

代数的 K の Galois descent の周辺

滋賀大教育 丹羽雅彦 (Masahiko NIWA)

はじめに 群 G に対して, 環 A と群環 $A[G]$ の K 群の関係やガロア群 G の環のガロア拡大 A/B (又は scheme のガロア被覆 $A \rightarrow B$) に対応した $K_*(A)$ と $K_*(B)$ との関係などをどんな枠組で記述したらよいか? この問題から, G -category とその limit category の適切な概念が得られると考えられます. Grothendieck による a category with a Galois descent datum of Galois group G ([8] 参照) の概念があります. $\mathcal{C}$ を B -linear category, $\mathcal{C}_A$ をスカラー拡大でえられた A -linear category とすると, 群 $G = \text{Gal}(A/B)$ は $\mathcal{C}_A$ 上に pseudo-functor として作用し, その一種の limit category $\Delta_G \mathcal{C}_A$ (descended category と呼ぶ) が最初の $\mathcal{C}$ に同値になります. これを抽象化しましょう.

$(\mathcal{C}, (\alpha_s)_{s \in G}, (\mu_{s,t})_{s,t \in G})$ が a category with a G -descent datum (または G -category) であるとは, $\mathcal{C}$ は任意の category, 各 $s \in G$ に対し α_s は $\mathcal{C}$ の endo-functor で category 同値, 各 (s,t)

$\in G \times G$ に対し, $\mu_{s,t}: \alpha_{st} \rightarrow \alpha_s \circ \alpha_t$ は natural isomorphism で, $\alpha_e = \text{Id}_{\mathcal{C}}$, $\mu_{e,s} = \text{id}_{\alpha_s} = \mu_{s,e}$, (e は G の恒等元)

$(\alpha_s * \mu_{t,u}) \circ \mu_{s,tu} = (\mu_{s,t} * \alpha_u) \circ \mu_{st,u}$ ($s, t, u \in G$) を満足するものと定義する. このとき, the descended category $\Delta_G \mathcal{C}$ は, 対象が $(X, (\lambda_s)_{s \in G})$, X は $\mathcal{C}$ の対象, 各 $s \in G$ に対し, $\lambda_s: X \rightarrow \alpha_s X$ は $\mathcal{C}$ の同型で, $\lambda_e = \text{id}_X$,

$$\alpha_s(\lambda_t) \circ \lambda_s = (\mu_{s,t})_X \circ \lambda_{st} \quad (s, t \in G)$$

を満足するものからなり, 射 $(X, (\lambda_s)) \rightarrow (X', (\lambda'_s))$ は $\mathcal{C}$ の射 $\psi: X \rightarrow X'$ で, $\alpha_s(\psi) \circ \lambda_s = \lambda'_s \circ \psi$ を満足するものからなるとして定義されます.

特に, すべての $s \in G$ に対し, $\alpha_s = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ となる場合 (trivial G -category と呼ぶ) を考えると, $\Delta_G \mathcal{C} = \text{Cat}(G, \mathcal{C})$ となります. 但し, G は群を category と考えたもの, $\text{Cat}(_, _)$ は functor category を表す. もし, $\mathcal{C}$ が A -linear category ならば, $\text{Cat}(G, \mathcal{C})$ は対応する $A[G]$ -linear category となり, ここで定義した " G -category" は最初の問題の後者ばかりでなく前者をも包含していることになります.

この報告では, まず equivariant algebraic K-theory という用語で現われた種々の G -category の概念を, structure (exact category, symmetric monoidal category....) を考えない形で関係づけます. (§1) 次に, exact category structure

(Quillen[7]) を考えたときを述べます. (§2)最後に, Dress-Kuku[1]によって trivial G -category に対し展開された induction theory が任意の G -category に一般化されることを述べます. (§3)

ここで, 群 G から生ずるいくつかの categories の記号を定めておきましょう. 同じ文字 G により, 対象が唯一つ・で射が G の元である category を表す. ただし s に t を合成したものは ts とします. 合成を st とする category は G^{op} と表す. 群 G の translation category (comma category $G/\cdot$ と同じ) は EG と書く. S が G -集合のとき, 対象が S の元, x から x' への射 $(x, x' \in S)$ が $gx = x'$ となる G の元 g なる category を $\underline{S}$ で表す. 部分群 $H < G$ に関する $\underline{G/H}$ をよく用いる. その特殊の場合として, $\underline{G/\langle e \rangle} = G/\cdot = EG$, $\underline{G/G} = G$.

