

Kirchberg の仕事の紹介

伊藤 隆 (群馬大学・教育)

1 はじめに

題名から多くの方が連想する話は、 C^* -環の分類論であると思われる。が、数理研で話させていただいたとおり、Kirchberg の preprint 「The classification of purely infinite C^* -algebras using Kasparov's theory」 [18] の中の 2 つの主定理、Theorem A, Theorem B のうちの A の紹介を行う。

Theorem A の内容を聞いたのは、昨年 (1995 年 6 月) Fields Institute であったが、Kirchberg は、その前年 1994 年の暮れの日付のついた preliminary version (手持ちのもの draft 3) の中に証明なしで、述べている。現在、Fields Institute の Lecture note [25] や Bhat, Osaka が証明を補った note [3] があるが、Kirchberg 自身が省略なしに述べたものはないと思われる。

そこで、[3], [25] 及び [23] を参考にしながら、そのアウトラインを追うことにする。[3] のコピーを送ってくれた大坂氏に感謝する。

その Theorem A とは、次の 2 つである。

Theorem A

(i) Separable C^* -環 A が O_2 の部分 C^* -環であるための必要かつ十分条件は、 A が exact なことである。

(ii) Separable unital C^* -環 A が、 O_2 の部分 C^* -環であり、 O_2 からの条件付き期待値の range であるための必要かつ十分条件は、 A が nuclear なことである。

ここで、 O_2 は、2 generator の Cuntz 環。(i.e. $s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1$ をみたす isometry s_1, s_2 で生成された C^* -環 [8])

2 Exact C^* -環

Exact C^* -環の定義は、Kirchberg cf.[13] によって 70 年代後半に与えられた。

Definition 1 C^* -環 A が exact であるとは、任意の C^* -環からなる short exact sequence (i.e. 任意の C^* -環 B と、その閉イデアル J)

$$0 \rightarrow J \rightarrow B \rightarrow B/J \rightarrow 0$$

に対し、

$$0 \rightarrow A \otimes J \rightarrow A \otimes B \rightarrow A \otimes B/J \rightarrow 0$$

が exact であるときをいう。(i.e. カテゴリーの言葉で、functor $A \otimes$ が exact であるとき A を exact と呼ぶ。)

ここで、 $\otimes$ は、minimal C^* -tensor product、 $\otimes_{\max}$ を maximal C^* -tensor product とする。

Remark 2 Definition 1 で $\otimes$ を全て $\otimes_{\max}$ に置き換えると任意の C^* -環 A で常に成立する。(i.e. $A \otimes_{\max}$ は、常に exact な functor)

定義からすぐにわかる事として、

Fact 1 Nuclear C^* -環は、exact である。

Exact C^* -環の最も良い性質として、

Fact 2 Exact C^* -環の C^* -部分環は、exact である。

Highly nontrivial な事として、

Fact 3 Exact C^* -環の quotient は、exact である [15]。

inductive limit、直和、minimal tensor について閉じていることは、明らかだが、extension については閉じていない [14]。

定義は [1], [7], [10], [23] 等を見てもらうこととして、以下の事が知られている。

$$\text{Nuclear} \xrightarrow{(1)} \text{CBAP} \xrightarrow{(2)} \text{PropertyS} \xrightarrow{(3)} \text{Exact}$$

$$\text{Exact} \Leftrightarrow \text{PropertyC} \Leftrightarrow \text{PropertyC}' \Leftrightarrow \text{Nuclearly embeddable}$$

$$\text{Exact} \xrightarrow{(4)} \text{Local reflexive} \Leftrightarrow \text{PropertyC}'' \xrightarrow{(5)} \text{任意}$$

(1) の逆が成立しない例として $C_r^*(F_n)$, ($2 \leq n \leq \infty$)、(5) の逆が成立しない例として $C^*(F_n)$, ($2 \leq n \leq \infty$)、 $B(H)$, $C^*(SL(n, Z))$ ($n \geq 3$) がある。(2), (3), (4) の逆の成立は open である。

3 Busby diagram の構成

Theorem A (i) の埋め込みを構成するために次の事実を必要とする。

Theorem 3 cf.[15] A が separable exact C^* -環ならば、 O_2 の C^* -部分環 E と E の閉イデアル D で次の (i), (ii) を満たすものが存在する。

