

# カオスについての個人的な体験<sup>1,2</sup>

日本大学 量子科学研究所 島田一平<sup>3</sup>

(2011 年 10 月 1 日受理)

## 1 熱ゆらぎから決定論的カオスへ

編集子より、「近頃の若い人はカオスを知らないようです。島田さん、カオスの歴史を書いてもらえませんか」との申し入れである。私は若い人がカオスを知らないのは、むしろ結構な事だと常々思っている。そして、この話を聞かされてすぐに、故長島弘幸氏がよく言っていた次の様な言葉を思い出した。「“カオス”という言葉は、我々がやっている事に比べて少しておおげさすぎやしませんか。我々がやっているのは力学ですよね、古典力学。力学の振動現象を調べている。その振動にもいろいろとあって、少しばかりゆらゆらする変なものもある。それに対して“カオス”という言葉は大混乱とかまったく何の規則性もないということで、何かちがうんじゃないですかね。」(長島 弘幸, 馬場 良和「カオス入門—現象の解析と数理」, 1992, 培風館) 私は長島さんのこの意見にいたく賛同した。それと同時に、我々のやっている事にふさわしい何かいい言葉はないものかとも思った。「決定論的不規則振動」という当時我々が使っていた表現ではいかにもなさけないと思ったのである。

長島弘幸さんの言葉に関連して、カオス研究が 1970 年代当時の物理学とくに日本の統計力学のコミュニティーにおいてどのような受け取られ方をしていたのか、ここで述べておこうと思う。当時の日本の統計力学者コミュニティーは、いわゆる「非線型・非平衡状態の統計力学」という目標に向かって足並みをそろえていたといっている。非可逆過程に対する線形応答理論の成功、懸案であった臨界現象の繰り込み群による解決といった事象が、多くの研究者に「非線形不可逆過程」という新たなフロンティアを設定する必要を感じさせたのである。そうした中から一つの方向として見えて来たのは、「線形不可逆過程では許されなかった新たな構造が熱平衡から遠く隔たった非線形の状況ではじめて可能になる」というストーリーである。富田-富田によるゆらぎの非可逆的循環の指摘は、線形不可逆過程ではたらくオンサーガーの相反原理が非線形過程において破れるために発生する、新たな時間的構造をとらえようとした試みである。B-Z 反応を例として進められたプリゴジン学派的散逸構造論がある種の熱狂をともなう論じられていた。生命の本質

<sup>1</sup>本稿は、編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である。

<sup>2</sup>ここに述べたことは 1978 年 7 月までの私の個人的な体験である。一部分だけは、それまでの体験と強く関連した記憶としてこの時期以後のものも含まれている。

<sup>3</sup>E-mail: ippei@phys.cst.nihon-u.ac.jp

をそうした非線形非平衡状態に発生する構造としてとらえようという機運もそれに伴って巻き起こっていた。

そのような雰囲気のところへ、熱平衡から離れるにつれて、対流という空間構造の発生、振動という時間構造の発生まではよいとして、そのさらに非平衡側でいきなりカオスというランダムさが見つかってしまった。カオスはランダムでそこには何の構造もないという見方に立つならば、カオスの出現は、熱平衡から遠く隔たるにつれていくらかでも豊富な構造が見られるはずだ、という予想に冷や水をかけるような皮肉な結果である。カオスの研究に進むことには言いようのない躊躇を感じてしまう非線形非平衡統計力学の研究者が、当時はかなりの割合で存在したのである。

ここで、先に紹介しておいた長島弘幸さんの言葉を深く噛みしめてみる必要がある。例えばベナール対流にみられるローレンツアトラクターとその上でのカオス運動は確かに一定のランダムさを有しているが、だからといってそれが本当にのっぺらぼうで何の規則性もないホワイトノイズのようなものであるとしてよいだろうか。流体の運動を記述する分子集団の運動は無限の自由度を持つのに対して、ローレンツアトラクターは3変数で記述できる。分子の熱拡散とローレンツカオスでの緩和現象とは現象の階層がまるで異なる。これらをいっしょくたにした物言いが長島弘幸さんの目には「すこしおおげさすぎる」と写ったのである。これは含蓄が深い指摘である。

今から振り返るならば、ベナール対流におけるカオスの発生は、対流という空間構造や振動という時間構想の発生につづく新たな構造の発生としてとらえるべき事である。非平衡定常解、周期解、多重周期解の他にカオス解という力学構造のさらなる多様性を発見したということなのである。ところが、力学的決定論と予測不可能性が共存できるという事実は、長島さんのような人を除く当時の多くの人の冷静さを失わせてしまった。散逸をささえるしか能の無かったゆらぎに、(非線形領域において) 意味ある構造の担い手としての地位を与えようと奮闘していた当時としては、カオスはそうしたゆらぎの潜在的可能性に立ちはだかる鬼っ子のような存在として受け取られたのである。

この事情はその後の研究の発展段階で、カオスを新たな構造の発生と言う代わりに、カオスを新たな機能の発生と言い換えただけで爆発的な支持を獲得していったという事実によくあらわれている。構造でなくて機能。それは、カオスを他のシステムの中での役割として位置づけた時に初めて可能になる視点である。富田和久氏は脳の機能としての mind に着目して、このカオス機能論へ先鞭をつけた。清水博氏が振動子間での同期の発生を生体における機能の発生と等値しようとしていた所へカオスを持ち込んだのである。カオスは非線形非平衡系での新たな構造の発現としてではなく、新たな機能の発現として、統計力学とは別の分野に移植されることになった。その結果、構造の発現がカオスの発生によって元の混沌に逆戻りしてしまったという否定的な感じ方を乗り越えて、大衆化していった。

統計力学では、分子運動から巨視的な流体力学的運動への記述の縮約が議論されてきた。流体力学では、定常流れや周期的流れを記述する少数自由度への縮約もある程度議論されている。これに対し、ブシネ近似された流体力学の方程式からローレンツ方程式への記述の縮約は、ローレンツ自身による直感的なモードの切断以外には未だに成功していない。構造の発生とそれに伴う

記述の縮約という流儀の研究の流れの中では、カオスだけが未だに孤立している。

## 2 始まり 九十九里の海

カオスの問題は力学の問題である。カオスとの出会いは、私にとって、新しい知識の発見というよりは、力学についての私の考え方が30才近くになってはっきりと変わってしまったということである。私にとって、カオスの歴史を書くことは、何かについて研究してきた道筋を書くというよりは私の思想の変遷をたどるという作業になる。私にとって力学的世界の見方は幼年期を過ごした九十九里の浜に始まる。まずそれを書かなくてはならない。

千葉県海上郡旭町（現旭市）、九十九里浜の東端に位置する椎名内の浜は10歳の頃までの春夏を通して私の遊び場であった。義経が奥州平泉に落ち延びる途中旅程を測るために矢を刺していったところ99本の矢が必要だったというこの海岸は、右手を見ると黒々とした砂浜と一直線の海岸線が何処まで何処までも続き、その果てというものを見ることは出来ない。左手も同様な一直線の海岸線で、こちらは遙か彼方のところにヨーガノデッパリ（飯岡のでっぱり）とわれわれが呼んでいた犬吠埼につづく断崖絶壁（屏風が浦）のはずれが微かに見えるだけである。水平線は完全に180度の視野に広がっていてその果てには何もない。私はいつの頃までか海というものはどこでもこういうものだと思っていた。高知の桂浜で坂本龍馬の銅像の足下から海を見てびっくりしたものである。なんと桂浜の箱庭のように小さいことか。海岸線が湾曲していて浜全体が有限の広さをもっているではないか。九十九里の浜にはその果てというものは無い。そして、その広大無辺の海が1日に2度ずつ確実に満ちたり引いたりするのである。気の遠くなるような巨大な物体（海水）が動くという確実な感覚は知らず知らずのうちに私の心にその場所を占めるようになっていた様に思う。旭町の三川屋という本屋の小学生の私にはとても手の届かない高い書棚の一番上の段に「海のひみつ」という本を見つけた（日下実男、「絵とき百科20 海のひみつ」, 1956, 偕成社）。私が生まれて初めて親に頼んで買ってもらった本である。深海とか、海流とか私のいつも見ている海の中で起こっているさまざまなおどろくべきできごとがその本には書かれていた。私はガラス瓶に手紙を入れて椎名内の浜で海に向かって投げ込んでみた。黒潮ののって何処かに流れつくだろうと想像し「海のひみつ」に出ていた海流ビンの実験をまねてみたのである。来る日も来る日も180度の視野に広がる海を眺めていると、海をたたえた大地という巨大な球体が、ごうごうと無限の空間を進んでいくという、この本に書かれていることが目の前の海と大地で本当に起こっているのではないか、という考えが少しずつ私の心の中で確信になっていった。これは不思議な感覚であった。この浜ですごした時間というものがなければ私はおそらく物理学などという事をやろうとすることはなかったであろうと思う。九十九里の海は私にとって全ての始まりであった。