§1. G -category の種々の概念

category $\mathcal{E}$ と 2-category $\mathcal{C}$ に対し, lax functor $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ とは, 対象を対象に射を 1-射に移し, $\mathcal{E}$ の任意の対象 a と $\mathcal{E}$ の任意の合成 $a \xrightarrow{s} b \xrightarrow{t} c$ に対し それぞれ 2-射

$$\iota_a: \alpha(id_a) \rightarrow id_{\alpha(a)}, \quad \mu_{s,t}: \alpha(s \circ t) \rightarrow \alpha(s) \circ \alpha(t)$$

が対応し, ある coherence 条件を満たすものとします. さらに, $\iota_a = id$ ($\forall a \in ob \mathcal{E}$), $\mu_{s,t}$ が同型 ($\mathcal{E}$ の $\forall$ 合成 $a \xrightarrow{s} b \xrightarrow{t} c$) となっているとき pseudo functor と呼ぶ. さらに, $\mu_{s,t} = id$

(ε の $\forall$ 合成) となるとき (strict) functor と呼ぶ.

G -category の概念は次のように分類される. 以下で, $\mathcal{Cat}$ は, 対象が small categories 1-射が functors 2-射が natural transformations なる 2-category を表す.

$\text{lax } G\text{-category} \supset G\text{-category} \supset \text{split } G\text{-category}$		
$\mathcal{Cat}$ の lax functor に対応	$\mathcal{Cat}$ の pseudo functor に対応	$\mathcal{Cat}$ の strict functor に対応
Lax Fun($G, \mathcal{Cat}$)	Des(G)	usual G - $\mathcal{Cat}$
Oplax Fun($G^{\text{op}}, \mathcal{Cat}$)	$\Downarrow$ PseudoFun($G, \mathcal{Cat}$)	$\Downarrow$ Fun($G, \mathcal{Cat}$)
	$\Updownarrow$ Opfib(G)	$\Downarrow$ Split(G)
Lax Fun($G^{\text{op}}, \mathcal{Cat}$)	PseudoFun($G^{\text{op}}, \mathcal{Cat}$)	Fun($G^{\text{op}}, \mathcal{Cat}$)
Oplax Fun($G, \mathcal{Cat}$)	$\Updownarrow$ Fib(G)	$\Downarrow$ Split(G^{op})

さらに, split G -category $\supset$ trivial G -category

これらすべてに対し, 関係を論ずることができますが, ここでは次のものにしぼって説明します. 但し, $G \geq H$ 部分群

	G -category	G -functor	limit category
Des(G)	G -category	G -functor	descended
$\Downarrow$ PseudoFun($G, \mathcal{Cat}$)	category $\mathcal{C}$ with a G -descent datum (α_s, μ_s, t)	nat. isom. を除いて G -desc. data と可換 な functor	category $\Delta_H \mathcal{C}$
$\Downarrow$ Grothendieck, Rivano	pseudo functor $\alpha : G \rightarrow \mathcal{Cat}$	pseudo natural transformation	

続き	G-category	G-functor	limit category
LaxFun(G, Cat) Thomason	lax functor $\alpha: G \rightarrow \text{Cat}$	lax natural transformation	lax limit $\text{Nat}_H(EH^{\text{op}}, \alpha _H)$
Opfib(G) Fröhlich-Wall	opfibered category $\mathcal{D} \rightarrow G$ over G $\mathcal{C} = \text{Ker } \alpha = \text{unique fiber}$	cartesian functor over G	representation cat. $\text{Rep}(H, \mathcal{D}) =$ $\text{Cart. Sec}(H \times \mathcal{D} \rightarrow H)$
Split(G) " Fun(G, Cat)	(strict) functor $\alpha_G: G \rightarrow \text{Cat}$	natural transf.	$\Delta_H \mathcal{C}_G$ $\mathcal{C}_G = \alpha_G(\cdot)$
usual G-Cat May, Fiedorowicz Hauschild, Waner...	usual G-category $\mathcal{C}$ " 対象と射の集合が G-集合で str. maps が G-maps なる cat.	usual G-functor " 対象と射の集合の 間の maps が G-maps なる functor	$\mathcal{C}^H$ " H-不変な対象と 射からなる sub- category