(i) D は O_2 の essential hereditary 部分環である。

(ii) $E/D \cong A$ 。

これを導くために Glimm による nontype I C^* -環の特徴付け cf.[19] — Nontype I C^* -環は、CAR-環 $M_{2\infty}$ を subquotient としてもつ — を O_2 に適応する。即ち

$$O_2 \supset \exists L \text{ closed left ideal};$$

$$O_2 = N(L) + L + L^*, N(L)/L \cap L^* \cong M_{2\infty}, \text{ここで、} N(L) = \{x \in O_2 | Lx + Lx^* \subset L\}$$

さらに、Kirchberg による exact C^* -環の特徴付け [15] — Exact C^* -環は、 $M_{2\infty}$ の subquotient — 即ち

$$M_{2\infty} \supset \exists C \triangleright \exists J; C/J \cong A$$

をあわせて

$$O_2 \supset N(L) \xrightarrow{\pi} N(L)/L \cap L^* \cong M_{2\infty} \supset C \triangleright J$$

を得る。そこで、

$$E = \{x \in N(L) | \pi(x) \in C\}, D = \{x \in N(L) | \pi(x) \in J\}$$

とおけばよい。

さて、このとき Brown の定理 [5] — separable C^* -環 A の full hereditary 部分環は、 A と stable 同型 — より $O_2 \otimes K \cong D \otimes K$

さらに、Zhang の定理 [20] — Simple purely infinite C^* -環は、unital か stable — より $D \cong D \otimes K$

よって、 $D \cong O_2 \otimes K$ であるから、次の Busby diagram [6], cf.[24] を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & D & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & A \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau_E \\ 0 & \rightarrow & O_2 \otimes K & \rightarrow & M(O_2 \otimes K) & \xrightarrow{\pi} & M(O_2 \otimes K)/O_2 \otimes K \rightarrow 0 \end{array}$$

Effros-Haagerup の Lifting Theorem [10] — E が exact で D が nuclear ならば、 $\beta\theta = id_A$ となる completely positive map θ が存在する — より、この $\theta : A \rightarrow E \subset O_2$ を $*$ -homomorphism に取り替えられればよい。

さらに、short exact sequence

$$0 \rightarrow D \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} A \rightarrow 0$$

が、split (i.e. $\beta\gamma = id_A$ となる $*$ -homomorphism γ が存在する。) することと Busby invariant τ_E が liftable (i.e. $\eta\pi = \tau_E$ となる $\eta : A \rightarrow M(O_2 \otimes K)$ が存在することが同値なので、 τ_E が liftable であれば、Theorem A (i) の証明は終わる。

4 Ext(D, A)

D を stable (i.e. $D \cong D \otimes K$) とする。2つの extension

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow B_i \longrightarrow A \longrightarrow 0, \quad i = 1, 2$$

に対し、Busby invariant

$$\tau_i : A \longrightarrow M(D)/D \quad i = 1, 2$$

が strongly equivalent (i.e. $\tau_1 \approx \tau_2$) であるとは、 $M(D) \ni u$ unitary が存在して、

$$\tau_1(x) = \pi(u)\tau_2(x)\pi(u)^*$$

であるときをいう。

$\text{Hom}(A, M(D)/D) \ni \phi, \psi$ が equivalent (i.e. $\phi \sim \psi$) であるとは、liftable な $\tau_1, \tau_2 \in \text{Hom}(A, M(D)/D)$ が存在して、

$$\phi \oplus \tau_1 \approx \psi \oplus \tau_2$$

であるときをいう。ここで、 $\oplus$ は、 $M(D) \ni s_1, s_2$ ($s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1$) を用いて、

$$\tau_1 \oplus \tau_2(x) = \pi(s_1)\tau_1(x)\pi(s_1)^* + \pi(s_2)\tau_2(x)\pi(s_2)^*$$