力学の原理的なことがらに最初におぼろげな注意を向けたのは小学生の頃である。損得なしの原理、たしかそんな風に名付けていたと思う。小学校の理科の時間に、てこ（槌子）の原理、滑車の原理、斜面の原理などをつぎつぎに習っていくうちに、それらがどれも、力で得をするのだが距離で損をしていて、結局損得なしであることに気がついた（あるいは、小学校の先生がそん

な風に説明してくれたのかもしれない)。それぞれの具体的な場合の計算結果を、密かに損得なしの原理を使って検算していた。現象の背後あってそれらを貫いて成り立つ一般的な原理というもの存在に気がついた初めての経験であった。損得なしの原理では計算が統一され簡単になるのが結構気に入っていた。

そのつぎの出会いには心底衝撃的であった。高等学校の物理でニュートンの力学法則と出会ったのである。力学を教えてくれた櫻井謙聿先生は「力学的世界観」という言葉を使われた。この世界の全ての物体の運動をたった一つの式から足し算かけ算といった計算で導き出してしまふ。これには感心した。世の中にはとんでもないことを思いつく人もいるものだと思った。満々と海をたたえた地球が、太陽と全ての惑星が、そしてこの世界の全てが、計算できるものとして微塵の不確かさもなく無限の宇宙の中を時々刻々と進んでいく。その感覚は、九十九里の浜で私がかすかに感じ始めていた事と同じ性質のものであった。力学的決定論は私の信念となった。それまで常に悩まされていた周囲の人間の行動に対しても、彼ら彼女らは一定の初期条件のもとで正確な運動法則にしたがってあのように運動している世界の一部なのだ、というはなはだ不遜な理解の仕方をする事で、一定の精神的な安定を手に入れることができるような気がしていた。なぜか、その同じ原理を自分自身の意識と行動ということにまで適用するという考えには全く思い至らなかった。そのことに気がつくのは大学生になってからである。

### 3 The Foundations of Mechanics

1973年3月某日、その年の物理学科卒業研究発表会は、理論系の全ての研究室が古典力学について発表するという、異例のこととなった。そのころ、我々のまわりはなぜか“古典力学がブーム”だったのである。発表会の後のパーティーの席で統計力学を教えていただいたN教授から「ああいう話は現代の物理学とは何の関係ありませんね」と否定的なコメントをいただいた。私の大学学部生活はそんな風に終わりをつげたのである。

私が選挙管理委員長のときに実施された教養部学生自治会全学投票で、大学管理法案反対のストライキ執行決議案が賛成多数で可決され、その後1年以上にわたって大学での授業はなくなっていた。ピアジェの本を自主ゼミで取り上げることにし、「数の発達心理学」から始めるべきか「量の発達心理学」から始めるべきかで大論争をしたり、付属養護学校の算数の授業を見せてもらって、そこの先生方と子供達の言語の発達について議論したり、生物の形態形成の話(Waddingtonのepigenetic landscape)に夢中になったりしていた。物理の学部学生におこなわれる量子力学や固体物理学の初歩の講義に対しては、なんとなく自分たちの世界とは無縁であるような感じをいっていた。

そんなある日、誰からともなく友達から友達へと手渡されて、私の所に1冊の本“R. Abraham and J. E. Marsden, The Foundations of Mechanics, 1967, Benjamin Inc.”がやってきた。決定的だったのはその本にある挿絵であった。“言語の構造や生き物の形は時間の流れの中で生成されるものである”そんな妄想になぜかしっくり来そうな予感がこの本の挿絵から感じられた。私は、自主

ゼミ活動の仲間であった沖縄からの国費留学生の外間永邦君<sup>4</sup>と一緒に、卒業研究でこの本を読むことにした。この本の付録には A. N. Kolmogorov の有名な “The General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics” が英文で載っているのだが、その当時はその重大さには気がつかなかった。むしろ、解析力学といわれる古典的な内容を現代的な幾何学の言葉に書き換えようとする、著者の意志のようなものに強く打たれた。当時の我々には、この本に示されたスタイルの古典力学の方が講義で聴く量子力学などよりもよほど新しく感じられていたのである。

私が当時手にしたのはこの本の第 1 版で、1966 年にプリンストン大学物理学科で行われた R. Abraham による講義がもとになったものである。その後この本は版を重ね、現在では初版本の 2 倍くらいの厚さになっている。私はスプートニクが夜空を飛ぶ姿をこの目でながめ、アポロ宇宙船の月着陸をテレビで見て育った世代の一人である。PSSC 物理 (Physical Science Study Committee Physics) とか Feynman 物理学講義が次々に翻訳出版され、ものすごい情熱で科学を語る高校教師達に物理を習った。外間君の下宿では、米軍放出品の羽毛シュラフにくるまって議論をした。U.C. サンタクルツで Abraham のもとに通っていたヒッピー上がりの物理の院生 4 人に会うのはこれからちょうど 6 年後のことである。世界を吹く風は、まともな本屋も大学院もない地方都市の大学にも確実に流れて来ていたのである。

#### 4 松原先生の力学系講義 北大大学院時代

私は松原武生先生から力学系理論の初歩を習ったことがある。北海道大学での大学院集中講義であったからおそらく 1973 年から 1974 年ころであったと思う。あの松原 Green 関数で有名な先生が力学系理論を講義する姿をみなさんは想像することができるだろうか。それはその当時大学院生であった私の目から見ても意外な取り合わせであった。

北大物理教室では松原武生先生というのは伝説の人物で、松原先生を師と仰いでいると公言される物理教室の先生も何人かおられた。伝説というのはだいたいこうである。松原先生は戦後の一時期北大に赴任しておられた。松原先生の所属は北大の教養部で、理学部物理教室やクラーク会館などの建ち並ぶ北 1 2 条からは地下鉄の駅にして 2 駅ほど北に位置する、どちらかという北大農場に近い北のはずれの位置にある。その当時、理学部物理教室と教養部の物理部門に属する研究室の間では、その研究環境と待遇などの不公平さをめぐって議論がくりかえされていたという。松原伝説の大筋は、このような教養部の研究環境・待遇問題で教養部におられた松原先生がいかに勇猛果敢に物理教室会議で論陣をはられたか、という物語である。物理教室会議議事録に記録が残っているのだとか、松原先生があのまま北大に残っておられたらどんなに良かったか、という話をある先生から伺ったことがある。

物理教室憲章の精神にそって運営されていた物理教室会議では、私が大学院生の時代にも以下のような事があった。私の所属する物性理論グループの研究計画を、我々大学院生の側から教室会議に提案したのである。その前の 2 年間をかけて、物理院生会では各研究グループの発足以

<sup>4</sup>我々の大学入学年度に沖縄はまだ本土復帰前であり、彼は留学生として入学したのであるが、私と 2 人で読み始めたブルバキの数学原論にはまり込んでしまい、そのために卒業が遅れ、沖縄県民として卒業を迎えることとなった。

来の全ての研究をレビューし、各グループの現在の研究計画が適切かつ将来性の有るものであるかどうかを検討した。その結果、まず第一に物性理論グループの改革を目指すこととなったのである。物理教室会議での議論の末、院生の提案が賛成多数で可決された。今ではちょっと想像できないようなことかもしれないが、当時としては、グループの研究計画の策定に参与する事が若手研究者としての当然の行動であったのである。

当時、物性理論グループでは教授の堀淳一先生、助教授の朝日孝先生、助手の和田さんらを中心に1960年代から行われていた格子振動の研究、特に局在した不純物の効果についての研究が一段落し、その数理的なテクニックを駆使して、非平衡統計力学の問題にアタックしていた。格子中の不純物を着目する系、バルクの格子系を熱浴とみなすことによって、時間相関関数の減衰を厳密に導こうという研究である。私は修士1年生として物性理論グループに入り、この非可逆性の原理的問題をテーマにしたい旨、指導教官の堀淳一先生に伝えたところ、即座に「その研究はもう終わりました」といわれた。その代わりにプリゴジンの非平衡熱力学の小さな英語の本を渡された。堀先生は別の大学院生とエントロピー生成率に関する非平衡熱力学の原理をレーザーの発振という不安定現象に適用する仕事を始めておられた。私はその後を継いで流体系（ベナール対流の発生現象）へとその原理を適用するという仕事を与えられたのである。