lax から strict への移行は, Street の第一構成 (e.g. [5] 参照) を用いて可能で, limit category の関係もえられるがこの報告は G-category = cat. with a G-descent datum を中心とした話で, lax に関しては lax limit が descended category に category 同値になることのみ示しましょう。

このため, G-categories 間の G-functor

$$(F, (\eta_s)_{s \in G}) : (\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t}) \rightarrow (\mathcal{C}', \alpha'_s, \mu'_{s,t})$$

の定義を与える。 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ は functor で, 各 $s \in G$ に対して $\eta_s: F \circ \alpha_s \rightarrow \alpha'_s \circ F$ は natural isom. で, $\eta_e = \text{id}_F$,

$(\alpha'_s * \eta_t) \circ (\eta_s * \alpha_t) \circ (F * \mu_{s,t}) = (\mu'_{s,t} * F) \circ \eta_{st} \quad (s, t \in G)$
 を満足するものとする. G-natural transformation $\tau: (F, \eta_s) \rightarrow (F', \eta'_s)$ は n.t. $\tau: F \rightarrow F'$ で $(\alpha'_s * \tau) \circ \eta_s = \eta'_s \circ (\tau * \alpha_s)$ ($s \in G$) を満たすものとする.

定理 1.1 $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ が G-category, $\alpha: G \rightarrow \mathcal{C}at$ 対応する pseudo functor (i.e. $\alpha(\cdot) = \mathcal{C}$, $\alpha(s) = \alpha_s$) とするとき,

$$\text{1ax}_G \lim \alpha = \text{Nat}_G(EG^{\text{op}}, \alpha) \approx \Delta_G \mathcal{C}$$

$H(< G)$ に制限して, $\text{Nat}_H(EH^{\text{op}}, \alpha|_H) \approx \Delta_H \mathcal{C}$

但し, EH^{op} は functor $\varepsilon: G \rightarrow \mathcal{C}at$, $\varepsilon(\cdot) = EH^{\text{op}}$

$$\varepsilon(s): EH^{\text{op}} \rightarrow EH^{\text{op}}, (h \xrightarrow{k} h') \mapsto (sh \xrightarrow{sk} sh') \quad (s \in G, kh = k')$$

α の lax limit である category $\text{Nat}_G(EG^{\text{op}}, \alpha)$ は explicit に対象が G-functors $(EG^{\text{op}}, \varepsilon(s), \text{id}) \rightarrow (\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$, 射がそれらの間の G-nat. transf. からなるものになる. G-functor (F, η_s) に対して, $X = F(e)$, $\lambda_s = (\eta_s)_e \circ F(s)$ において $\Delta_G \mathcal{C}$ の対象 (X, λ_s) を得る. 他方 (X, λ_s) が与えられたとき, $F: EG^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$

$$\text{を, } \begin{pmatrix} s \\ \downarrow t \\ s' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F(s) = \alpha_s X \\ \downarrow F(t) = (\mu_{s,t})_X^{-1} \circ \alpha_s(\lambda_t) \\ F(s') = \alpha_{s'} X \end{pmatrix} \quad (st = s')$$

と定義して, 求める category 同値がえられる.

次に G-category と opfibered category over G との関係を論ずる. これは pseudo functor と opfibered category の古典的關係 (SGA [10]) です. G-category $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ に対し,

Grothendieck構成によって opfibered category $\mathcal{Q} = \alpha \int \mathcal{C}$,
 unique fiber が $\mathcal{C}$, base-change functors が α_s , がえられる.
 逆に, opfibered category $\mathcal{Q} \xrightarrow{\pi} G$ を与えたとき, normalized
 cleavage が $\mathcal{C} = \text{Ker } \mathcal{Q}$ 上に G -descent datum を定義する. $\mathcal{Q}$ の
 射 f は $\pi(f) = s$ となるとき, grade s の射 と呼ばれる. そのと
 き $\mathcal{C}$ は $\mathcal{Q}$ の grade e の射からなる subcategory になる.

