

頂点作用素代数 V_L^+ の有理性について

大阪大学理学部 安部 利之 (Toshiyuki Abe)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

1 序

階数 1 の偶格子 $L = \mathbb{Z}\alpha$ に付随して得られる頂点作用素代数 V_L は, L の -1 -isometry から誘導される位数 2 の自己準同型写像をもつ. この自己準同型写像による V_L^+ の固定点全体 V_L^+ は V_L の部分頂点作用素代数の構造を持つ. 格子頂点作用素代数 V_L は有理的であることが知られているが, その部分頂点作用素代数 V_L^+ についても α の square length が “ $2 \times (\text{素数})$ ” の時には有理的となることを証明したので, そのことについて報告する.

2 定義

$(V, Y, 1, \omega)$ (以下単に V と書くこともある) を頂点作用素代数とする. ここで Y は V から $\text{End } V[[z, z^{-1}]]$ への線形写像で, 任意の $a \in V$ に対し, その Y による像を $Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$, $a_n \in \text{End } V$ とあらわすことにする. 特に $L_n = \omega_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおけば, $\{L_n\}$ は V 上に Virasoro 代数の表現を与え, V は固有値が整数の L_0 に関する固有空間の直和に分解している;

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \quad V_n = \{a \in V \mid L_0 a = na\}.$$

この V_n に属する元 a をウェイト n の斉次元といい, $n = \text{wt}(a)$ と書くことにする.

次に加群の定義について述べる.

定義 2.1. $(V, Y, 1, \omega)$ を頂点作用素代数とする. admissible V -加群 とは, 非負整数全体の集合 $\mathbb{N}$ で次数付けされたベクトル空間 $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ と線形写像

$$\begin{aligned} Y_M : V &\rightarrow (\text{End } M)[[z, z^{-1}]], \\ a &\mapsto Y_M(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^{-n-1}, \quad (a(n) \in \text{End } M) \end{aligned}$$

の組 (M, Y_M) で任意の $a, b \in V$ 及び $u \in M$ に対し次を満たすものである:

(1)

$$Y_M(a, z)v \in M((z)), \quad Y_M(1, z) = \text{id}_M,$$

(2) (Jacobi 恒等式).

$$\begin{aligned} &z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y_M(a, z_1) Y_M(b, z_2) - z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y_M(b, z_2) Y_M(a, z_1) \\ &= z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y_M(Y(a, z_0)b, z_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

(3) 任意の斉次元 $a \in V$ 及び $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$a(n)M_m \subset M_{\text{wt}(a)+m-n-1}.$$

admissible V -加群 M に対し, その部分加群 N は V の作用で不変な部分空間で M の次数付けによって N の次数付けを持つものとして定義される. また admissible V -加群は, 非自明な部分加群をもたない時, 既約であるといい, 既約な部分加群の直和で表されるとき, 完全可約であるという.

定義 2.2. 頂点作用素代数 V は, 任意の admissible V -加群が完全可約となる時, 有理的であるという.

頂点作用素代数 V が有理的ならば, その既約な admissible V -加群は同型を除いて有限個しかないことが知られている.

命題 2.3. V を頂点作用素代数とし, $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ を既約な admissible V -加群で, $M_0 \neq 0$ とする. この時一意的に $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して, 各 M_n は L_0 の固有値 $\lambda + n$ の固有空間となる. ここで, $Y_M(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とおいた.

この既約 admissible V -加群 M に対して一意的に決まる複素定数 λ を M の最低ウェイトと呼ぶことにする.

$$\mathcal{P}(V) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ はある既約 admissible } V\text{-加群の最低ウェイト} \}$$

とおく. V が有理的ならば, $\mathcal{P}(V)$ は有限集合である.

3 頂点作用素代数 V_L^+ とその既約 admissible 加群

ここでは, 階数 1 の偶格子 L に付随してえられる頂点作用素代数 V_L^+ とその既約 admissible 加群の構成および分類について簡単に述べる. 詳しくは, 構成については [FLM] を, 分類については [DN] を参照.