教室会議での私の提案は、このような物性理論グループのこれまでの研究の流れを踏まえて、今後グループとして非平衡開放系の理論的問題をその中心にすえ、そのための方法論を確立すること、研究の応用対象として生物系を考え、生命現象を非平衡熱力学の観点から見据えていく様々な関連研究を視野に入れておくというものであった。その当時、北大の薬学部には小島陽之助先生がおられて、one function one moleculeの原則には断固反対という立場からの生命現象にアプローチされていた（小島・相沢 訳、ニコリス プリゴジヌ、散逸構造 — 自己秩序形成の物理学的基礎 —, 1980, 岩波書店）。私の計画はこうした小島研究室の研究とも連携を考えたものであった。これに対して、グループの助教授である朝日孝先生は、松原先生の伝統の復活をとなえ、金属電子論の王道をいく研究こそが物性理論グループの将来としてふさわしいという考えであった。物理教室会議では我々院生の提案が賛成多数で可決されたのである。

私が北大の大学院修士課程在学中に受けた講義として印象深かったものに、先に述べた松原先生の力学系の講義、寺本英先生の数理生態学の講義などのほかに林忠四郎先生の講義がある。北大大学院時代、修士課程の2年目だと思う。その年の宇宙物理学の講義が京都の林忠四郎先生により「太陽系の起源」という題の集中講義形式でおこなわれた。ベナール対流の流体力学的安定性の熱力学的な理論というのが進行中の私の修士論文のテーマであり、その必要上からチャンドラセカールの“Hydrodynamic and Hydromagnetic Instability, 1961, Oxford”を読んでいたのも、大変親しみの持てる話であった。核反応素過程から恒星の進化の理論という林先生の有名な仕事のイメージからすると、流体力学と熱力学をつかって進められる素朴な議論の積み重ねには驚かされた。多分この話は太陽系生成に関する京都モデルのかなり初期の段階の解説になっていたのだと思われる。講義の最後に、思い切って質問した。「先生の太陽系生成モデルには散逸の効果が入っていないようですが、太陽系の形成過程に散逸の効果を取り入れる必要はないのですか？」

Boltzmann 方程式から始まる林先生の議論に散逸の効果は入っていないわけではないのだが、講義の途中にあった Jeans Instability の部分を、非平衡熱力学での散逸構造の一種として考え直すこともできるのではないかと、という考えがその時に浮かんできたのである。林先生は大きな目をぎょろりとさせてからニヤリとわらっただけで、何も答えてくれなかった。

話を松原先生の講義にもどそう。北大において松原先生の存在は、物性論グループの将来計画についての朝日先生の提案にも見られるように、金属電子論の問題、アブリコソフの教科書に見られるような研究を象徴するものだったと思う。その松原先生が集中講義で力学系の話を読まれたのである。B4 版の大きなファイルフォルダーから大事そうに計算の結果の紙を取り出し、非線形常微分方程式の固定点とその周りでの線形化された力学系について、安定性の条件などをものすごい情熱をもって語られたのである。講義を聴いた私には、その内容として何も新しいことはなかったのであるが、あの松原先生がまるで学生が初めて勉強するようにしてノートにまとめられた内容を一生懸命に講義される姿に唖然としたのを覚えている。金属電子論の話もグリーン関数の話もまったくなかった。こんな大先生でもこんな風にして新しい事を勉強するのか、というある種感動を覚えたのである。

北大での松原先生の力学系理論の講義には、一つの重要な歴史が関わっている。当時、日本の統計力学の研究者の間では、「非線形・非平衡現象の統計力学」とい題目の新しい研究会が組織されつつあった。1973 年 12 月に基礎物理学研究所で開かれた第 1 回の研究会の報告では、世話人により研究会発足の趣旨が述べられている（物性研究、**21-6** (1974), I1)。文責川崎恭治先生とあるこの文章には研究会の introduction を松原武生氏にお願いしたとある。松原先生がこの研究会でどのような話をされたのかその内容は残念ながら記録されていない。一読してわかることは、この研究会発足の趣旨が、それまでに得られた研究成果を基にそれを発展させるというよりは、ゼロから全く新しい問題に取り組もうというものであることだ。とにかく、これからはこれをやらなくてはならないのだ、という決意表明のような文章なのである。私が実際に聞いた松原先生の非線形力学系の講義にもそうした姿勢は一貫して感じられた。いったい、この時期の日本の統計物理学研究者のコミュニティーに何が起こっていたのか。一つには 1972 年ウィルソンらにより臨界現象の問題に繰り込み群を用いた一定の解決 (K. G. Wilson and M. Fisher, Critical exponents in 3.99 dimensions, Physical Review Letters, **28** (1972), 240) がなされたこと、70 年代前半の大学紛争によって、大学での教育と研究とが一時的に機能停止に追い込まれていて、その後ようやく研究が出来る環境に復帰したという時期であったこと、などが考えられる。

## 5 ローレンツモデルのパワースペクトル

1977 年 3 月 私は生まれて初めての物理学会発表を前にして、早稲田大学理工学部の斎藤信彦先生の部屋を相澤さんとともにたずねた。発表の予行演習を兼ねて斎藤先生に話を聞いてもらったのである。内容は当時北大薬学部に住居する相澤洋二さんとの共同研究でローレンツモデルの時間相関関数とパワースペクトルの計算結果である。話を聞いた斎藤先生が何とコメントされたのかは今となってははっきり覚えていない。私の研究として初めて、カオスをテーマとして取り扱っ

たこの仕事は、相澤洋二さんを通じて、斎藤研究室の研究の流れと暗黙の関係を持っていることを、後々知ることになるのである。

博士課程1年目のある日、相澤洋二さんが私の部屋にやってきて、ローレンツの論文を見せてくれ「パワースペクトルと自己相関関数を計算しましょう」と提案された。私は修士論文でプリゴジンの excess entropy production がベナール対流不安定の問題に対する Lyapunov 関数となるための条件を調べていたので、ベナール対流の問題なら即座に計算を始めることができたのである。相澤さんは私に Runge-Kutta ルーチンの Fortran ソースコードを手渡してくれた。私は直ぐに北大の大型計算機センターに行って手続きをし、計算センターのマニュアルを見ながら Fortran のプログラムを書いた。電子計算機なるものを使う、生まれて初めての経験であり、生涯で私の書いたプログラムの第1作がこのプログラムなのである。

私は、相澤さんがくれた Runge-Kutta ルーチンは、斎藤研の伝説のプログラマーである市村純さんの作品であろうと推測している。斎藤先生と広岡一さんは非線形格子振動での緩和現象、とくにエネルギー等分配則が成り立つかどうかを電子計算機での数値計算で調べ、緩和が単純には発生しない（誘導時間の発見）という仕事をされている。私の計算したベナール対流のローレンツモデルは散逸力学系であり、斎藤研伝統の保存力学系ではないのだが、電子計算機を使った数値計算による研究というスタイルは相澤さんや Runge-Kutta ルーチンのソースコードというものを通して斎藤研譲りの本物であると自負している。

計算はプログラム作りから始めて、2週間くらいで終わったと思う。当時 x-y プロッターなどという道具はそう簡単に使える物ではなく、パワースペクトルの計算結果は、LPシートに印字された数値をセクションペーパーに鉛筆を使って手書きでプロットしたのである。結果は多少ぎざぎざしているものの、平均回数を増やしていくと明らかに連続スペクトルに収束していく様に見える。これが後々物議を醸し出す結果であるとはそのときは考えなかった。結果は直感的に明らかであった。その後の経験で分かったことであるが、数値計算の結果というのは、かなりの部分、直感的にその正しさが分かるものである。(10年以上経ってから、同じ計算の結果をカルコンプの x-y プロッターで描かせてみたところ、私の最初のプロットは手書きゆえの余分の誤差が加わっていて、プロッターで描かせるともつとなめらかな連続スペクトルになるのである。ハーケンがその著書で私たちの結果の図を引用するにあたり、計算結果のプロット点を連続曲線として描いているのにはびっくりした (Hermann Haken, 牧島邦夫・小森尚志訳『協同現象の数理 — 物理, 生物, 化学系における自律形成』, 1981, 東海大学出版会; H. Haken, "Synergetics, an Introduction: Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology", 2nd ed., 1978, Springer).)