で定義されている。

Definition 4

$$\text{Ext}(D, A) = \text{Hom}(A, M(D)/D) / \sim$$

$$\text{Ext}(D, A)^{-1} = \{\text{Ext}(D, A) \text{ の invertible element 全体}\}$$

5 KK- 群, Wyle von-Neumann Th

Kasparov の Stinespring type Theorem [11] より、

$$\text{Ext}(D, A)^{-1} = \{\text{cp-liftable な class 全体}\}$$

と言い換えることが出来るので、前出の Effros-Haagerup Lifting Theorem より、 $[\tau_E] \in \text{Ext}(D, A)^{-1}$ である。

さらに、

Theorem 5[12]

$$\text{Ext}(D, A)^{-1} = KK^1(D, A)$$

であり、 $KK^1(D, A)$ は homotopy invariant である。

今、 $D = O_2 \otimes \mathbf{K}$ であり、 $O_2 \otimes \mathbf{K}$ 上 id と $id \oplus id$ は homotopic [9] (i.e. $x \sim_h s_1 x s_1^* + s_2 x s_2^* \quad \forall x \in O_2 \otimes \mathbf{K}$) なので、

$$\text{Ext}(O_2 \otimes \mathbf{K}, A)^{-1} \ni [\tau_E]$$

に対し、 $[\tau_E] = [\tau_E \oplus \tau_E] = 2[\tau_E]$ 。よって、

$$[\tau_E] = 0$$

Remark 6 $O_n, (n \geq 3)$ のときも、 $(n-1)[\tau_E] = 0$ は、全く同じ議論で得られるが、 $[\tau_E] = 0$ はいえない。ここで、 $n = 2$ が本質的にきいてくる。

したがって、liftable な $\tau_1, \tau_2 \in \text{Hom}(A, M(O_2 \otimes K)/O_2 \otimes K)$ が存在して、 $\tau_E \oplus \tau_1 \approx \tau_2$ 。

τ_1 の lifting を $\hat{\tau}_1$ とし σ による E の像を C とすると $\varphi = \hat{\tau}_1 \tau_E^{-1} \pi$ は、次の Generalized Weyl-von Neumann Theorem [18] の仮定をみたす。

Theorem 7 A を separable simple purely infinite C^* -環とし、 C を separable unital な $M(A \otimes K)$ の C^* -部分環であるとする。このとき、 $\varphi: C \rightarrow M(A \otimes K)$ が unital completely positive で $\varphi(C \cap (A \otimes K)) = \{0\}$ ならば、次を満たす unitary の列 $\{u_n\} \in M(A \otimes K)$ が存在する。

- i) 任意の $c \in C$ に対し、 $c \oplus \varphi(c) - u_n^* c u_n \in A \otimes K$
- ii) 任意の $c \in C$ に対し、 $\|c \oplus \varphi(c) - u_n^* c u_n\| \rightarrow 0$

よって、unitary $u \in M(O_2 \otimes K)$ で

$$\pi(c) \oplus \pi(\varphi(c)) = \pi(u)^* \pi(c) \pi(u), \quad c \in C$$

となるものが、存在する。このとき、

$$\pi(u)^* \tau_E(a) \pi(u) = \tau_E(a) \oplus \tau_1(a), \quad a \in A$$

となるので、

$$\tau_E \approx \tau_E \oplus \tau_1 \approx \tau_2$$

より τ_E は liftable となり Theorem A (i) が証明された。

6 Nuclear C^* -環

Theorem A (ii) における条件付き期待値を構成するために次の事実を必要とする。

Theorem 8 cf.[15] A が unital separable nuclear C^* -環ならば、 O_2 の左閉イデアル L で次の (i), (ii) を満たすものが存在する。

- (i) $L \cap L^*$ は O_2 の essential hereditary 部分環である。
- (ii) $N(L)/L \cap L^* \cong A$ 。

これを導くために、前出の Glimm による nontype I C^* -環の特徴付け、即ち

$$O_2 \supset \exists L_1 \text{ closed left ideal};$$

$$O_2 = N(L_1) + L_1 + L_1^*, N(L_1)/L_1 \cap L_1^* \cong M_{2\infty}, N(L_1) = \{x \in O_2 | L_1 x + L_1 x^* \subset L_1\}$$

