

Equivariant Riemann-Roch theorem, localization and formal group law.

大阪大学 理学部 川久保勝夫

§1 Introduction

Hirzebruch, Grothendieck, Atiyah-Singer 等の Riemann-Roch theorem は K -theory と普通の cohomology theory の Gysin homomorphism に関する relation であると言える。Dyer により これ等は 一般的に扱われているが、ここではこれらの equivariant version 及び, localization との関係を検討するのを目標とする。

Atiyah-Singer 理論は 結果と証明の idea と Hirzebruch の Riemann-Roch theorem にあると言っても 過言でないと思うが、問題は technical な難臭があり、それを克服した所にあると思う。

equivariant Riemann-Roch type theorem
 は、色々な category で色々な形で可能にあるが、例え
 ば $k^*()$ を一般 cohomology theory, G を
 compact Lie group, $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ を
 universal principal G -bundle, X を
 G -manifold とした時、

$$h_G^*(X) = k^*(EG \times_G X)$$

を考えてみよう。一般に $EG \times_G X$ は多様体とならず
 Dyer の理論はあてはまらない。Dyer の言う S -dual
 の概念, $EG \times_G X$ の tangent bundle の概念はなく、
 又 $\lim^1$ の問題, どのような multiplicative

transformation が来えられ かつ有効か?, その他
 種々の問題がある。Atiyah-Hirzebruch の
 differentiable Riemann-Roch theorem では
 K -theory の Bott periodicity を使って証明して
 いるが、我々の場合は一般的にあつかうため、全然使えない。
 従って equivariant Gysin map を定義するこ
 とか、そもそも最初の問題がある。

そう一つ、これと前の大きな問題は、"formal" に
 formulate した時 その式が どの程度意味のあるもの

かだろうか?"である。そのために どういう *equivariant cohomology theory* が 面白いが見極めることが、中心問題となる。この結論を先に言うと、先にあつた *equivariant cohomology theory*

$$h^*(EG \times_G X)$$

が 非常に良く、 X と、 X 上の G -action の様子を 反映していることが分った。

このことを見極めれば 後は前に書いた *technical* な問題を処理すればよい。

equivariant Riemann-Roch theorem の応用は、普通の *Riemann-Roch theorem* の応用 と 類似の方向、例えば、*equivariant integrality theorem*, *equivariant divisibility theorem* 等々が構成されるが、地方 *equivariant theory* 特有の応用がある。それは *localization theory* と 組合せた時に生じる。こゝでは後者に限って話をすることにする。

§2 *Equivariant Gysin homomorphism* の定義。

G : compact Lie group

h_G : equivariant multiplicative
cohomology theory

M, N : G -manifolds

$f: M \rightarrow N$: G -map

その時 equivariant Gysin map

$$f_! : h_G(M) \longrightarrow h_G(N)$$

を我々は次の様に定義する。

$e: M \hookrightarrow R^n$: G -embedding

$M \xrightarrow{f \times e} N \times R^n$: G -embedding

この normal bundle を ν とし, $T(\nu)$ がその
Thom complex を表わすことにする。

$$h_G(M) \xrightarrow[\cong]{\text{Thom iso}} \widetilde{h}_G(T(\nu)) \xrightarrow{c^*} \widetilde{h}_G(W \times D^n / N \times S^{n-1})$$

$$\xrightarrow[\cong]{\text{Thom iso}} h_G(W)$$

この composition を $f_!$ を定義する。但し c は自然

につぶす写像を表わしている。

注意することは、考えたい category の Thom isomorphism が存在するような equivariant cohomology theory である必要がある。

$f: M \rightarrow pt$ の時 $f_!$ のことを index とよぶことにする。

$f_!$ は $h_G(pt)$ -module homomorphism になることが分り、従って $h_G(pt)$ の任意の multiplicative set S を localize した写像

$$S^{-1} f_! : S^{-1} h_G(M) \longrightarrow S^{-1} h_G(N)$$

を考えることが出来る。

§3. $Spin^c$ -category.