パワースペクトルの計算が終わると、私は調子に乗ってローレンツモデルのベクトル場に存在する3つの不動点のうち原点ではない2つの不動点の不安定多様体(分岐点では中心多様体になる)を近似的に表す式を作り、計算機の出力印字を利用したキャラクターグラフィックスを使って描いたローレンツアトラクターの断面と比較してみた。相澤さんは新米の共同研究者である私のコントリビューションを増やしてやろうと思われたのであろう、はなはだ未成熟なこの計算を論



文の最初の版に含めて Progress に投稿した。案の定、私の不安定多様体の計算部分にレフリーである蔵本さんの批判が集中した。私たちはパワースペクトルと自己相関関数の結果を論文にする事の方が重要であると判断し、蔵本さんの批判をかわすべく、この部分を大幅にカットして出版にこぎつける事ができた (Yoji Aizawa and Ippei Shimada, The Wandering Motion on the Lorenz Surface, Prog. Theor. Phys., **57-6** (1977), 2146-2148)。少数自由度力学系の不安定多様体などの不変集合を、摂動計算で求めるというこの方面の仕事は、大同寛明さんがその後精力的に進められた。一方、Guckenheimer をはじめとする何人かの数学者は原点にある不動点の不安定多様体をしらべている。原点でない方の不動点の不安定多様体は 2 次元の曲面であり、計算機で描かせたアトラクターとよく一致するのだが、本物のアトラクターは 2 次元曲面が束になったフラクタルな構造をしているので私のナイーブな考えはアトラクターの近似としては正しくない。原点の不安定多様体は 1 次元の曲線でその断面は Guckenheimer によるローレンツ系のポアンカレ写像のモデルの骨組みを形作っている (J. Guckenheimer and R. F. Williams, Structural stability of Lorenz attractors, Publ. I. H. E. S. **50** (1979), 60-72)。したがって原点の不安定多様体の解析結果はそこで有用な情報として利用されている。しかしながら、私は今でも、私が計算しようとした、原点ではない方の不動点の不安定多様体 (2 次元曲面) も何らかの意味で真のアトラクターの構造と関係していて、そこからアトラクターについての情報を引き出せるのではないかと思っている。

ローレンツの論文を知り、相澤さんの提案をうけて相関関数とパワースペクトルの計算をするのには何の問題もなかった。ウィーナー-ヒンチンの定理など教科書で知っていたが、それがこんなにもきれいに成り立つものかと感心し、自分の数値計算の結果に即座に確信をもった。何というのか、数値的な計算をやっているその結果の安定性みたいなものが肌で感じられるのである。ただ、自分で計算機をあつかって実際に計算したことのない人にはこの感覚はなかなか伝わらないものであるということにすぐに気づかされた。3 変数の決定論的な力学で記憶が喪失するとは信じられない。このように反論する人に向かって、あなたも計算してみればわかりますよ、と言ってもせんないのである。その後私のやってきたことは、何か新しい事を発見するというよりは、ローレンツモデルのような非線形力学系がエルゴード的であり、かつ混合的であるということ了他の人に説得することであったように思う。Arnold-Avez の本、Billingsley の本、十時先生の本などを参考にしつつ作戦を練った。

## 6 九大森研に居候する

ある日、「このポアンカレマップというのは、どうやって描くのですか？」と森先生が質問した。長島知正さんと私とで書いた物理学会誌のレビュー論文にあるレスラー系のポアンカレ断面の図について、その日の前の 1 週間、自宅で勉強してこられたのであろう、森先生の質問である。それはその後週 1 回のペースで何ヶ月か続く森先生との個人セミナーの始まりであった。

当時博士課程 3 年めの私は九大の森研に居候していた。海外出張中の徳山さんのデスクが私の使う机だった。その部屋は西側が窓で、時々窓ガラスの 1 点に見えるか見えないかの小さな点が現れる。その点はその位置を全く変えずに徐々にその大きさを増し、やがてその姿からジャン

ボジェット機かダグラス DC 1 1 かが識別出来るほどの大きさになって、頭上を通り過ぎるのである。すぐ隣のブロックには米軍の戦闘機が墜落して一騒動あった、九州大学の大型計算センターの建物があり、これなら、ジェット機がまともに降ってくることもありえるな、と感心した。

私が九大に来たのは実は蔵本さんが目当てであった。その発端は蔵本、都築の論文 (Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, Reductive Perturbation Approach to Chemical Instabilities, Prog. Theor. Phys. **52-4** (1974), 1399-1401), 蔵本、山田の論文 (Y. Kuramoto and T. Yamada, A New Perturbation Approach to Highly Nonlinear Chemical Oscillation with Diffusion Process, Prog. Theor. Phys. **55-2** (1976), 643-644) である。数理解析研究所で蔵本さんの講演を初めて直に聴いたのもこの少し前であった。この論文の与えた影響は、蔵本さん自身も自分の問題として書いておられるが (蔵本由紀, 「新しい自然学—非線形科学の可能性」, 2003, 岩波書店)、当時の私にも重要であった。久保, 松尾, 北原の論文 (R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, Fluctuation and relaxation of macrovariables, J. Stat. Phys. **9** (1973), 51)、プリゴジンの非平衡熱力学、京都グループの富田、富田によるゆらぎの非可逆的循環 (Kazuhisa Tomita and Hiroyuki Tomita, Irreversible Circulation of Fluctuation, Prog. Theor. Phys. **53-5** (1974), 1731-1749) など、当時の日本の統計力学コミュニティでは、日本のお家芸とも言える線形応答理論を非線形領域にいかにして拡張するか、というのが一つの目標であったように思う。それは、こうした仕事を目標にして、これからこの分野で研究を始めようとする我々の世代の大学院生の間にも顕著な傾向であったと思う。このような雰囲気の中で、ローレンツモデルのような少数自由度の決定論的な方程式をかざして何かを主張するにはある種の精神の切り替えが必要であった。私の中でそれは、学部の卒業研究で読んだ Abraham の力学系の教科書や、René Thom の “Structural Stability and Morphogenesis” などを通して徐々に形づくられてきていたのではあるが、大学院に入ってから私はプリゴジンの excess entropy production という非平衡状態でのゆらぎをテーマにしていたのである。自分たちの兄貴分に当たる世代の研究者が「もうゆらぎはいいから、非線形をやりましょう」というメッセージを発してくれたのはさすがに大きかった。これで、学部時代から興味を持っていた力学系理論をやってもいいのだ、と自ら納得したのである。蔵本さんはドイツに長期出張してしまっ

## 7 P.C. Martin — 森肇 — 北大グループ

私がローレンツの論文を知ったのは、当時北大薬学部の小畠研究室にいた相澤さんを通してである。相澤さんは九州大学へ半年ほど内地留学をされ、それが済んで北大へ戻られたときに、私の所へローレンツの論文をもって現れたのである。1976 年のことである。2, 3 年前に森先生から伺ったところでは、相澤さんの内地留学の先は森研ではなくて九大の生物におられた清水博先生の所だったそうである。そういえば、北大で相澤さんと話している時点では相澤さんはエルゴード問題のような力学系の研究よりは生物物理学を自分の将来の目標と定めておられたように思う。蔵本さんの論文や筋収縮のスライディングモデルに関する教科書を私と一緒に読んでいたりして、筋繊維のコヒーレントな収縮がなぜ起こるのかをモデルで説明しようとしていた。相澤さんが清

水先生の所へ行かれたのは、その意味で当然なのだが、私は森先生から伺うまでは、てっきり相澤さんは森研に行かれていたと勘違いしていた。ただ、相澤さんがローレンツの論文を仕入れて来たのはたぶん森研からであると思う。

その後私が蔵本さんを追いかけて森研に居候した時の様子では、当時の森研では森先生がローレンツの論文をもとに研究を発展させようと盛んに若い人たちを勧誘していた。その中には故藤坂博一さんもおられた。そしてそれに対する森研の若い人たちの反応はあまり積極的ではなかった。たぶん、ローレンツモデルのような少数自由度の力学系を扱うということは、森研の伝統的な統計力学の研究からはあまりにかけ離れたものを感じられていたのだろう。せいぜい乱流の統計理論あたりが、この時点での藤坂さんをはじめとする森研の守備範囲だったように思う。つまり、若い人の方が保守的で、森先生一人が飛んでいたのだ。この状況は私が森研に移動する途中で数日間立ち寄った京都の富田研でも似たようなものであった。富田先生がとにかく熱心で、おそらくマスターでは臨界現象などの富田研伝統のテーマで訓練されてきたであろう当時の富田研の院生は、富田先生の豹変に重心を別の所に残しつつお付き合いしている、という感じだった。しかし、富田先生は本気だった。「島田さんは、この後九大へ行かれるのですよね」とセミナーに参加している富田研の院生を見回しながら発したその言葉には、森研への対抗意識のようなものが感じられた。富田先生も研究室の若手をローレンツモデルのような少数自由度力学系の研究へプロモートしようとしていたのだ。

