$ を含む近傍。 (i) $f(z, 0) = f(z)$ (ii) $f(z, t)$
 は 任意の t について, d 次斉次多項式で, $t \neq 0$ なら $\mathbb{C}P^{n+1}$

の non-singular hypersurface を定義する. (ii) $A = \{(z, t) \in \mathbb{C}P^{n+1} \times \mathbb{C} \mid \frac{\partial f}{\partial z_j}(z, t) = 0, j=0, 1, \dots, n+1\} \cap U_0$ は $(P_j, 0)$ で孤立点. (しかも $\exists \varepsilon > 0, \forall t$ に對して, $S_{P_j, \varepsilon}^{2n+1}$ と $V_t = \{z \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid f(z, t) = 0\}$ が Transverse.

証明. $g(z_1, \dots, z_{n+1}) \equiv f(1, z_1, \dots, z_{n+1})$ とすると, 代数的集合上の多項式関数は有限個の critical values を持つから, $\delta > 0, D_{\delta, 0}^2$ の中の critical value は 0 だけとできる. $f(z, t) \equiv f(z) + t z_0^d$ と定義する. ($t \in D_{\delta, 0}^2$). (i), (ii) は明らか. (iii): $U_0 = \{z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ でのみ check すれば良い. $V\left(\frac{\partial f(z, t)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f(z, t)}{\partial z_{n+1}}, f(z, t)\right) \cap U_0 = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}, f+t=0\right) \cap \{z_0=1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. 故に, δ に依る定数より, 上の集合は $t=0$ のみ non-empty. (iv): 全く同様で, δ は $g^{-1}(0)$ と $S_{P_j, \varepsilon}^{2n+1}$ が Transverse になる様にとて, δ_1 は $g^{-1}(\eta)$ と $S_{P_j, \varepsilon}^{2n+1}$ が $|\eta| < 2\delta_1$ なる Transverse になる様にとれば, あらためて, $f(z, t) \in D_{\delta_1}^2$ に制限すればよい. (終)

定理2の証明: 上の deformation $f(z, t)$ を使って,
 $L = \{(z, t) \in \mathbb{C}P^{n+1} \times [0, \delta_1] \mid f(z, t) = 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1} \times [0, \delta_1]$
 を考える. L は $\{t=0\}$ に有限個の特異点をもつ, diff. manifold である. $\pi_1: L \rightarrow [0, \delta_1]$ と $\pi_1(z, t) = t$ で定義する. 明らかに, $\pi_1^{-1}(0) = V$ で, $\pi_1^{-1}(t) \cong X^d$ ($t \neq 0$)
 π_1 は $L - \Sigma V$ 上で non-degenerate であるから, $\gamma = \tau$,

π_1 の connection vector field v を作ると明らか, $t \neq 0$ で, v は積分可能. h_t は γ の one-parameter group とする. $h_t: \pi_1^{-1}(d_1) \cong X^d \rightarrow \pi_1^{-1}(t) \quad (t \neq 0)$. また.

$$\pi: X^d \rightarrow \pi_1^{-1}(0) = V$$

$$z \mapsto \pi(z) = \lim_{t \rightarrow +0} h_t(z) \quad (z \in \pi_1^{-1}(d_1)) \text{ で定義}$$

ある. ΣV は L の中で, 孤立しているので, π は連続で, $\pi|_{X^d - \pi^{-1}(\Sigma V)} \rightarrow V - \Sigma V$ は diffeomorphism であることが明らか. 最後の部分の証明のために次の様な manifold $\mathcal{V}$ を考える. η を十分小さくとり, $F_j(\eta) = g^{-1}(\eta) \cap D_{j,\varepsilon}^{2n+2}$ とする. $F_j(\eta)$ は $\bar{F}_j$ に diffeomorphic. ($\partial F_j(\eta) \cong K_j$)

$$\mathcal{V} \equiv (V - \bigcup_{j=1}^p V \cap \text{Int } D_{j,\varepsilon}^{2n+1}) \cup_{K_j} F_j(\eta)$$

補題 3. $\mathcal{V}$ は X^d に diffeomorphic である.