$L = \mathbb{Z}\alpha$ を階数 1 の正定値偶格子とし, $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2k, (k \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする. $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ とし, $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を交換関係が,

$$[X \otimes t^m, X' \otimes t^n] = m \delta_{m+n,0} \langle X, X' \rangle K, [K, \hat{\mathfrak{h}}] = 0$$

$(X, X' \in \mathfrak{h}, m, n \in \mathbb{Z})$ で定義される Lie 代数とする. この時, $\hat{\mathfrak{h}}$ は可換な部分 Lie 代数 $\hat{\mathfrak{h}}^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ を持つ. また L° を L の双対格子とすると, L° は $L^\circ = \bigcup_{i=0}^{2k-1} (\lambda_r + L)$ と coset 分解される. ここで, $\lambda_r = r\alpha/2k$ である. 今 $\mathbb{C}[L^\circ] = \bigoplus_{\beta \in L^\circ} \mathbb{C}e_\beta$ を L° の群環とし, 任意の L° の部分集合 M に対し

$$V_M = \bigoplus_{\beta \in M} S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes_{\mathbb{C}} e_\beta$$

とおく. この時, V_L は頂点作用素代数の構造を持ち, 任意の $0 \leq r \leq 2k-1$ に対し V_{λ_r+L} は互いに非同値な既約な admissible V_L -加群となる.

格子 L の -1 -isometry $L \rightarrow L, \beta \mapsto -\beta$ から自然に誘導される対称代数 $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ の位数 2 の自己同型写像を θ とかく. 更に V_L の線形自己同型写像を $u \otimes e_\beta \mapsto \theta(u) \otimes e_{-\beta}, (u \in$

$S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$, $\beta \in L^\circ$) で定義し, それを再び θ と書くことにする. 任意の V_L° の θ -不変な部分空間 W に対し, θ の ± 1 -固有空間をそれぞれ $W^\pm$ とあらわす. この時, V_L^+ は V_L の部分頂点作用素代数となり, $V_L^\pm$, $V_{\alpha/2+L}^\pm$ 及び V_{λ_r+L} , ($1 \leq r \leq k-1$) は既約 admissible V_L^+ -加群となる.

頂点作用素代数 V_L^+ は V_L の θ の固定点をとって構成されているので, θ -twisted V_L -加群から新しい既約 V_L^+ -加群が現れる. 次にその構成について説明する. $\hat{\mathfrak{h}}[-1] = \mathfrak{h} \otimes t^{1/2}\mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を交換関係が

$$[X \otimes t^m, X' \otimes t^n] = m \delta_{m+n,0} \langle X, X' \rangle K, \quad [K, \hat{\mathfrak{h}}[-1]] = 0$$

($X, X' \in \mathfrak{h}$, $m, n \in 1/2 + \mathbb{Z}$) で定義される Lie 代数とする. この時, $\hat{\mathfrak{h}}[-1]^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1/2}\mathbb{C}[t^{-1}]$ は $\hat{\mathfrak{h}}[-1]$ の可換な部分 Lie 代数となる. その対称代数 $S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)$ は L の -1 -isometry から自然に誘導される自己同型写像 θ をもつ. この自己同型写像の ± 1 -固有空間を $S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)^\pm$ とあらわすことにする. 一方, 群環 $\mathbb{C}[L]$ は, 生成元 e_α がそれぞれ $1, -1$ と作用する 1 次元既約加群 T_1, T_2 をもつ. これらを用いて, $V_L^{T_i, \pm} = S(\hat{\mathfrak{h}}[-1]^-)^\pm \otimes T_i$, ($i = 1, 2$) とおけば, この $V_L^{T_i, \pm}$, ($i = 1, 2$) が既約な admissible V_L^+ -加群の構造を持つ.

既約な admissible V_L^+ -加群は上で構成されたものに限ることが Dong と永友氏によって証明された.

定理 3.1. ([DN]) 任意の既約な admissible V_L^+ -加群は

$$\{V_L^\pm, V_{\alpha/2+L}^\pm, V_{r\alpha/2k+L} V_L^{T_i, \pm}, | i = 1, 2, 1 \leq r \leq k-1 \}$$

のいずれかに同型である.