結局のところ富田研に来てはじめてから少数自由度の力学系に取り組んだのは阪大から来た津田一郎さんが最初だったようだ。私が九大に居候している間に、相澤さんはブリュッセルから京都の富田研に呼び戻されることになる。北大発のローレンツ系などの少数自由度力学系の研究が、九大森研と京都の富田研の若手に拡散していく一つのきっかけになったと思う。

さて、森研から相澤さんを経て北大にもたらされたローレンツ論文の伝達経路をさらにたどるとどうなるだろう。おそらく、1975年8月ブタペストで開かれたIUPAP統計力学国際会議でのPCマーチンの講演(P.C. Martin, The Onset of Turbulence: A Review of Recent Developments in Theory and Experiment)を森先生が聞かれたのだと思う。マーチンの講演はそれまで彼が手がけていた乱流の統計力学的研究の文脈上にローレンツの論文を位置づけてみせ、ローレンツモデルの乱流の理解における可能性に言及したものであった。おそらく日本の統計力学研究者のコミュニティはこのPCマーチンのレビューを通してしか、10年以上前に気象学の論文として発表されていたローレンツの論文にアクセスすることはできなかったと思われる。

ここでひとつ触れておきたいのは、ローレンツモデルと殆ど同じ3変数の常微分方程式である力武モデルは1964年に基礎物理学研究所の研究会(力武常次, [特集] 地球と物性研究 地磁気成因論の諸問題, 物性研究 **1-6** (1964), 491)で話されているということである。こちらは日本の統計力学研究者の間では殆ど関心をもたれた形跡がない。力武モデルの話は、どちらかという日本磁性研究者の関心事として基礎物理学研究所の研究会で議論されていたようだ。その意味でPCマーチンの貢献は大きいと思う。1978年王子セミナーの際に、北大にやってきたマーチンに「おまえはいつからローレンツモデルの研究をやっているのだ」と聞かれた。マーチンがレビュー

トークをした後、世界の統計力学研究者のなかでも最も速やかにローレンツモデルについての研究成果を出したのは北大の我々であり、それは森先生、相澤さんを経由して北大にもたらされたのであるが、その反応があまりに速かったのでマーチンには不思議だったのかも知れない。マーチンの奥さんの furniture という単語の発音がなかなか聞き取れなくて、それが北海道旭川の民芸家具についての質問だと気がつくのに苦労したのを思い出す。物理の研究者として、それまでに会ったことのないノーブルさを感じさせる人物であった。

## 8 北大の仲間達

私は北大の修士1年の夏に、信州であった物性若手夏の学校に初めて参加した。ここでその後の私にとって重要になる2つの出来事があった。一つは森肇先生の臨界現象の講義を聴いたことである。森先生は汗をふきふき、K.G. Wilson の 3.99 次元からの展開 ( $\epsilon$ -展開) という話をされた。ランダウ理論の話は研究室の先輩である岡本さんから聞いていて、臨界現象には興味があったのだが、森先生の話はよくは理解できなかった。ただ、臨界現象の研究において今まさに何かただならぬ事が起きている、ということだけは強く印象づけられた。その後、日本の統計力学の研究者の多くは、臨界現象から非線形非平衡へとその研究テーマを変えていく。蔵本さんもその一人であったかと思う。川崎先生は1次相転移の未解決問題に挑み続けた。私の大学院生活はまさにそういう時代のただ中に始まったのである。

もう一つは、相澤洋二さんとの出会いである。その頃の物性若手夏の学校というのは、民宿で畳の部屋に数人ずつ雑魚寝をしていた。同室人の名簿を見ながら「非線形力学系と非平衡熱力学に興味を持っている人がいるみたいですね」と部屋にいた大柄な人に話しかけると、「それ、私です」と答えてにこにこ笑っていたのが相澤さんであった。私が千葉大から北大に移ったのとはほぼ同時に、相澤さんも早稲田の大学院から北大薬学部に移って来ていたのである。それから相澤さんと北大の院生何人かで北大P-クラブというセミナーを始めた。週1回北大クラーク会館の一室に集まっていろいろな話をした。P-クラブのPはたぶんプリゴジンのPであると思うのだが、当時北大には非線形非平衡の問題に興味をもつ熱狂的なファンが何人かいて、それらの人々と集まるのは楽しかった。ただ、あまりに熱狂して、それまでに手がけていたドクター論文の実験的研究を放り出して、「俺は理論をやる」と宣言し研究室を飛び出してしまった人がいたのにはおどろかされた。先輩の川島利器さんである。北大応用電気研究所の徳永さんから「川島君と連絡を取りたいのだが、」と直接電話がかかってきたときには、まるで私が川島さんの脱藩をそそのかしている張本人であるかのように、はなはだ具合がわるかった。P-クラブの目的は学問の哲学を語り合うことだ、というのが我々のスローガンであった。週末になるとメンバーは北12条北大正門前の焼き鳥屋チロルに集まるのが常であった。そんなある日、「相澤さんは研究成果を上げて論文を書く事を目的にしているのではないか、それはP-クラブの真の目的に反する事だ」と川島さんが言い出して、とうとう相澤さんをP-クラブから除名するということになった。その直後、相澤さんはブリュッセルのプリゴジンの所に旅立っていった。

その少し前に早稲田の斎藤研から長島知正さんが北大の工学部に赴任してこれ、時々我々の研究室を訪ねてこられるようになり、堀先生と一緒に散逸揺動定理に関する論文の輪講に参加されていた。このときにいろいろ読まれた内容はその後、岩波から出た堀先生の「ブラウン運動」という本のネタになっている様である。長島さんという人は、茫洋としてつかみ所が無い不思議な人である。北海道の外から北海道にやってきて、最後にそこに住み着いてしまう人には共通したタイプがあるそうである。まさに長島さんがそのような人で、当時の内地組で今でもただ一人北海道に留まっている。

## 9 Lyapunov 指数の計算

相澤さんは何も言わずにブリュッセルに発ってしまったので、相澤さんと始めたローレンツモデルの仕事をどうしたものかと考え、蔵本さんの所へでも転がり込もうかと考えていた所、長島知正さんから助け船が来た。

長島さんがガルガニ達の論文 (G. Benettin, L. Galgani and J. M. Strelcyn, Phys. Rev. A **14** (1976), 2338) を持って来たのである。本当に不思議なことだが、私にはガルガニ達の論文を見たとき、ほとんどその内容を読まなくても何を計算すればよいのかすぐに分かったのである。多様体上の接ベクトルバンドル、余接ベクトルバンドルを使ったベクトル場の定義などは学部時代に身につけていたので、何も見ないで計算のアルゴリズムを考えることができた。要は行列の固有値のうち最大の大きさをもつものを計算する Rayleigh 商という反復アルゴリズムと同じ事をすればよいのである。反復するたびに勝手に固有ベクトルの方向に収束する安定したアルゴリズムである。数学的にはその収束をめぐるいろいろと難しい側面があるのだが、そのときの私には何も気にならなかった。数値計算結果の安定性ということから、直感的に何か確かなものを捕まえていることが明らかだったのである。非常に気に入ったのは、同じローレンツ方程式でレイリー数に対応するパラメーターを大きくしていくと系が連続スペクトルをもったり、線スペクトルを持ったりその性質が変化し、その変化とリャプーノフ指数が正になったりゼロになったりする変化とがぴったりと一致したことである。相関関数の減衰は無限の自由度の極限でのみ起こるという議論に対して、同じ3変数の力学系でそのパラメーターの値によって相関が減衰したり減衰しなかったりするものであるから、その原因が無限の自由度ではないことは全く明白である。

ランダウによる乱流の描像は、ホップ分岐の繰り返しにより発生した  $n$  重周期解が  $n$  無限大で乱流になるというものであるから、ローレンツモデルはこの意味でランダウの描像とは全く異なる流体の不規則な運動の存在を予言しているわけだ。これは実験でも同じ事が確かめられるに違いないと思った。その当時の北大には流体の研究室はなく、先輩の岡路さんが液体ヘリウムを使う実験をしていたので低温の実験室を見に行った。この研究室でベナール対流の実験をしてもらえないかと思ったのである。低温グループの実験室では、デュワービンの底にどこまでヘリウムが残っているかを確かめるために金属のパイプを瓶に入れていき、パイプの上端を親指で軽く押さえるということをする。パイプの下端がヘリウムの液面に近づくとパイプの中の空気が振動してポンポンと鳴り、上端をふさいだ親指にそれが感じられる。これはベナール対流と同じ

散逸構造の一種であり、対流の空間対称性の破れに対して、こちらは時間対称性の破れである。私はこれを「ポンポン蒸気インスタビリティ」と勝手に名付けて研究室セミナーで発表した。この系でもさらに高次の分岐でローレンツモデルと同じような不規則振動が発生する可能性がありそうで、これなら、岡路さんの所で実験してくれるかもしれないと思ったのである。このプランはある事件のために残念ながら実現しなかった。

