

Association schemes and Spin models

坂内英一 述

野見山栄二、藤川裕子（九大・理）記

1 Introduction

Spin model は Jones が (Pacific.J.Math.1989 [15]) で 定義した概念であるが、ここではつぎのことについて introductory な説明をこころみた。

1. Jones [15], Jaeger [14] に従って、spin model の定義と、それがどのようにして link invariant を導くかの解説、また association scheme との関連についての 解説
2. 宗政-綿谷 [18] による generalized spin model の導入の解説、更に坂内-坂内 [5] による一般化である generalized generalized spin model の概念の導入。
3. この方向での新しいいくつかの仕事についての解説。

なお講演者によるより新しい introductory な解説として、数学 45 巻 (1993)55-75, に発表された論説:代数的組合せ論—アソシエーションスキームの最近の話題—も参照してください。

2 Spin model

定義 2.1 有限集合 X と、以下の条件を満たす関数 $w_+, w_- : X \times X \rightarrow C$ が存在するとき、 (X, w_+, w_-) を *Spin model with loop variable D* という。

但し、 $D^2 = |X| = n$

(0) (symmetric condition)

$$w_+(\alpha, \beta) = w_+(\beta, \alpha)$$

$$w_-(\alpha, \beta) = w_-(\beta, \alpha)$$

(1) $w_+(\alpha, \beta)w_-(\alpha, \beta) = 1$

(2) $\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x)w_-(x, \beta) = n\delta_{\alpha\beta}$

(3) (star-triangle relation)

$$\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x)w_+(\beta, x)w_-(\gamma, x) = Dw_+(\alpha, \beta)w_-(\beta, \gamma)w_-(\gamma, \alpha)$$

for any $\alpha, \beta, \gamma \in X$

これを、行列 $W_{\pm} = (w_{\pm}(\alpha, \beta))_{\alpha \in X, \beta \in X}$ のことばでいいかえると、

$$(0') \quad {}^tW_+ = W_+, \quad {}^tW_- = W_-$$

$$(1') \quad W_+ \circ W_- = J$$

$$(2') \quad W_+W_- = nI$$

$$(3') \quad W_+Y_{\beta\gamma} = Dw_-(\beta, \gamma)Y_{\beta\gamma}$$

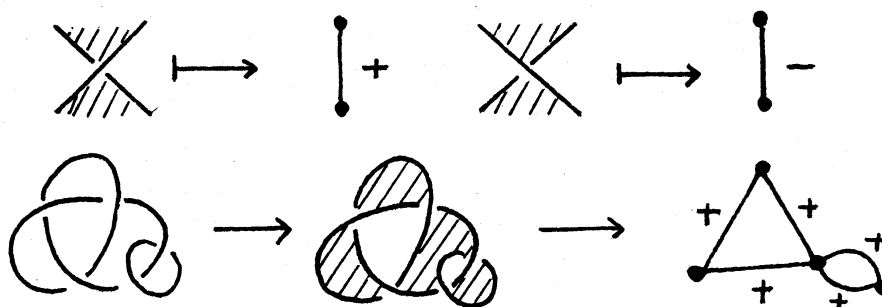
但し、 ${}^tW_{\pm}$ は $W_{\pm}$ の転置行列とし、演算 $\circ$ は Hadamard product、 J は全ての要素が 1 の $n \times n$ 行列、 I は n 次の単位行列とする。

また $Y_{\beta\gamma} = (w_+(\beta, x)w_-(\gamma, x))_{x \in X}$ は n 次のベクトル。

Spin model が存在すれば、それから link invariant が以下のようにして作られることが、Jones によって示された。

1. L を向きづけられていない link diagram とする。

2. L の領域の色分けを黒と白で無限領域は白、隣接する領域は異なるようにする。
3. 黒い領域を頂点、交差点を辺とし、さらに各辺に対して図のように符号を付けた signed graph をつくる。



4. state σ を L の頂点から X への写像とし、次で partition function を定義する。

$$Z_L := D^{-b(L)} \sum_{\sigma: \text{state}} \prod_{\text{edges}} w_{\pm}(\sigma(a), \sigma(b))$$