各既約 admissible V_L^+ -加群の構成から, 最低ウェイトの集合 $\mathcal{P}(V_L^+)$ は

$$\mathcal{P}(V_L^+) = \{0, 1, r^2/4k, 1/16, 9/16 | 1 \leq r \leq k\} \quad (3.1)$$

で与えられることがわかる.

4 主結果

ここでは, 主結果とその証明の方法について説明する. 詳しくは [A] を参照.

定理 4.1. (主結果) $L = \mathbb{Z}\alpha$ を階数 1 の正定値偶格子で, $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2k$, ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) とする. この時 k が素数ならば, 頂点作用素代数 V_L^+ は有理的である.

証明について簡単に説明する. まず最初に次の命題について述べる.

命題 4.2. (1) M を admissible V_L^+ -加群とする. 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, $M^{(\lambda)}$ を固有値が λ の L_0 に関する広義固有空間とする. この時, ある最低ウェイト $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathcal{P}(V_L^+)$ が存在して, M は

$$M = \bigoplus_{i=1}^s \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda_i+n)} \right)$$

の形に広義固有空間分解される. 更に, 各 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda_i+n)}$ は M の admissible V_L^+ -部分加群である.

(2) λ を最低ウェイトとする. この時 $(\lambda + \mathbb{Z}_{>0}) \cap \mathcal{P}(V_L^+) = \emptyset$ ならば, $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda+n)}$ の形の admissible V_L^+ -加群は完全可約である.

この命題の証明には, [Z] で導入された Zhu 代数の概念を用いる. Zhu 代数 $A(V)$ は頂点作用素代数 V に付随して構成され, たとえば, $A(V)$ の既約加群と V の既約な admissible 加群の間には一対一対応が存在するなど, その表現論は頂点作用素代数の表現論と密接に関係している. この Zhu 代数の概念を用いて, Zhu 代数が半単純であるような頂点作用素代数 V にたいし, 上の命題のにおいて V_L^+ を V に置き換えたものが成立することが証明できる. 更に頂点作用素代数 V_L^+ に付随する Zhu 代数 $A(V_L^+)$ は半単純であることが [DN] で示されている. したがって命題が導かれる.

命題 4.2 は Zhu 代数 $A(V_L^+)$ が半単純であることのみを用いているので, 任意の正数 k に対し成立する. しかし (3.1) より, 0 は常に命題 4.2 の (2) の仮定を満たしていないことがわかる. よって 命題 4.2 から V_L^+ の完全可約性は従わない. 今 k は素数と仮定する. この時, 次の補題が成立する.

補題 4.3. k は素数とする. この時, 最低ウェイト $0, 1, 1/16, 9/16$ 及び $r^2/4k$, $(1 \leq r \leq k)$ はすべて異なる. 更に, 任意の $\lambda \in \mathcal{P}(V_L^+) \setminus \{0\}$ は $(\lambda + \mathbb{Z}_{>0}) \cap \mathcal{P}(V_L^+) = \emptyset$ を満たす.

証明 任意の $1 \leq r \leq k$ に対し, $r^2/4k, r^2/4k - 1/16, r^2/4k - 9/16 \notin \mathbb{Z}$ であること及び, 任意の $1 \leq r \neq s \leq k$ に対し, $(r^2 - s^2)/4k \notin \mathbb{Z}$ であることを示せばよい. 例えば, $r \neq s$ に対し $(r^2 - s^2)/4k$ が整数でないことは次のように示される. 今 $(r^2 - s^2)/4k$ がある $1 \leq r < s \leq k$ に対し整数になったと仮定する. この時 k が素数で $1 \leq s - r \leq k - 1$ であるので, $k | (r + s)$ となることがわかる. さらに, $3 \leq r + s \leq 2k - 1$ より, $r + s = k$ で $k \geq 3$ となることがわかる. したがって, $(r^2 - s^2)/4k = (2s - k)/4$ が成り立ち, これは k が奇素数であることに反する. その他の場合も同様に示すことができる. $\square$

注意 4.4. k が素数でなければ, ある正数 $0 \leq r < s \leq k$ で $r^2/4k - s^2/4k \in \mathbb{Z}$ となるものが存在する. 実際に, k が素数でなければ, k は正数 p, q ($q \leq p$) および n を用いて $k = pqn$ とあらわすことができる. この時, $0 \leq np - nq < np + nq \leq npq = k$ が成立し, $(np + nq)^2/4k - (np - nq)^2/4k = n \in \mathbb{Z}$ となることがわかる.