長島知正さんと私がリャプーノフ指数の計算を進めているときに注目していた実験がある。それは東工大の樺島さん達の実験であった (Shigeharu Kabashima, Hiroki Yamazaki and Tatsuyuki Kawakubo, Critical Fluctuation near Threshold of Gunn Instability, J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976), 921-924)。Gun ダイオードの発振スレシュホールド近くで、どう見ても熱雑音とは思われない低周波のゆらぎが観測されていたのである。しばらくしてから、日電の中央研究所におられた中村紀一先生もこの現象に着目されモデルシミュレーションで不規則振動を観測されていたことを知った。我々はこの物性物理での現象に、ローレンツモデルやレスラーモデルで最大リャプーノフ指数が正の時に見られる連続スペクトルと同質のものを感じていた。それは熱ゆらぎとは異なり非線形の力学系がその力学的な運動として示す不規則性なのである。「決定論的不規則振動」というのがこの時期に我々と中村紀一先生とが使っていたこの現象に対する呼び方であった。

## 10 分岐現象をめぐる

長島知正さんとの共同研究は短い期間だったが、ローレンツモデルとレスラーモデルを通して、およそカオスの教科書に載るような現象は全て経験してしまった。後から振り返って不思議なのは、相澤さんや長島知正さんと仕事をしていたこの期間中、ローレンツの論文にある 1 次元写像（いわゆるローレンツマップないしローレンツプロット）を用いた議論の部分を読んだ記憶がまったく無いことである。私は常に 3 次元の流れに対してそのポアンカレマップという 2 次元写像で考えていた。そうしなければ、流れの可逆性を写像の可逆性としてとり入れることができないのである。その後ポアンカレマップを記号力学系として表現してみて、これは両側無限の記号列になるのだが、これを同値類別するとその商表現として片側無限列と 1 次元非可逆写像が得られる。この時点で、私の中でようやくローレンツプロットの何たるかが腑に落ちたのであるが、それはローレンツの論文を読んで理解したというのではなく、自分でやってみてその考えに到達したという感じである。記号力学系への表現は、長島知正さんにはひどく評判がわるかった。「何かえらいゲテモノをはじめましたね」と一言いわれてしまった。私の中では密かに統計力学との関係、そのための不変測度をどう考えるかという課題が芽生えていたのである。

不変測度からむ仕事に話をすすめる前に、長島知正さんとの仕事についてまだ述べておかねばならないことが残っている。分岐の問題である。私は 3 次元流れや 2 次元写像での単純分岐というものは、もうほとんど新たな発見というほどの重要さをもたないだろうと、勝手に思い込んでいたふしがある。分岐はほとんど全ての種類を観測した。しかし、それを主題に論文にするという意志はあまりもたなかった。最大リャプーノフ数を計算すると、その値がゼロから正また負に変わるところところで面白いように簡単に分岐点が見つかるのである。リャプーノフ指数

の利用の仕方のデモンストレーションとして分岐に言及した論文を書いたというのが正直な気持ちである。

しかし、分岐集合全体の特徴的な様相には興味があった。ローレンツ系でも、レスラー系でもパラメーターのある範囲でカオス（リャプーノフ指数が正の値）と周期解（リャプーノフ指数がゼロ）とがものすごく頻回に行ったり来たりすることが印象的であった。この頻回に行ったり来たりする現象も樺島さんたちの実験で見られていたように思う。そして、どちらの系でも十分に大きなパラメーターの値になると、その領域では周期解だけが存在するようになるのである。この印象は論文のタイトル “The Iterative Transition Phenomenon between Periodic and Turbulent States in a Dissipative Dynamical System” によく現れていると思う。（英語としてそれが表現できているかどうかはよくわからないが、書いた方の気持ちとしてそうなのである。）その後、「リャプーノフ指数が正となるパラメーター領域が正の測度をもつのか」という問題が数学者によって設定され、肯定的に解決されたようである。我々のもった印象が数学的にこのような statement として表現されることを知ったときは新鮮な感じがした。

分岐現象と実験との関係には特に関心があった。現実世界での実験事実との対応づけを考えると分岐現象は重要である。この点についてはいろいろと考えたが、結局実験家との協同した研究にまでは至らなかった。小さなアスペクト比を持つベナール対流系の実験でローレンツモデルと同様な分岐とアトラクターの存在を示したのは、残念ながらフランスのグループであった。このことはつくづく残念に思う。なぜ実験家と手を組んで世界で最初の実験を実行できなかったのか。それが出来るだけの見通しと、条件とが十分に整っていただけに、悔やんでも悔やみ切れないという思いがのこる。

分岐に関して経験的にしみじみと分かったことが一つある。数値計算のアルゴリズムを少し違ったものに変えた場合や、モデルが現象の真のモデルと少し違っている場合でも、どんな分岐がどんな順番に発生するかということはあまり変わらないということである。別の計算センターに行って同じ計算をして、前の計算結果を再現させようとするとき、結果が違ってあせることがある。そのようなときにはもとのパラメーターの値と少し違った値の領域を探していけば、パラメーターの絶対的な値は少しずれるのだが、もとの計算と同じタイプの分岐現象が見つかるものである。私はこのことを経験的に身につけたのであるが、初心者は結構慌てるものである。

ある日、長島知正さんの所に京大の当時マスターの院生だった津田一郎さんから電話がかかってきたことがある。「論文に載っているレスラー系についての計算結果が再現されなくて困っている。計算したパラメーターの値と初期値を教えて欲しい」という電話だった。我々の論文にはパラメーターとリャプーノフ指数の関係を示すグラフしか載せていない。「あまり杓子定規に考えずに近くのパラメーター領域を探索すれば同じような分岐図が書けるのに」と思って、パラメーターの値は教えないことにした。「島田達の結果と分岐点のパラメーターの値が違う」などとまじめに考えすぎて、無駄な時間を取らせなくなかったのである。

ちょっとだけ面白いと思ったのは、周期倍化分岐がシリーズで起きていき、その分岐点のパラメーター空間で、ある 1 点に集積していくように見える現象を、ローレンツ系とレスラー系で

観測したことである。意外と知られていない事だと思うが、René Thom の “Structural Stability and Morphogenesis” には、この分岐のシリーズとその分岐点の集積という事がちゃんと書かれていて、それを示す印象的な図も載っているのである (René Thom, “Structural Stability and Morphogenesis”, 1973, W.A.Benjamin, 6-1-F, 図 6.1)。Thom はこの本で、個々の単純分岐を elementary catastrophe、この集積点のことを generalized catastrophe という用語で表現している。私は、ローレンツ系とレスラー系で見つけたこの現象を、すぐに Thome の本にある generalized catastrophe の流れバージョンだと考えた。既に知られている事具体例の一つだと思ったのである。

Thom は elementary catastrophe ではキュリーの原理が働いて、分岐の前後で系の対称性は変化しないが、generalized catastrophe では対称性の変化が起こりうる。したがって、相転移のような現象は力学系の elementary catastrophe ではなく generalized catastrophe で記述されるだろうと述べている。当時基礎物理学研究所で開かれたある研究会で、私は「ローレンツモデルで、ある種、相転移に似た事が起こるんです。」と口走ってしまい、川崎恭治先生から「相転移に似たこととはどういうことですか？」と質問され答えられなかったことを記憶している。統計力学という相転移というものと、Thom が述べている力学系の generalized catastrophe としての相転移との間をどう橋渡ししてよいのか、よく分からなかったのである。川崎先生と研究上の話題で言葉をかわしたのはこの時と、あと一度、北白川学舎の 2 人部屋で川崎先生と同室になったときである。「エルゴード理論というのは、それが物理の問題と関係してくるならば私もその意義を認めます」との一言であった。

そのようなわけで私は、ファイゲンバウムがやったように、分岐の集積点でスケーリング則を考える、ということには思い至らなかった。分岐の集積点の前後で、周期解と非周期解（より正確には周期的カオス解）という時間的な対称性の変化ということにより強く意識が向いていて、周期解の側から臨界点に至る道筋を問題にするのではなく、カオス解の側からその動的なクリティカルスローイングダウンの現象を理解しようとしていた。緩和時間の逆数がリヤプノフ指数になるというような理論を構築できないかと思っていたのである。私の臨界現象に関する知識は、力学系理論の知識にくらべてはなはだ不十分なものだったのである。