但し、 $b(L)$ は黒い領域の個数、 a, b は各辺の端点、 $\pm$ はその辺の符号とする。すると、 Z_L は、unoriented link diagram から C への写像となる。

定理 2.1 (Reidemeister) 有限回の Reidemeister moves I, II, III で移り合う 2 つの link diagrams は、同型である。

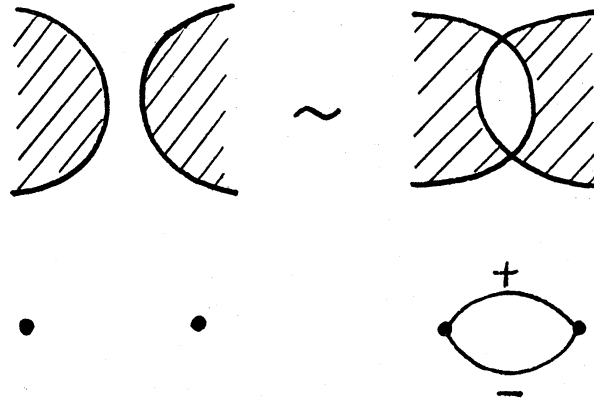
Reidemeister moves

I. $\approx$ $\approx$

II. $\approx$

III. $\approx$

事実 Z_L は、Reidemeister move II, III では不変



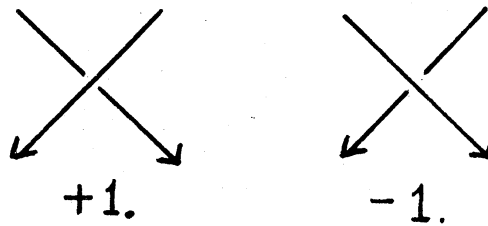
事実

$$Z(\text{loop}) = a^{-1} Z(\text{arc}) \quad (1)$$

(2)

$$Z(\text{loop}) = a Z(\text{arc}) \quad \text{for some } a \in C \quad (3)$$

oriented link diagram $\vec{L}$ の crossing に対して、図のように交差点 c に対して $\text{sign}(c)$ を定義する。



$$w(\vec{L}) := \sum_{c: \text{crossings}} \text{sign}(c)$$

$$R_{\vec{L}} := a^{-w(\vec{L})} Z_L$$

定理 2.2 R_L は、oriented link invariant である。

Spin model (X, w_+, W_-) が存在すれば、次のことが成り立つ。

$$1. w_+(\alpha, \alpha) = a \quad w_-(\alpha, \alpha) = a^{-1}$$

$$\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) = Da^{-1} \quad \sum_{x \in X} w_-(\alpha, x) = Da$$

但し、 $\alpha \in X$ は任意 $a \neq 0$

2.[Prop.2.16 in Jones [15]]

各 $z \in C$ に対して、 $\#\{(a, b) | w_+(a, b) = z\}$ は n の倍数である。

上の 1、2 は、組合せ論でよく知られた association scheme の性質に近く、自然に association scheme を用いて Spin model を作ることが考えられる。

3 Association scheme

定義 3.1 (Association scheme) 有限集合 X と、 X 上の $d+1$ 個の関係 $R_i (i = 0, 1, \dots, d)$ (すなわち R_i 達は、 $X \times X$ の部分集合) の組 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ で、つぎの条件 (i)-(iv) を満たすものを association scheme とよぶ。

$$(i) \quad R_0 = \{(x, x) | x \in X\}$$

$$(ii) \quad R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d = X \times X \text{ かつ } R_i \cap R_j = \phi \text{ if } i \neq j$$

$$(iii) \text{ 各 } i \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して, } {}^tR_i := \{(x, y) | (y, x) \in R_i\} \text{ と定義する}$$

$$\text{とき } {}^tR_i = R_{i'} \text{ for some } i' \in \{0, 1, \dots, d\}$$

$$(iv) \quad \forall i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ に対して } p_{ij}^k := \#\{z \in X | (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}$$