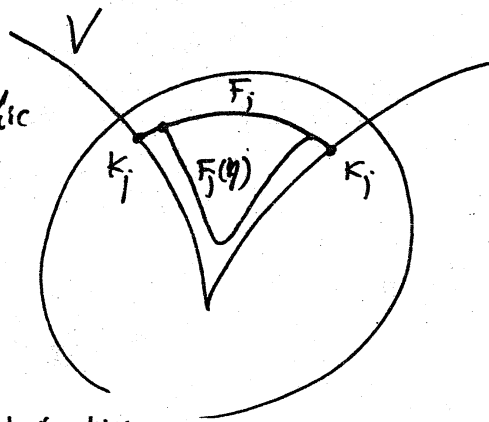
proof: $f(z, t)$ は 補題 2 のものとする. $g(z_1, \dots, z_{n+1}, t) = f(1, z_1, \dots, z_{n+1}, t)$

$$= g(z) + t \text{ とする. } \eta \text{ を 4\varepsilon とおけば,}$$

$X_{t,\eta} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid g(z, t) = \eta\}$ は $\mathcal{D}_{j,\varepsilon}^{2n+1}$ と transverse.

($t \leq d_1$). $W_j(\eta) \equiv \{(z, t) \in D_{j,\varepsilon}^{2n+2} \times [0, d_1] \mid g(z, t) = \eta\}$, $p(z, t) = t$ で, $p: W_j(\eta) \rightarrow [0, d_1]$ を定義する.

明らかに, p は non-degenerate であり, proper mapping

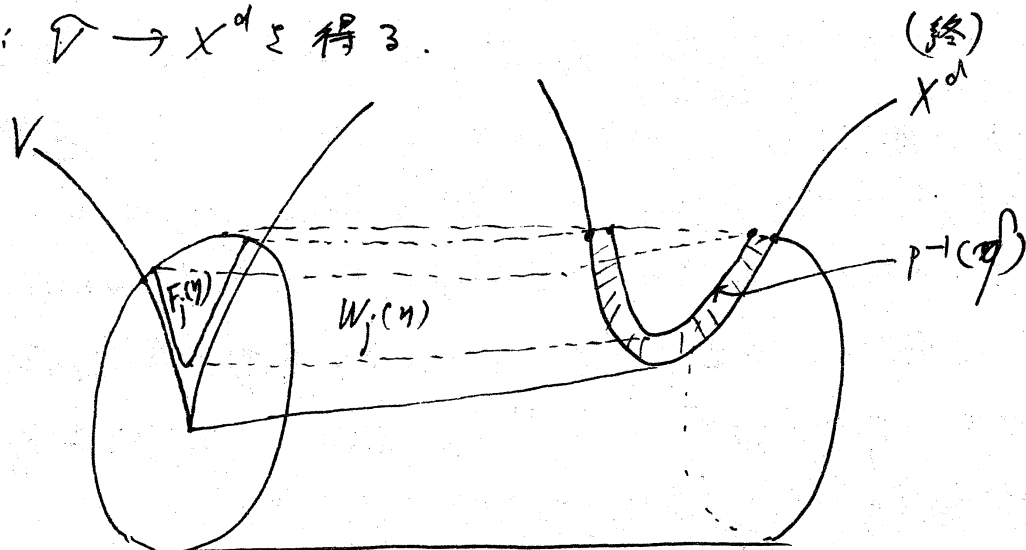


であるから Ehresmann's fibering theorem 12.5.2,

$\exists \varphi_j : F_j(\gamma) \rightarrow P^{-1}(c_j^1)$ is diffeomorphism.

$P^{-1}(c^1) \cap \pi_1^{-1}(c^1) \cap D_{j,\varepsilon} = X^d \cap D_{j,\varepsilon}$ が diffeo なる
 事も明らかであるから, この二つの部分の同型

$\varphi : V \rightarrow X^d$ を得る.



Corollary 1. (Kato, M)

$$\chi(V) = \chi(X^d) - (-1)^n \sum_{j=1}^p M_j$$

$$= \frac{1}{d} \{ (1-d)^{n+2} + (n+2)d - 1 \} + (-1)^{n+1} \sum_j M_j$$

$\therefore \therefore M_j = \text{rank } H_n(F_j) = \text{multiplicity of } g \text{ at } P_j.$

Corollary 2. $\chi(F) = 1 + (-1)^{n+1} (d-1)^{n+2} + (-1)^n \sum_{j=1}^p M_j d$

proof: 補題 1 及び u, Corollary 1.

Corollary 4. $\pi_*: H_j(X^d) \longrightarrow H_j(V)$

is $\begin{cases} j \leq n-1 \end{cases}$ isomorphism, $\begin{cases} j = n \end{cases}$ onto
or $\begin{cases} j \geq n+2 \end{cases}$ $\emptyset$ $j = n+1$: injection.

ction.