分岐にはいろいろとあるが、2 次元のポアンカレマップで考えたときに中心多様体が 1 次元になる分岐にはその固有値が  $+1$  の場合と  $-1$  の場合とがあることをブルノフスキーの論文 (P. Brunovsky, Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick, 1968 & 69) で知り、長島さんと手分けをして解析した。私が  $-1$  すなわちピッチフォーク分岐の場合を担当し、長島さんには  $+1$  の場合をお願いした。

私の方はすぐに 1 次元リターンマップが書けたのであるが、長島さんの方がなかなか終わらない。それもそのはずで、固有値が  $+1$  の場合、つまりサドルノード分岐の場合は、分岐点直前ではいわゆるチャンネルが出来てしまって、時系列をプロットすると点がほとんどチャンネル周辺に集まってしまい、なかなかリターンマップの全体が浮かび上がってこないのである。理論としては中心多様体上の 1 次元写像がどうなるかが分かっているのだが、数値的に得られた時系列データからリターンマップの全体がなかなか描けない。困った末、 $+1$  の場合は予告だけして結



果を載せずに論文を投稿してしまった。

その直後に Manneville のフランス語の論文が出たのである。その後、Pomeau と Manneville はこの話を単純分岐としてではなく、チャンネル現象の方に着目して intermittency というものと結びつけて議論していった。おそらく、乱流の intermittency に関係するという見通しがあったのであろうが、我々の方では単純分岐の一つの例が見つかったという以上の意味は考えていなかった。乱流統計の問題にはそれほど知識も関心も持っていなかったのである。ただ Pomeau と Manneville のいう intermittency が本物の乱流統計で言うところの intermittency とは別物であるとはその時以来ずっと思っている。私は乱流統計の intermittency に相当する力学系の特殊な不変集合というものが必ずあるはずだとも思っていて、そのアイディアもある。そのことと Pomeau と Manneville の議論にはもう一つ重要な前提が置かれている。単にサドルノード分岐が起こるといふ局所的な性質だけではなく、その外側にカオスが広がっていて、このカオスの影響でチャンネルから脱出した状態が再びチャンネルに再投入されるという事象がランダムに起こるとしてよい、という点である。分岐点でリャプノフ指数が連続的にゼロに移行するのは、外側のカオス領域での正の拡大率とチャンネル部分でのゼロとの統計平均を見ているからであり、分岐をまずはリャプノフ指数でとらえるという我々の立場では、外側のカオスの効果について明確に理解できる。彼らの最初の議論では、この再投入過程のランダムさを作りだす要因についての言及が不十分であった。たとえば、チャンネルの外側にカオスとは別の種類のアトラクターが広がっているとしたら、彼らの言う intermittency とは全く別のことが起こるではないか、とその当時から考えていた。

ともあれ、ローレンツモデルやレスラーモデルでピッチフォーク分岐やサドルノード分岐がぞろぞろと出てくるといふ事実の認識はほんの少しだけ我々の方が Pomeau と Manneville 達より早かったことは確かだと思う。この辺はリャプノフ指数を計算してそこから分岐を探るといふ方法の有利な所である。分岐現象そのものの解析には、先に挙げたブルノフスキーの論文が導きの糸として大変役にたった。ブルノフスキーの論文ではピッチフォーク分岐を単に分岐 bifurcation とよびサドルノード分岐のことを対消滅 collapsation と呼んでいる。当時の私はそういう言い方しか知らなかった。

長島知正さんとの仕事が一段落したころ、日本物理学会誌に日本語の解説記事を書かせてもらった（長島 知正，島田 一平「Strange Attractor をめぐって —統計力学の立場から—」日本物理学会誌 **33** (1978), 505-510)。この仕事を始めてから半年位しか経っていなかったが、この記事は実にタイミング良く、それまでの我々の仕事をまとめて発表することができた。今から考えても、よくぞこの時期に我々の仕事に目を付けて原稿を依頼してくれたものと学会誌の編集担当者の眼力の確かさには驚かされる。この日本語の解説記事をドイツで Haken が読みたがって、当時 Haken の所にいた日本人のある研究者に翻訳をしてくれるように頼んで来たそうである。これが本当だとすれば、すこし鼻が高い。

## 11 Lyapunov Spectrum の計算

その直後だろうか、長島知正さんと full paper を書き始めた。タイトルは “A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems” (Ippei Shimada and Tomomasa Nagashima, Prog. Theor. Phys. **61-6** (1979), 1605-1616)。ずいぶんと大上段にふりかぶったタイトルを付けたものだと思う。この論文でリアプノフ指数をその最大のものだけでなく 2 番目, 3 番目と系の自由度の数だけ計算した。この計算は私には全くトリビアルな事で、ただプログラムを書くだけだった。私の中では、最大のリアプノフ指数を計算する Rayleigh 商のアルゴリズムを使うだけの話だったのである。ベクトル場の接ベクトル空間でその計算をやれば最大のリアプノフ指数が求まり、接テンソル空間として 2-Form の空間でやれば面素の最大の拡大率が、3-Form の空間でやれば体積要素の最大拡大率が、 $\dots$ , という風に  $n$ -Form の計算までやればよい。常に最大の拡大率が Rayleigh 商のアルゴリズムよろしく自動的に求まるのは全く自明のことである。リアプノフスペクトルは引き算をすればよい。ここで大切な点は、接テンソル空間での  $n$ -Form の計算というのはそこでの Riemann 計量をどう取るかということにはまったく依存しないということである。この事だけは学部時代の卒業研究などできっちりと理解していたので、数値計算をするにあたって全く気にする必要がない事がわかっていた。(この事が私の中に強く印象づけられたのは、卒業研究で Abraham の本を読んでいるときに、鈴木康孝先生から「位相空間のリュービル測度を等エネルギー平面上の不変測度に reduce する際に  $1/\|\nabla E\|$  とあたかも計量に依存するかのようを書くのは不純です。測度は計量に依存しないはずです」と指摘されたことがずっと記憶に残っていたのである。) 計量は適当にとればよいのである。我々の計算法を Gram-Schmidt の直交化法をつかったアルゴリズムであるかのように形容する方が結構たくさんおられるのだが、私から言わせれば何が直交かということにはまったく依存しない事を計算しているつもりなので、このような言われ方には困惑するばかりである。

## 12 計算機の誤差 ?

長島知正さんとの仕事が進行している頃、物理学会で中村紀一先生とお目にかかった。この出会いは印象的であった。当時日電の中央研におられた中村先生、私、同じ北大の柴田清君がこの順番に学会で発表したことがある。1977 年 9 月の日本物理学会である。その時まで私は中村紀一先生とは面識が無く、樺島さんの GUN ダイオードの実験の論文でそのお名前を知り、中村先生が GUN ダイオードのモデルを数値計算で調べていることは知っていた。当日の中村先生の発表は「散逸系の軌道不安定性と統計的性質」、私が「散逸力学系の bifurcation とエルゴード問題 I」、柴田君が「II」。中村先生は GUN ダイオードのモデル系で 2 本の軌道のずれが時間の指数関数で増大する計算結果を示し、このような系では決定論的な力学系でも確率的にしか記述できないと明確に主張された。中村先生のモデルは自由度が数百程度の有限次元力学系であり、当然 3 変数のローレンツモデルにも同様の事が成り立っているという主張である。

私は中村先生がこの点で私たちと全く同じ考えであることを理解した。講演が終わると、ま

ず久保亮五先生が質問に立たれた。「有限の自由度を持つ力学がエルゴード性を持ち、確率的にしか記述出来ないという主張には納得できない。力学系がエルゴード性を持つのは系の自由度が無限に大きい極限においてであり、もし計算結果がそのような様相を示しているのならば、それは数値計算にともなう誤差のせいであろう」という内容の発言であった。次に質問をされたのは松田博嗣先生。ほぼ同様な内容の発言であったかと思う。誤差にともなうより技術的な内容であったかもしれない。中村紀一先生はあの独特の人なつっこい目をくりくりとさせて笑っていたのだが、久保先生と松田博嗣先生の質問にどの様に答えられたのかは私の記憶にない。

中村先生の仕事に対するこのような言い方は我々の仕事に対する言いがかりでもある。我々の結果を誤差のせいにされたのでは、ここは絶対に後へは引けない。幸いにして私の後が、同じ研究室の柴田君の発表である。2人分の講演時間を全部使って力学系理論の講義をしなければなるまい、と腹をきめた。予定していた私の講演では、この問題には既にカタがついているのでローレンツ系とレスラー系での分岐の話をするつもりだったのである。私の頭は力学系理論を物理屋にどうやって理解させるように話しをするかを巡ってフル回転を始めていた。前の方の席から富田博之さんがやってきて「大変なことになりましたねえ」と言っていたずらっぽく講演前の私に話かけてきた。私は2人分の時間をたっぷり使って力学系がエルゴード性と混合性をもつ機構について講義をした。私の話に対して質問は何もなかった。