は、 $(x, y) \in R_k$ のもとで、 (x, y) のとり方によらず一定

更に次の条件 (v) を満たすものを、可換な *association scheme* と呼び、
条件 (vi) を満たすものを、対称な *association scheme* と呼ぶ。

$$(v) \ p_{ij}^k = p_{ji}^k \quad \text{for } \forall i, j, k$$

$$(vi) \ {}^tR_i = R_i \quad \text{for } \forall i$$

(対称な *association scheme* は可換な *association scheme* になることは直ちに分かる)

A_i を R_i に対する adjacency matrix とする。

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この時、 $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k$ が成り立ち $A_0, A_1, \dots, A_d$ で生成される $M_n(C)$ (複素数体 C 上の n 次完全行列環、ただし $n = |X|$) の subalgebra $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ を $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra と呼ぶ。このとき $\mathcal{A}$ は、 $d+1$ 個の primitive idempotents $E_0, E_1, \dots, E_d$ をもつ。このとき $E_0 = 1/nJ$ としても一般性を失わない。

$\mathcal{A}$ の 2 つの基底 $A_0, A_1, \dots, A_d$ と $E_0, E_1, \dots, E_d$ の変換行列 P, Q i.e.

$$(A_0, A_1, \dots, A_d) = (E_0, E_1, \dots, E_d)P$$

$$n(E_0, E_1, \dots, E_d) = (A_0, A_1, \dots, A_d)Q$$

とすると、 $PQ = QP = nI$ が成り立つ。

特に、 $P = \bar{Q}$ となるとき、 $\mathcal{X}$ は self-dual であるという。

• $d = 1$ の場合、Trivial association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1\})$

$A_0 = I, A_1 = J - I$ となり、 $W_+ = t_0 A_0 + t_1 A_1, D = -(t_1)^2 - (t_1)^{-2}, a = t_0 = -(t_1)^{-3}$ として出来る Spin model (Potts' model とよばれる) は、 $W_+ + \varepsilon W_- = (\varepsilon t_1 + t_1^{-1})(DI + \varepsilon J)$ を満たし、これからできる link invariant は Kauffman (実際には Jones) polynomial の特殊値である。

• $d = 2$ の場合の association scheme (すなわち strongly regular graph) からできる Spin model も、 $W_+ + \varepsilon W_- = (\varepsilon t_1 + t_1^{-1})(DI + \varepsilon J)$ を満たし、これからできる link invariant も Kauffman polynomial の特殊値になることが Jaeger によって示された。

ここで、strongly regular graph S に対して Spin model が存在する必要十分条件は、 S が locally strongly regular graph であること。

定理 3.1 (Jaeger [14])

- (1) $\langle W_+, J, \cdot \rangle \xrightarrow{\psi} \langle W_-, I, \circ \rangle$
 $W_+ \mapsto DW_-$
- (2) $\langle W_+, J, \cdot \rangle$ が Hadamard product に関して閉じているならば、
 - (i) $\langle W_+, J, \cdot \rangle$ は self-dual association scheme の Bose-Mesner algebra
 - (ii) $W_+ = \sum_{i=0}^d t_i A_i$ であれば $W_- = D \sum_{i=0}^d t_i E_i$

定理 3.2 (Jaeger) $\mathcal{X} = (X, \{R_i\})_{0 \leq i \leq d}$ を self-dual な association scheme とし $\mathcal{A}$ をその Bose-Mesner algebra とする
 $\mathcal{A}$ の元 W_+, W_- を $W_+ = \sum_{i=0}^d t_i A_i, W_- = D \sum_{i=0}^d t_i E_i$ とするとき (X, W_+, W_-) が Spin model となる必要十分条件は、

- (i) $PT = DT^-$
- (ii) $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ s.t. $t_i \neq t_j$, と $(\beta, \gamma) \in R_i$ に対して
 $E_j Y_{\beta\gamma} = 0$

である。

但し $T = {}^t(t_0, \dots, t_d), T^- = {}^t(t_0^{-1}, \dots, t_d^{-1})$

4 Spin model の一般化

定義 4.1 (generalized spin model) [Munemasa-Watatani [18]] 有限集合 X と以下の条件を満たす関数 $w_+, w_- : X \times X \rightarrow C$ が存在するとき