補題 4.3 と命題 4.2 (2) より, k が素数の時, 次の命題を得る.

命題 4.5. k が素数ならば, 任意の $\lambda \in \mathcal{P}(V_L^+) \setminus \{0\}$ に対し, $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(\lambda+n)}$ の形の admissible V_L^+ -加群は完全可約である.

したがって $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(n)}$ の形の admissible V_L^+ -加群が完全可約であることを示せば, 定理 4.1 の証明が完了する. 以下, 次の命題の証明について説明する.

命題 4.6. k が素数ならば, $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{(n)}$ の形の admissible V_L^+ -加群は完全可約である.

まず任意に零でない $u \in M$ に対し, u で生成される M の admissible V_L^+ -部分加群を $\langle u \rangle$ とかくことにする. この時 $u \in M^0$ ならば, $\langle u \rangle^{(1)} = \mathbb{C}L_{-1}u$ となる. 今 $L_{-1}u \neq 0$ と仮定する. この時, $\langle L_{-1}u \rangle \cong V_L^-$ 及び $\langle u \rangle / \langle L_{-1}u \rangle \cong V_L^+$ となることがわかる. よって, admissible V_L^+ -加群の完全系列

$$0 \rightarrow V_L^- \rightarrow N \rightarrow V_L^+ \rightarrow 0$$

が分裂することを示すことによって, admissible 加群としての同型 $\langle u \rangle \cong V_L^+ \oplus V_L^-$ が得られる. 特に $L_{-1}u = 0$ である. これは, $L_{-1}u \neq 0$ に矛盾し, したがって $\langle u \rangle \cong V_L^+$

であることがわかる. よって $M^{(0)}$ で生成される M の admissible V_L^+ -部分加群 U は V_L^+ の直和に同型である.

次に $v \in M^{(1)}$ をとり, $L_1 v \neq 0$ と仮定する. この時, $\langle L_1 v \rangle \cong V_L^+$ 及び $\langle v \rangle / \langle L_1 v \rangle \cong V_L^-$ となることがわかる. よって, admissible V_L^+ -加群の完全系列

$$0 \rightarrow V_L^+ \rightarrow N \rightarrow V_L^- \rightarrow 0$$

が分裂することを示すことによって, admissible 加群としての同型 $\langle v \rangle \cong V_L^+ \oplus V_L^-$ が得られる. 特に $V_L^+(1) = 0$ であることに注意すると, $L_1 u = 0$ であることがわかる. これは, $L_1 v \neq 0$ に矛盾し, したがって $\langle u \rangle \cong V_L^+$ であることが導かれる. よって $M^{(1)}$ で生成される M の admissible V_L^+ -部分加群 W は V_L^+ の直和に同型である.

M の admissible V_L^+ -部分加群 $U + W$ は $M^{(0)} \oplus M^{(1)}$ を含んでいるので, 商加群 $M/(U + W)$ は $M/(U + W) = \bigoplus_{n=2}^{\infty} (M/(U + W))^{(n)}$ と分解している. よって命題 4.2 と補題 4.3 より, $M/(U + W) = 0$, すなわち $M = U + W$ となることがわかる. 従って各 U, W は完全可約であったので, M の完全可約性が得られる.

参考文献

- [A] T. Abe, The charge conjugation orbifold $V_{Z\alpha}^+$ is rational when $\langle \alpha, \alpha \rangle / 2$ is prime, preprint.
- [DN] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of Vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L , *Commun. Math. Phys.* **202** (1999), 169-195.
- [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Appl. Math., Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.
- [Z] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237-302.