$s \in G$ と $\mathcal{C}$ の ($\mathcal{Q}$ の) 対象 X に対して, morphism of transport for
 X over s と呼ばれる grade s の $\mathcal{Q}$ の射 $\xi_{s,X} : X \rightarrow \alpha_s X$ で,

$$\xi_{e,X} = \text{id}_X \quad (X: \mathcal{Q} \text{ の対象})$$

$$\xi_{s,X'} \circ v = \alpha_s(v) \circ \xi_{s,X} \quad (s \in G, v: X \rightarrow X' \text{ } \mathcal{C} \text{ の射})$$

$$\xi_{s,\alpha_t X} \circ \xi_{t,X} = (\mu_{s,t})_X \circ \xi_{st,X} \quad (s, t \in G, X: \mathcal{Q} \text{ の対象})$$

を満足するものが定まる. これらの射が G -category と opfibered
 category over G を結ぶ役割を果します. $\mathcal{Q}_1$ が category
 over G , $\mathcal{Q}_2$ が opfibered category over G のとき, $\mathcal{Q}_1$ から $\mathcal{Q}_2$
 への cartesian functors を対象とする category を
 $\text{Cart}_G(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ と表す. $\mathcal{Q}_1$ が groupoid ならば, 単に functors
 over G ですが, 同じ記号を用いる.

opfibered category $\pi: \mathcal{Q} \rightarrow G$ に対し, その representation
category を

$$\text{Rep } \mathcal{Q} := \text{Cart. Sec}(\mathcal{Q} \rightarrow G) = \text{Cart}_G(G, \mathcal{Q})$$

と定義する. さらに, 部分群 $H < G$ に対して,

$$\text{Rep}(H, \mathcal{Q}) := \text{Cart. Sec}(H \times_{\mathcal{G}} \mathcal{Q} \rightarrow H) = \text{Cart}_{\mathcal{G}}(H, \mathcal{Q})$$

と定義する. $F: \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_2$ が cartesian functor of opfibered categories over G ならば, 自然に

$$\text{Ker } F : \text{Ker } \mathcal{Q}_1 \rightarrow \text{Ker } \mathcal{Q}_2$$

$$\text{Rep}(H, F) : \text{Rep}(H, \mathcal{Q}_1) \rightarrow \text{Rep}(H, \mathcal{Q}_2)$$

が誘導されることに注意する. limit categories に関しては,

定理 1.2 $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ G -category, $\mathcal{Q} \rightarrow G$ を対応する opfibered category とするとき, $\exists$ category 同値

$$\Delta_G \mathcal{C} \simeq \text{Rep } \mathcal{Q}.$$

$H(<G)$ に制限して, $\Delta_H \mathcal{C} \simeq \text{Rep}(H, \mathcal{Q})$.

representation category $\text{Rep}(H, \mathcal{Q})$ の対象は, 対 (X, φ) X は $\mathcal{Q}$ の ($\mathcal{C}$ の) 対象, φ は群準同型 $H \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{Q}}(X)$ で, $\varphi(s)$ は grade s の射となるもの, として表せる. (λ_s) と φ を $\lambda_s \circ \varphi(s) = \xi_{s,X}$ によって対応させると, $\alpha_s(\lambda_t) \circ \lambda_s = (\mu_{s,t})_X \circ \lambda_{st} \iff \varphi(st) = \varphi(s) \circ \varphi(t)$ となり, category 同値が導かれる.