(証明): $(V - \bigcup_{j=1}^p V \cap D_{j,\varepsilon}, \bigcup_{j=1}^p V \cap D_{j,\varepsilon}) \in (V - \bigcup_{j=1}^p V \cap D_{j,\varepsilon}, \bigcup_{j=1}^p \overline{F}_j)$ の pairs に対す. Mayer-Vietoris exact sequence と 補題 3.

§4. General hypersurfaces.

$f(z_0, \dots, z_{n+1}) \in$ square-free to d -th homogeneous polynomial $\in \mathbb{C}$, $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{CP}^{n+1}$, $F = f^{-1}(1) \subset \mathbb{CP}^{n+2}$, $K = f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$ とす. $P_j(t)$ $\in$ f の j -th characteristic polynomial とす. $\alpha_j \in$ divisor $P_j(t)$ の $\langle 1 \rangle$ の 係数 (= rank of kernel: $h_* - I_*: H_j(F) \longrightarrow H_j(F)$) とする. 当時 Th. 1 は 次の様に拡張される.

Theorem 3. $\text{rank } H^{n+j}(V) = \alpha_{n+1-j} + \varepsilon(n+j)$

$$\varepsilon(n+j) = \begin{cases} 1 & n+j: \text{even} \\ 0 & n+j: \text{odd} \end{cases}$$

更に rang $\in \mathbb{Z}$ は, 適当な base $\alpha_1^{(n+1)}, \dots, \alpha_{n+1-j}^{(n+1)} \in H^{n+1}(V)$ と $\tau \in H^2(V)$ (Sub class of Hopf fibering) を使って, 次の様に表される.

$H^*(V) \triangleq \mathbb{Q}[\tau, x_1^{(n)}, \dots, x_{n+1}^{(n)}; \dots; x_1^{(2n)}, \dots, x_{n+1}^{(2n)}] / \sim$
 $\tau \cdot x_k^{(n+j)} = 0 \quad (\forall j, \forall k), \quad x_k^{(n+j)} \cdot x_s^{(n+l)} = 0$
 $(\forall (j, l) \neq (0, 0), \forall k, \forall s) \quad x_j^{(n)} \cdot x_k^{(n)} = a_{j,k} \tau^n$
 $+ \sum_{\ell} b_{j,k}^{\ell} x_{\ell}^{(2n)}$, $\mathbb{Q}[] / \sim$ は n が odd $n \in \mathbb{Z}$, 非
 可換 τ ; $x_j^{(n)} \cdot x_k^{(n)} = -x_k^{(n)} \cdot x_j^{(n)}$ と示す.

(証明) F は $\mathbb{Z}_d$ の, lifted diffeomorphism
 $h: F \rightarrow F \quad (z_0, \dots, z_{n+1}) \mapsto (z_0 \exp \frac{2\pi i}{d}, \dots, z_{n+1} \exp \frac{2\pi i}{d})$
 τ ; free $\mathbb{Z}$ operate τ 上. 故に Borel は τ 上.

$$H^j(F/\mathbb{Z}_d) = H^j(\mathbb{CP}^{n+1} - V) \triangleq [H^j(F)]^{\mathbb{Z}_d}.$$

$$= \text{kernel} \{ (h_* - I_*) : H^j(F) \rightarrow H^j(F) \}.$$

$$\cong \alpha_j \mathbb{Q}$$

homology

故に, $(\mathbb{CP}^{n+1}, \mathbb{CP}^{n+1} - V)$ は 度 j での exact sequen-
 ce となる. $H^{n+1-j}(V) \triangleq H_{n+2-j}(\mathbb{CP}^{n+1}, \mathbb{CP}^{n+1} - V)$
 duality

$$\cong (\alpha_{n+1-j} \pm \epsilon(n+j)) \mathbb{Q}$$

又, ring の構造と. $K \xrightarrow{S'} V$ の Gysin sequence
 を使って, 容易に示される. 詳細は [6] を見よ.

文献

- [1] M. Kato : Euler - Poincaré characteristics of complex hypersurfaces with isolated singularities
- [2] S. Lojasiewicz : Triangulation of semi-analytic sets, *Ann. of Scuola Norm. Sup. Pisa*, Ser. 3, 18, 1964
- [3] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies*, No 61, 1969.
- [4] M. Oka : On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials, to appear in *Topology*
- [5] M. Oka : Notes on projective hypersurfaces.
- [7] M. Oka : Ring structures of projective hypersurfaces.