(X, w_+, w_-) を *generalized spin model* とよぶ。

- (1) $w_+(\beta, \alpha)w_-(\alpha, \beta) = 1$
 - (2) $\sum_{x \in X} w_-(\alpha, x)w_+(x, \beta) = n\delta_{\alpha\beta}$
 - (3) $\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x)w_+(x, \beta)w_-(x, \gamma) = Dw_+(\alpha, \beta)w_-(\beta, \gamma)w_-(\alpha, \gamma)$
for $\alpha, \beta, \gamma \in X$
- ただし $D^2 = n = |X|$

この *generalized spin model* から前と同様にして、*oriented link invariant* が作られる。

宗政-綿谷 [18] は $|X| = 3, 4, 5$ のときの例を作った。

坂内-坂内 [4] は、巡回群 $G = G_m (= Z_m)$ の group association scheme $\mathcal{X}(G_m)$ から *generalized spin model* が組織的に構成できることを示した。

定義 4.2 (generalized generalized spin model) [坂内-坂内 [5]] 有限集合 X と、次の条件を満たす関数 $w_i : X \times X \rightarrow C$ ($i = 1, 2, 3, 4$) が存在するとき (X, w_1, w_2, w_3, w_4) を *generalized generalized spin model* という。

- (1) $w_1(\alpha, \beta)w_3(\beta, \alpha) = 1$
 $w_2(\alpha, \beta)w_4(\beta, \alpha) = 1$
- (2) $\sum_{x \in X} w_1(\alpha, x)w_3(x, \beta) = n\delta_{\alpha\beta}$
 $\sum_{x \in X} w_2(\alpha, x)w_4(x, \beta) = n\delta_{\alpha\beta}$
- (3a) $\sum_{x \in X} w_1(\alpha, x)w_1(x, \beta)w_4(\gamma, x) = Dw_1(\alpha, \beta)w_4(\gamma, \alpha)w_4(\gamma, \beta)$
- (3b) $\sum_{x \in X} w_1(x, \alpha)w_1(\beta, x)w_4(x, \gamma) = Dw_1(\beta, \alpha)w_4(\alpha, \gamma)w_4(\beta, \gamma)$

oriented link diagram $\vec{L}$ から、前と同様に graph をつくり、辺に次のように方向と番号を対応させる。

partition function: $Z_L := D^{-b(L)} \sum_{\sigma: \text{state}} \prod_{a \rightarrow b} w_{n(a \rightarrow b)}(\sigma(a), \sigma(b))$
 $n(a \rightarrow b)$: a から b への辺の番号

このとき、この partition function は、Reidemeister move II, III で不変である。

- Generalized generalized spin model の特別な場合

(X, W_+, W_-) を generalized spin model とする。

$W_i = (w_i(\alpha, \beta))_{\alpha \in X, \beta \in X}$, $\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \{+, -\}$ とする。

W_1, W_2, W_3, W_4 のうちの2つは $\{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$ にあり、残りの2つが $\{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ にある場合を考える。

- (1) $W_1, W_2 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$, $W_3, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ のときを Jones type とよぶ。
- (2) $W_1, W_4 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$, $W_2, W_3 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ のときを Psuedo Jones type とよぶ。
- (3) $W_1, W_3 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$, $W_2, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ のときを Hadamard type とよぶ。

講演者の spin model に関する興味は、当時九大にいた河野氏が L.Kauffman を九大の談話会 (1991 年 11 月頃) によび、そのとき Jaeger の論文 [14] の preprint をもらったことに始まる。

self-dual な symmetric association scheme の上に新しい spin model が存在するのではないかと構成を試みたことに始まった。最初の出発点は、Hamming association scheme $H(d, q)$ 上の spin model の構成 (坂内-坂内-生田-川越 [7]) であり、ここでは Hamming association scheme の指標

表に対する modular invariance の決定 (坂内-坂内 [3]) が役に立った。また modular invariance を考えることは、cyclic 群上の (generalized) spin model の構成 (坂内-坂内 [4]) につながった。