$\text{Opfib}(G)$ と $\text{Split}(G)$ の関係は, $\exists$ adjoint

$$\text{Split}(G) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Grothendieck 構成}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\text{Giraud 構成}} \end{array} \text{Opfib}(G)$$

(Giraud[3] 参照). opfibered category $\mathcal{Q} \rightarrow G$ with the unique fiber $\mathcal{C}$ に対し, Giraud 構成により functor

$$\alpha_G : G \rightarrow \mathcal{C}at, \cdot \mapsto \mathcal{C}_G := \text{Cart}_G(G/\cdot, \mathcal{Q})$$

が対応し, さらに α_G に対応する opfibered category を $\mathcal{Q}_G \rightarrow G$ と書くと, 自然な functor $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}_G$ は G 上の fiber 同値になる. 特に, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}_G$ (fiber ゆえ), $\Delta_G \mathcal{C}$ と $\Delta_G \mathcal{C}_G$ (cartesian sections に同値ゆえ) は category 同値になる. 一般に,

命題 1.3 $(\mathcal{C}, d_s, \mu_{s,t})$ G -category, $\mathcal{Q} \rightarrow G$ 対応する opfibered category, $\mathcal{C}_G = \text{Cart}_G(G/\cdot, \mathcal{Q})$ とおくと, $H < G$ に対し

$$\Delta_H \mathcal{C} \approx \Delta_H \mathcal{C}_G.$$

最後に, $\mathcal{C}_G$ を usual G -category と考えて, H -fixed subcategory $(\mathcal{C}_G)^H$ に関する結果を述べる.

命題 1.4 $H < G$ のとき, 自然な functor (§3 参照)

$$\text{Cart}_G(\underline{G/H}, \mathcal{Q}) \rightarrow \text{Cart}_G(\underline{G/\{e\}}, \mathcal{Q}) = \text{Cart}(G/\cdot, \mathcal{Q})$$

は $(\mathcal{C}_G)^H$ の上への category 同型になる.

命題 1.5 $\exists$ adjoint pair of functors

$$\text{Cart}_G(\underline{G/H}, \mathcal{Q}) \xrightleftharpoons{\perp} \text{Cart}_G(H, \mathcal{Q}).$$

1.4, 1.5 は両辺の categories を explicit に書いて対応を与えればよい. (詳細略) 1.5 において $H = G$ or $\{e\}$ のときは category 同値になることに注意する. 1.2~1.5 を結べば,

定理 1.6 $\exists$ homotopy 同値

$$\Delta_H \mathcal{C} \simeq (\mathcal{C}_G)^H.$$

§ 2. Exact G-categories

structure をもった G-category の定義は, pseudo functor $G \rightarrow \mathcal{Cat}$ の $\mathcal{Cat}$ の部分を structure をもった small categories の 2-category に取り換えることにより定義される. 特に,

定義 2.1 $G\text{-category } (\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ が additive (resp. abelian resp. exact) G-category であるとは, $\mathcal{C}$ が additive (resp. abelian resp. exact) category で, 各 $s \in G$ について α_s が additive (resp. exact resp. exact) functor となるときいう.

この場合, $\mathcal{Cat}$ で考えた limit category が structure をもったときの limit category にもなる.

命題 2.2 $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ を additive (resp. abelian resp. exact) G-category, $\mathcal{O} \rightarrow G$ を対応する opfibered category, $\mathcal{E} \rightarrow G$ を任意の groupoid over G とするとき, $\text{Cart}_G(\mathcal{E}, \mathcal{O})$ は自然に additive (resp. abelian resp. exact) category になる.

coproduct, kernel, cokernel, exact sequence など は $\mathcal{E}$ の各対象上 そうなるものとして定義する. 証明は公理を順々に確かめていけばよい. この命題は, G を任意の category に, $\mathcal{E}$ をすべての射が cartesian 射である任意の over category におきかえても成立することに注意する.

系 2.3 命題と同じ仮定の下, $H (< G)$ に対して,

$\Delta_H \mathcal{C}, \text{Rep}(H, \mathcal{Q}), \Delta_H \mathcal{C}_G, (\mathcal{C}_G)^H$ はすべて自然に additive (resp. abelian resp. exact) category になる.

さて, exact G -category に対し, Quillen の Q 構成との関係を述べよう.