この節では $Spin^c$ -category に限って考えることにする。Dyer の言う multiplicative transformation として Chern character みたいなもの考えたのだが、equivariant にはどう定義したらよいか先ず問題である。併々には、試行錯誤の結果

$$ch_G : K_G(M) \longrightarrow H^*(EG \times_G M) \otimes \mathbb{Q}$$

の形を予想し, 実際 $x \in K_G(M)$ に対して

$$x = [\xi_1] - [\xi_2], \quad \xi_i : G\text{-vector bundles}$$

とした時,

$$ch_G(x) \stackrel{\text{def}}{=} ch(EG \times_G \xi_1) - ch(EG \times_G \xi_2)$$

と定義すると well-defined?

$$\begin{cases} ch_G(x \otimes y) = ch_G(x) \cdot ch_G(y) \\ ch_G(x + y) = ch_G(x) + ch_G(y) \end{cases}$$

という望ましい性質がある。

同様な idea から

$$\hat{\sigma}_G : K_G(M) \longrightarrow H^*(EG \times_G M) \otimes \mathbb{Q}$$

を次のように定義する。

$$\hat{\sigma}_G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\sigma}(EG \times_G \xi_1) \hat{\sigma}(EG \times_G \xi_2)^{-1}$$

ここで勿論 $\hat{\sigma}$ は $x / 2 \sinh(x/2)$ に対してある genus を示している。

$$f: M \rightarrow N \quad : \quad G\text{-map}$$

$$e: M \rightarrow \mathbb{C}^n \quad : \quad G\text{-embedding}$$

$$f \times e: M \rightarrow N \times \mathbb{C}^n \text{ の normal bundle}$$

$\mathcal{V}$ 上に spin^c -structure と $\mathbb{Z}$, G -action 上に $\mathbb{Z}$ の上は lift したとす。この時,

Theorem. $\forall \xi \in K_G(M)$ に対して, $\exists \eta \in K_G(N)$ s.t.

$$f_!(e^{\frac{c_G}{2}} \cdot ch_G(\xi) \cdot \hat{\sigma}_G(TM)) = e^{\frac{c'_G}{2}} \cdot ch_G(\eta) \cdot \hat{\sigma}_G(TN).$$

ここで $\mathcal{V}$ の spin^c -reduction と G -action と compatible となるように選ぶことができる。

$$c_G \in H^2(EG \times_G M),$$

又

$$\mathbb{C}^n \rightarrow EG \times_G N \times \mathbb{C}^n \longrightarrow EG \times_G N$$

これは complex vector bundle の 1-st Chern class である。

$$c'_G \in H^2(EG \times_G N),$$

である。さらに TM, TN は M, N の tangent bundle を表わす。

この定理の仮定は一見、望ましくないように見えるが、次の Proposition により 解決される。

W_i : i -th Stiefel-Whitney class,

σ : Spin^c -structure に対応する $c \in H^2(M; \mathbb{Z})$ を first Chern class に持つ complex line bundle とした時、次が成立する。

Proposition

$$i) \quad f^*(W_3(N)) = W_3(M)$$

$\Downarrow$

$$W_2(M) - f^*(W_2(N)) = c \pmod{2}, \quad \exists c \in H^2(M; \mathbb{Z})$$

$\Updownarrow$

$\hookrightarrow$ Spin^c -structure を持つ

ii) 上の Spin^c -structure を P とした時

P は G -action を lift 可

$\Downarrow$

σ は G -action を lift 可

逆に

$$\left(\begin{array}{l} H^1(M; \mathbb{Z}) = 0 \\ \Downarrow \quad G = T^n \text{ の時, Stewart \& Su} \end{array} \right)$$

$\gamma = G$ -action が lift

$\Downarrow$

G or G の double covering $\tilde{G}$ が lift 可.

上の定理の応用は §6 にする。

§4 Weakly almost complex G -actions.

この節では weakly almost complex manifolds 上の G -action を考え、equivariant cohomology theory としては次の組合せを考え。

$$K_G(X) \quad \text{と} \quad U^*(EG \times_G X)$$

$$K_G(X) \quad \text{と} \quad K^*(EG \times_G X)$$

$$K_G(X) \quad \text{と} \quad H^*(EG \times_G X).$$

自然な functor

$$\mu_1 : U^*() \rightarrow K^*()$$

$$\mu_2 : U^*() \longrightarrow H^*()$$

であり, $U^*()$ は universal (formal group) である。

例 (2) として $K_G(X)$ と $U^*(EG_G^X X)$ 2つを formulate する。これ等を自然に μ_2 で結びつけると他の formulae が得られる。

先ず multiplicative transformation を (2) 次を考へる。

$\xi : G$ - complex line bundle,

$$ch_y(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1+y) g(e(EG_G^X \xi))$$

として $g(x)$ は Milnor series

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} \frac{[CP^n]}{n+1} x^{n+1} \in U^*(pt) \otimes Q[[x]]$$