またこれらは、野村 [19] の Hadamard グラフ上の spin model の構成の試みへ、影響を与えた。

Hamming association scheme $H(d, q)$ 上の spin model は、spin model のテンソル積が、また spin model になることから、完全グラフ K_q の d 個の直積から出来る spin model として直ちに得られること。また従って、その link invariant は Jones 多項式の d 剰になり新しい link invariant が生じないことも分かる。(de la Harpe-Jones によるコメント)。cyclic group 上の spin model の link invariant が一般的に何になるかはまだ計算されていないと思われる。[symmetric な場合 Goldschmidt-Jones [12], Kobayasi-Murakami-Murakami [17] により、また non-symmetric な場合の特別な例 $m = 3, 4, 5$ は川越謙一により計算されている。] 野村の spin model は Jones 多項式で区別できない 2 つの link を区別できることがわかり (Jones-野村)、その後はっきりした invariant の形は Jaeger により与えられた。(Jaeger [14] 参照)

generalized generalized spin model のいくつかの例は、坂内-坂内 [5] で与えられているが Hadamard 行列と関係する Hadamard type のものの例は山田により色々と与えられている。(これらの link invariants が何であるかは調べられていない)

なお、関連した結果としては、

- Attila Sali [9] により size の小さい spin model の分類が色々となされている。
- 生田卓也 [13] により、 $d = 2$ の non-symmetric association scheme 上の generalized spin model の非存在が証明されている。
- Balmaceda [1] により、 $d = 2$ の symmetric conference graph 上の spin model の分類の別証も与えられている。

なお、この京都の講演に触発されてのいくつかの新しい結果としては、

- symmetric association scheme 上に generalized spin model があればその association scheme は self- dual でなければならないこと。今まで association scheme 上の modular invariance を用いて spin model の構成を試みてきたが、spin model の存在が modular invariance を導くこと。(坂内-坂内-Jaeger により論文を準備中)
- 脇本実氏により、与えられた affine Lie algebra から、その表現論を用いて、新しい family としての spin model が (有限アーベル群上に) 構成されること。

参考文献

- [1] J.Balmaceda, On a Theorem of Jaeger, submitted to Mem.Fac.Kyushu Univ.
- [2] 坂内英一, 代数的組合せ論, 数学, 45(1993), 55-75.
- [3] E.Bannai and E.Bannai, Modular invariance of the character table of the Hamming association scheme $H(d, q)$, to appear in J. of Number Theory.
- [4] E.Bannai and E.Bannai, Spin models on finite cyclic groups, preprint.
- [5] E.Bannai and E.Bannai, Generalized generalized spin models, preprint.
- [6] E.Bannai and E.Bannai, Generalized spin models and association schemes, preprint.
- [7] E.Bannai, E.Bannai, T.Ikuta, and K.Kawagoe, Spin models constructed from the Hamming association schemes $H(d, q)$, (preprint, unpublished) (第 10 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 岐阜 (1992), 参照).

- [8] E.Bannai and T.Ito, Algebraic Combinatorics I: Association schemes, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.
- [9] E.Bannai, F.Jaeger and A.Sali, Classification of Small Spin Models, submitted to Mem.Fac.Kyushu.univ.
- [10] A.E.Brouwer, A.M.Cohen and A.Neumaier, Distance Regular Graphs, Springer-Verlag, 1989.
- [11] P.de la Harpe, Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's Higman-Sims model, preprint.
- [12] D.M.Goldschmidt and V.F.R.Jones, Metaplectic link invariants, Geom. Dedicata, **31**(1989), 165-191.
- [13] T.Ikuta, Non-existence of spin models corresponding to nonsymmetric association schemes of class 2 on $4m + 3$ vertices if $m \geq 1$, submitted to Mem.Fac.Kyushu univ.
- [14] F.Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata, **44**(1992), 23-52.
- [15] V.F.R.Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific. J. Math., **137**(1989), 311-334.
- [16] L.H.Kauffman, An invariant of regular isotopy, Trans. Amer. Math. Soc., **318** (1990), 417-471.
- [17] T.Kobayashi, H.Murakami and J.Murakami, Cyclotomic invariants for links, Proc. Japan Acad., **64** A(1988), 235-238
- [18] A.Mumemasa and Y.Watatani, Generalized spin models, in preparation.
- [19] K.Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, preprint.