定理 2.4 $(\mathcal{C}, \alpha_s, \mu_{s,t})$ を G -category, $\mathcal{Q} \rightarrow G$ を対応する opfibered category, $\mathcal{E} \rightarrow G$ を任意の G 上の groupoid とするとき, $Q\mathcal{C}$ は G -category の構造をもち, 対応する opfibered category を $Q_f \mathcal{Q}$ と書くと, $\exists$ category 同値

$$Q \text{Cart}_G(\mathcal{E}, \mathcal{Q}) \approx \text{Cart}_G(\mathcal{E}, Q_f \mathcal{Q}).$$

$\mathcal{E}$ が groupoid を考慮して, $Q\mathcal{C}$ における同型は $\mathcal{C}$ の同型に等しい事に注意すれば容易に証明できる.

系 2.5 定理と同じ仮定の下, $H(<G)$ に対して,

$$\Delta_H Q\mathcal{C} \approx Q \Delta_H \mathcal{C}, \quad Q \text{Rep}(H, \mathcal{Q}) \approx \text{Rep}(H, Q_f \mathcal{Q}), \\ (Q\mathcal{C}_G)^H \approx Q(\mathcal{C}_G)^H.$$

前二者は定理において $\mathcal{E} = H$ と取る. 後者は,

$$(Q\mathcal{C}_G)^H = (Q \text{Cart}_G(G/\cdot, \mathcal{Q}))^H \approx (\text{Cart}_G(G/\cdot, Q_f \mathcal{Q}))^H \\ \approx \text{Cart}_G(\underline{G/H}, Q_f \mathcal{Q}) \approx Q \text{Cart}_G(\underline{G/H}, \mathcal{Q}) \\ \approx Q(\text{Cart}_G(G/\cdot, \mathcal{Q}))^H = Q(\mathcal{C}_G)^H.$$

§ 3 Induction theory

この § では, 群 G は有限群又は profinite 群とし, finite G -sets と G -maps の category $\mathcal{S}_G^f$ を考える.

S_G^f の射 $\varphi: S \rightarrow T$ に対し, functor

$$\underline{\varphi}: \underline{S} \rightarrow \underline{T} \quad (x \xrightarrow{g} x') \mapsto (\varphi(x) \xrightarrow{g} \varphi(x')) \quad (gx = x')$$

が対応する. $(\mathcal{C}, d_s, \mu_{s,t})$ を exact G -category, $\mathcal{Q} \rightarrow G$ を対応する opfibered category とすると, 命題 2.2 より

$$\text{Rep}(S, \mathcal{Q}) := \text{Cart}_G(\underline{S}, \mathcal{Q}) = \text{Cart. Sec}(\underline{S} \times_{G/G} \mathcal{Q} \rightarrow \underline{S})$$

は exact category になる. S_G^f の射 $\varphi: S \rightarrow T$ に $\text{Rep}(S, \mathcal{Q})$ と $\text{Rep}(T, \mathcal{Q})$ の間の 2 つの exact functors が対応する.

$$\text{Rep}(T, \mathcal{Q}) \xrightleftharpoons[\varphi^*]{\varphi_*} \text{Rep}(S, \mathcal{Q})$$

$$\varphi_*(\underline{T} \xrightarrow{\zeta} \mathcal{Q}) = (\underline{S} \xrightarrow{\zeta \circ \underline{\varphi}} \mathcal{Q})$$

$$\varphi^*(\underline{S} \xrightarrow{\zeta} \mathcal{Q})(x) = \bigoplus_{z \in \varphi^{-1}(x)} \zeta(z), \quad \varphi^*(\zeta)(x \xrightarrow{g} x') = \bigoplus_{z \in \varphi^{-1}(x)} \zeta(z \xrightarrow{g} gz)$$

φ_* が restriction, φ^* が induction である. res, ind の構成は, G の有限指数の部分群 $H \subset K$ に対して

$$\text{Rep}(H, \mathcal{Q}) \xrightleftharpoons[\text{ind}]{\text{res}} \text{Rep}(K, \mathcal{Q})$$

を表現達の res, ind の如く定義することによっても得られる. この定義が上の定義と natural isomorphism を除いて同値であることも示せる.

いくつかの性質を証明なしで述べる.