で, $e()$ は Euler class を表わす。

splitting principle として

$$ch_y : K_G(X) \longrightarrow U^*(EG_G^X X) \otimes Q[[y]]$$

が multiplicative transformation として定義される。

次 $U^*(EG_G^X X)$ theory value の Generalized Todd genus を試行錯誤で、次の様に定義する。

$\xi : G\text{-complex line bundle over } X$ として

$$T_{Gy}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e(EG_G^X \xi) (\exp(1+y) g(e(EG_G^X \xi)) + y)}{\exp(1+y) g(e(EG_G^X \xi)) - 1}$$

一般には splitting principle で multiplicative sequence

$$T_{Gy} : K_G(X) \longrightarrow U^*(EG_G^X X) \otimes \mathbb{Q}[[y]]$$

が定義される。

以上の notation のもとに次の定理をうる。(G-action のない場合も、この type の定理 は知られてないと思う。)

Theorem M, N ; weakly almost
complex G -manifolds, $f: M \rightarrow N$; G -map,
 $\forall \xi \in K_G(M) \cong \mathbb{R} \otimes \mathbb{Z} \quad \exists \eta \in K_G(N)[\mathbb{Z}] \quad \Delta \cdot \Delta.$

$$f_!(ch_{Gy}(\xi) \cdot T_{Gy}(TM)) = T_{Gy}(TN) \cdot ch_{Gy}(\eta).$$

§5 localization

$h_G(pt)$ の multiplicative set S を、次の様に
定義する。

$\psi: G \rightarrow SO(m)$ representation
without trivial direct summand

$\psi = \psi_1$, $\mathbb{R}^m$ を 1 束上の G -vector bundle と
思った時, その Euler class

$$\chi(\psi) \in h_G(pt)$$

を考へる。この元全体で S を定義すると,
multiplicative set となる。

G -pin map $f_!$ は $h_G(pt)$ -module
homomorphism となる。

$$S^{-1} f_!: S^{-1} h_G(M) \rightarrow S^{-1} h_G(N)$$

を induce する。

$(M, \mathcal{G}, G)$ を G -action とし F_μ を,
不動点集合の component とし,

$$i_\mu : F_\mu \longrightarrow M$$

を inclusion, N_μ を F_μ の normal bundle と
表わすことにする。

$$i_\mu^* i_{\mu!}(x) = \chi(N_\mu) \cdot x \quad \forall x \in h_G(F_\mu)$$

より, 各 Euler class $\chi(N_\mu)$ を localized
ring $S^+ h_G(F_\mu)$ の unit とする。

$$\text{Lemma} \quad \left(\sum_\mu i_{\mu!} \right)^*(x) = \sum_\mu \frac{i_\mu^*(x)}{\chi(N_\mu)}$$

従, 2 特には,

$$\text{Theorem} \quad \text{Index}(x) = \text{Index} \sum_\mu \frac{i_\mu^*(x)}{\chi(N_\mu)}$$

for any $x \in h_G(M)$.

この定理は Atiyah-Segal, T. tom Dieck の定理
の一般化である。

§6 応用.

§5 の localization theorem と §3 の equivariant Riemann - Roch Theorem と合わせると, 例えは次の定理が証明される。

Theorem (Atiyah - Hirzebruch)

M : connected spin-manifold with non trivial S^1 -action

$$\Rightarrow \hat{O}(TM)[M] = 0.$$

Theorem fiber bundle

$$M \rightarrow ET^n \times_{T^n} M \rightarrow BT^n \quad \text{に於て}$$

$\hat{O}$ -genus は Borel - Hirzebruch の意味で strictly multiplicative である。

次 weakly almost complex G -action を考えよう。

$U^*(EG_G \times X)$ theory に於て Thom isomorphism が存在するかどうか問うなければならぬ。単に equivariant Riemann - Roch theorem のだけでは U^* にかかわ

、 $\varprojlim$ inverse limit で定義すれば, cohomology theory がどうか分らないが - を formulate は可能である。しかし localization theorem と両方成立のためにはどうし $\varprojlim^1$ が 消えることが必要となる。幸いこれは吉村氏の次の議論により O.K. となる。(伊教示に於して感謝の意を表したい。)

$$EG = \varprojlim EG^n, \quad EG^n: \text{finite CW complex.}$$

とした時, Atiyah-Segal により [1],

$$\varprojlim^1 K(EG^n \times_G M) = 0.$$

ところが, この状況では

$$\begin{aligned} \varprojlim^1 U^*(EG^n \times_G M) &= 0 \\ \Updownarrow \text{Yoshimura [2]} \end{aligned}$$

$$\varprojlim^1 K(EG^n \times_G M) = 0,$$

従って, Thom isomorphism 等がある。

この結果 equivariant Riemann-Roch theorem と localization theorem 共に可能となる。

簡単のため weakly complex manifold 上の

S^1 -action の場合を formulate し 2.43 と (これは G -signature theorem に等しく G -Ty-genus theorem と呼ぶべきものではない),