さらに、Kirchberg による nuclear C^* -環の特徴付け [15] 即ち

$$M_{2\infty} \supset \exists L_2 \text{ left closed ideal}; M_{2\infty} = N(L_2) + L_2 + L_2^*, N(L_2)/L_2 \cap L_2^* \cong A$$

をあわせて

$$O_2 \supset N(L_1) \xrightarrow{\rho} N(L_1)/L_1 \cap L_1^* \cong M_{2\infty} \supset N(L_2) \longrightarrow N(L_2)/L_2 \cap L_2^* \cong A$$

を得る。

$$D = \rho^{-1}(L_2), \quad L = \overline{O_2 D}$$

とおくと、求める short exact sequence

$$0 \rightarrow L \cap L^* \rightarrow N(L) \xrightarrow{\beta} A \rightarrow 0$$

を得る。

左閉イデアル L に対応する closed projection を $q \in O_2^{**}$ とすると (i.e. $L = O_2^{**}(1 - q) \cap O_2$)、

$$N(L)/L \cap L^* \cong q O_2^{**} q \cap O_2$$

より、

$$\phi : O_2 \longrightarrow A \quad x \longmapsto q x q$$

が定義でき、Theorem A (i) と同様にして得られる β の right inverse を θ とすると (i.e. $\beta\theta = id_A$)、求める条件付き期待値 $E(x) = \theta\phi(x)$ が得られる。

参考文献

- [1] R.J Archbold and C.J.K. Batty, *C^* -tensor norms and slice maps*, J. London Math. Soc. **22** (1980), 127–138.
- [2] W. Arveson, *Notes on extensions of C^* -algebras*, Duke Math. J. **44** (1977), 329–355.
- [3] R. Bhat and H. Osaka, *Introduction to the classification of purely infinite simple C^* -algebras*, preprint.
- [4] B. Blackadar, *K -theory for operator algebras*, Springer-Verlag, 1986.
- [5] L.G. Brown, *Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C^* -algebras*, Pacific J. Math. **71** (1977), 335–348.

- [6] R.C. Busby, *Double centralizers and extensions of C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 79–99.
- [7] J.D. Canniere and U. Haagerup, *Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups*, Amer. J. Math. **107** (1985), 455–500.
- [8] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 173–185.
- [9] J. Cuntz, *K -theory for certain C^* -algebras*, Ann. of Math. **113** (1981), 181–197.
- [10] E.G. Effros and U. Haagerup, *Lifting problems and local reflexivity for C^* -algebras*, Duke Math. J. **52** (1985), 103–128.
- [11] G.G. Kasparov, *Hilbert C^* -module: theorems for Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory **4** (1980), 133–150.
- [12] G.G. Kasparov, *The operator K -functor and extensions of C^* -algebras*, Math. USSR Izvestija **16** (1981), 513–572.
- [13] E. Kirchberg, *The Fubini theorem for exact C^* -algebras*, J. Operator Theory **10** (1983), 3–8.
- [14] E. Kirchberg, *On restricted perturbations in inverse images and a description of normalizer algebras in C^* -algebras*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 1–34.
- [15] E. Kirchberg, *On subalgebras of CAR-algebras*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 35–63.
- [16] E. Kirchberg, *On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^* -algebras*, Invent. Math. **112** (1993), 449–489.
- [17] E. Kirchberg, *Commutants of unitaries in UHF algebras and functorial properties of exactness* J. reine angew. Math. **452** (1994), 39–77.
- [18] E. Kirchberg, *The classification of purely infinite C^* -algebras using Kasparov's theory*, preprint.
- [19] G.K. Pedersen, *C^* -algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.
- [20] S. Zhang, *A property of purely infinite simple C^* -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 717–720.
- [21] D. Voiculescu, *A non-commutative Weyl-von Neumann theorem*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **21** (1976), 97–113.

- [22] S. Wassermann, *Subquotients of UHF C^* -algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **115** (1994), 489–500.
- [23] S. Wassermann, *Exact C^* -algebras and related topics*, Lecture notes series **19** Global Analysis Research Center, Seoul Univ. 1994.
- [24] N.E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^* -algebras*, Oxford Univ. Press 1993.
- [25] *Lectures on the classification of simple purely infinite C^* -algebras*, Fields Institute 1995.