命題 3.1 1) S_G^f の射の合成 $S \xrightarrow{\varphi} T \xrightarrow{\psi} U$ について

$$(\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*, \quad (\psi \circ \varphi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$$

2) $\text{Rep}(S \amalg T, \mathcal{Q}) \simeq \text{Rep}(S, \mathcal{Q}) \times \text{Rep}(T, \mathcal{Q})$

3) (pull-back formula)

pull-back diagram $\begin{array}{ccccc} S_1 \times_T S_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & S_2 & & \\ \gamma_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 & & \\ S_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & T & & \end{array}$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}(S_1 \times_T S_2, \mathcal{Q}) & \xrightarrow{\gamma_2^*} & \text{Rep}(S_2, \mathcal{Q}) \\ \gamma_{1*} \uparrow & & \uparrow \varphi_{2*} \\ \text{Rep}(S_1, \mathcal{Q}) & \xrightarrow{\varphi_1^*} & \text{Rep}(T, \mathcal{Q}) \end{array}$$

は nat. isom. を除いて可換.

1) ~ 3) は, $\text{Rep}(-, \mathcal{Q}) : \mathcal{S}_G^f \rightarrow (\text{exact categories})$ の Mackey 性を表す.

$\mathcal{C}_i$ を exact G -categories, $\mathcal{Q}_i \rightarrow G$ を対応する optfibered categories ($i = 1, 2, 3$). exact pairing $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$ は pairing $\mathcal{Q}_1 \times_G \mathcal{Q}_2 \rightarrow \mathcal{Q}_3$ over G を定義し, $\mathcal{S}_G^f$ の任意の対象 S に対して, exact pairing

$$\text{Rep}(S, \mathcal{Q}_1) \times \text{Rep}(S, \mathcal{Q}_2) \rightarrow \text{Rep}(S, \mathcal{Q}_3)$$

を誘導する.

命題 3.2 (projection formula) $\mathcal{S}_G^f$ の射 $\varphi : S \rightarrow T$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}(T, \mathcal{Q}_1) \times \text{Rep}(S, \mathcal{Q}_2) & \xrightarrow{\varphi_* \times 1} & \text{Rep}(S, \mathcal{Q}_1) \times \text{Rep}(S, \mathcal{Q}_2) \\ \downarrow 1 \times \varphi^* & & \downarrow \text{pairing} \\ & & \text{Rep}(S, \mathcal{Q}_3) \\ & & \downarrow \varphi^* \\ \text{Rep}(T, \mathcal{Q}_1) \times \text{Rep}(T, \mathcal{Q}_2) & \xrightarrow{\text{pairing}} & \text{Rep}(T, \mathcal{Q}_3) \end{array}$$

は nat. isom. を除いて可換.

参考文献

- [1] W.N. Dress - A. O. Kuku, A convenient setting for equivariant higher algebraic K-theory, Springer L.N. 966 (1982) 59 - 68
- [2] Z. Fiedorowicz - H. Hauschild - J. P. May, Equivariant algebraic K-theory, Springer L.N. 967 (1982) 23-80
- [3] J. Giraud, Méthode de la descente, Bull. Soc. Math. France, Mém. n° 2 (1964)
- [4] J.W. Gray, Fibered and cofibered categories, Proc. Conf. Categorical Algebra, Springer (1966) 21-83
- [5] J. P. May, Pairings of categories and spectra, J. Pure Appl. Algebra 19 (1980) 259 - 282
- [6] M. Niwa, Relations between various notions of G-categories, Mem. Fac. Educ. Shiga Univ. 35 (1985) 13-18
- [7] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, Springer L.N. 341 (1973) 85-147
- [8] N.S. Rivano, Catégories Tannakiennes, Springer L.N. 265 (1972)
- [9] K. Shimakawa, A note on equivariant algebraic K-theory
- [10] S.G.A. 1, Springer L.N. 224 (1971) Exposé VI

- [11] R. Thomason, The homotopy limit problem, Contemporary Math. 19 (1983) 407-419
- [12] R. Thomason, Algebraic K-theory and étale cohomology, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 18 (1985) 437-552