Theorem (G -Ty-genus formula)

$$T_y(M)$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\mu_i} \left(\frac{z_{\mu_i} (\exp(1+y)g(z_{\mu_i})+y)}{\exp(1+y)g(z_{\mu_i})-1} \right) \prod_{n \neq 0} \left(\frac{\exp(1+y) \{ng(t) + g(x_{\mu_{ni}})\} + y}{\exp(1+y) \{ng(t) + g(x_{\mu_{ni}})\} - 1} \right) / [F_{\mu}]$$

こゝに $T_y(M)$ は $G=\{1\}$ と $t=0$ 時の $T_G(TM)$

$$c(F_{\mu}) = \prod (1 + z_{\mu_i})$$

$$N_{\mu} = \sum_{n \neq 0} \delta^n \hat{\otimes} E_{\mu n}$$

$$\delta^n: S^1 \rightarrow S^1 \text{ なる表現で } \delta^n(g) = g^n$$

$$c(E_{\mu n}) = \prod (1 + x_{\mu_{ni}})$$

$$t \text{ は } U^*(BS^1) = U^*(pt)[[t]] \text{ なる生成元}$$

$$/[F_{\mu}] \text{ は } U\text{-theory slant product}$$

を表わしといる。

t は不定元として等式が成立しといるので $\lim_{t \rightarrow 0}$ を考え

3 = 2 により Koenigowski, Hattori-Taniguchi の定理の一般化が得られる。(μ₂ に限した のが知られてい る公 式である。)

Corollary

$$\begin{aligned} T_y(M) &= \sum (-y)^{d^+(F_\mu)} T_y(F_\mu) \\ &= \sum (-y)^{d^-(F_\mu)} T_y(F_\mu) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} d^+(F_\mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n>0} \dim(E_{\mu n}) \\ d^-(F_\mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n<0} \dim(E_{\mu n}) . \end{aligned}$$

Corollary fiber bundle

$$M \longrightarrow ET^n \times_{T^n} M \longrightarrow BT^n$$

に關して T_y -genus は strictly multiplicative である。

勿論この Corollary より, 例えは次の公式が得られる。

Corollary

$$T_y(S^{2m_1+1}_{x \times \dots \times x} S^{2m_n+1}_{x \times \dots \times x} M) [S^{2m_1+1}_{x \times \dots \times x} S^{2m_n+1}_{x \times \dots \times x} M] \\ = T_y(\mathbb{C}P^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{m_n}) [\mathbb{C}P^{m_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{m_n}] \cdot T_y(M) [M].$$

§7 最後に。

応用として $\hat{O}$ -genus, T_y -genus について書いたが, L -genus に関して Atiyah-Singer の

G -signature theorem の別証は勿論のこと, 他の方一般の genus, さらに genus に限らず一般の元で O, K である。従って Atiyah-Singer の変換群 Γ の応用は, すべて拡張された形式での別証が可能であるか, その他に

equivariant Gysin homomorphism は, 次の方向に有効である。

① 特別な表現使, Γ equivariant embedding theorem が構成される。

② equivariant characteristic numbers が定義され, G -bordism の特徴づけ可能である。

③ Mayer-Schwarzenberger の Todd genus の

vanishing theorem の一般化される。

④ equivariant Landweber - Novikov operation と呼ぶべきものが定義され、これに関する Riemann - Roch type theorem が可能である。

⑤ 一般 cohomology theory の fiber bundle $M \rightarrow EG \times_G M \rightarrow BG$ に関して strictly multiplicative property と genus の必要かつ十分条件。

⑥ equivariant Kodaira - Hodge - Hirzebruch theory の開発。

その他 equivariant Gysin homomorphism は色々な問題に有効であることが分かった。これ等は又の機会に報告することにする。

参考文献

[1] M. F. Atiyah and G. B. Segal ; Equivariant K-theory and completion, J. Differential Geometry 3 (1969) 1-18.

[2] Z. Yosimura ; On cohomology theories

of infinite CW-complexes, III, Publ. RIMS,
Kyoto Univ. 9 (1974), 683 - 706.