この文章を書くにあたった当時の記録をしらべてみると、この講演で中村先生は決定論的な力学系が確率的にしか記述できなくなるような状況を2つ挙げていて、一つはアトラクターの吸引域が複雑に入り組んでいる場合で二つめは strange アトラクターによる場合であるとしている。ローレンツ系は当然後者であり、前者の例として中村先生自身の論文と Thom の “Structural stability and Morphogenesis” にある例を挙げている。私は分岐集合の集積点の話を Thom の本で見ているのであるが、中村先生も Thom の本の別の所を見ていたのか、と今にして気がつかされた次第である。

さて、この学会での久保亮五先生と松田博嗣先生の主張は、我々と中村紀一先生が取り扱っていた系に対しては明らかに誤りである。したがって一般論としては誤りであるのだが、線形の力学系に限定して言うならば正しいのである。この点について少し私の考えを述べて置きたい。例えば線形のパネでつながれた格子振動系に一つだけ質量の重い粒子をつなぎ、この粒子の速度の時間相関関数を計算しておいて、バルクの格子系のサイズを無限大にすると、この特別の粒子の質量が周りの格子を構成する粒子の質量より充分重いならば、相関は有限の時間で消失する。このことは厳密に証明できる。久保亮五先生達の主張の誤りは、この線形格子振動系に見られるような状況を一般化してしまい、これ以外のメカニズムで時間相関の喪失すなわち力学系のランダム化が起こりうる事を認めないというところにある。翻って我々の主張は、ベルヌーイシフトのような抽象力学系ではごく当たり前のこととして証明されている系の混合性とエルゴード性が、常微分方程式で記述されるようななめらかで有限次元の力学系に対しても同じように拡張できるというものである。ローレンツモデルに関していうと、このことは最近証明されている。

このように見てくると、力学系がランダムな性質を有するようになる2つのメカニズムが存

在するように見える。一つは線形の無限自由度系に対して機能するメカニズムであり、他方は有限次元の非線形系に対して機能するメカニズムである。私は、有限自由度の非線形力学系が混合性を持つ状況については、系の位相空間での変換の幾何学的な性質としてはっきりと理解できるのだが、線形の無限自由度系でその時間相関関数が消失するメカニズムは理解できない。相関関数や Green 関数についての解析的な表示を用いて、その中に含まれるパラメーターについて極限をとるという操作が、力学系の位相空間での振る舞いにどの様に関連しているのかがイメージできないのである。そこで私なりに一つの仮説を立ててみた。それは、線形の無限自由度系で相関の喪失が起こる場合には、そこでも有限自由度非線形力学系で起こったような軌道不安定性が実は起こっていて、したがって両者での混合性の発生機構は同じなのではないか、という説である。有限自由度の線形力学系では、それが軌道不安定性をもったとしても、軌道のズレが無限に拡大していだけで、非線形性による回帰が起こらないので混合性は起こらない。しかしながら、上に挙げたような線形力学系ではその系が有限自由度である場合と無限自由度である場合とでは全く異なっていて、無限自由度になった場合のみある理由によって位相空間の混合性を獲得するのである。

いつだったか、高橋陽一郎さんが私に、これと同じような事を言っていたように記憶している。高橋陽一郎さんはその著書の中で O.Lanford による興味深い例を紹介している (高橋陽一郎, 「力学と微分方程式」, 岩波書店, 2004, 174-175)。ビリヤードという決定論的な古典力学系でその玉の数が無限個になると、突如として解の一意性がなくなってしまう。O.Lanford の例ではその様子が直感的に納得できる。しかも、線形の格子振動系が無限自由度の極限で突如として混合的になる状況を暗示しているように思える例である。

さらにもう一つ暗示的な例をあげよう。ベルヌーイシフトのような混合性を持つ系の線形ユニタリー表現を考えると、Lebesgue 式スペクトルという独特の性質をもった可算無限基底の存在が示せる。この基底で時間発展のユニタリー演算子を表すと、系の状態の時間発展はちょうどラダー演算子の作用のように基底から基底へと一方向に流れていき、初期状態と時刻  $t$  の状態が重なりを持っていてもやがて重なりがなくなり、相関が喪失する。我々が主張する非線形の有限自由度力学系が混合性を獲得する場合は、多かれ少なかれ、このような Lebesgue 式スペクトルが関係しているのである。だとすれば、線形の力学系が無限自由度になった場合、その系が丁度 Lebesgue 式スペクトルのような構造を表の力学系として持つようになればよいのではないか。その場合、無限自由度線形力学系はその裏側に混合性をもつ有限自由度力学系をもつことになるだろう。

松田博嗣先生と久保亮五先生が指摘されたもう一つの点は、計算機による数値誤差の影響である。確かに、計算機の丸め誤差がガウス過程という確率過程の性質を示す、というような研究は過去にあった。しかし、これはどうにも理解できない。たぶん議論のどこかで中心極限定理のような手続きを仮定してしまっていると思われる。現代のデジタル計算機上で有界なアトラクター近傍の力学をモデル化すると、どうしても決定論的な有限状態機械になってしまう。計算機で本物の乱数を作ることはできない、という議論の根拠もここにある。計算機の上では全ての力学は周期解に落ち込むしかないのである。ではそのような有限状態機械であるデジタル計算機でどう

やって乱数に近い系列を発生させるか、という逆の問題が生じてくる。実は、この答えが我々の数値計算なのである。久保、松田両先生のご指摘はこの点ではなほ教育的である。とくに、計算機科学の側面から非線形力学系のエルゴード性や混合性の意味する所を明らかにする仕事は、まだ完全に完成しているとは言い難い。何故か、計算機でやってもうまくいってしまうのである。その理由をきちんと知りたいものだ。ただ、これとは別に、我々の当時の主張の大方はデジタルな論理（証明）という手段できちんと確認されている事をお断りしておかなければならない。

### 13 不変測度、エントロピー

記憶が正しければ、長島知正さんとの full paper の下書きを検討していたのは、北大から京都に、そして九州大学へと移動していた頃である。御茶の水の今はなくなった名曲喫茶の一つ（たぶんウィーンだと思う）で長島知正さんと原稿の手直しをやった。そして、論文が出版されるまでは同業の研究者には内容を話さないという事にした。九大森研に半年居たのだがこの論文の内容は一切話さなかった。そして論文が出版され、私が九大から北大に戻るとすぐに、森先生からの反撃が来ることになった。我々が計算したリヤプーノフスペクトルの3つの値を用いて、森先生はローレンツアトラクターが2.06次元である事を示されたのである。

論文のタイトルから推量すると、この頃から少しずつ、自分の数値計算が個別エルゴード定理の一変種によってその極限の存在が保証されるという性質のものであることを気にしだしていたようだ。松原武生先生から非線形力学系の講義を受けたのと同じ頃に、寺本英先生の数理生態学の講義も北大の集中講義で聴いていた。その中で寺本先生は Lotka-Volterra の方程式が不変測度を持つこと、その不変測度から生態系のエントロピーを導入し、熱力学的な観点から生態系の遷移現象や極相という概念を理解しようという遠大な研究プログラムを話された。とにかくエルゴード定理を使うには不変測度が必要なのである。早稲田の斎藤研でのエルゴード問題の数値的な研究はハミルトン力学系についてのものであるから、不変測度の存在はリュービルの定理によって保証されている。ところがローレンツモデルは散逸力学系なので、ハミルトン力学系のようにあらかじめ不変測度が用意されているわけではない。論文のタイトルに Dissipative Dynamical Systems とあるように、このことが気になり出していたのである。

寺本先生の Lotka-Volterra 系の話は印象に残っていて、必ずしもハミルトン系ではなくても何かしらの不変測度があればそれを使って議論すればいいはずだ、という方向で納得していこうとした。参考になりそうな力学系理論を文献で探したところ、白岩謙一先生と、十時先生の著書（白岩謙一，力学系の理論（数学選書），岩波書店（1974）；十時東生，エルゴード理論入門（共立講座 現代の数学 30）（1971））を見つめることができた。そして、一面識もない十時先生に、九大へ向かう途中だったろうか、直接面談を申し入れたのである。数理解析研の先生の部屋におじゃまし、一通りこちらの話をすると、先生は Adler の Topological Entropy の論文 (Roy L. Adler, Topological Entropy and Equivalence of Dynamical Systems, Memoirs Series, No. 52 (1979/6) の preprint) を私に手渡すと、黒板で講義をはじめた。定義、定理とつづく数学者流の講義を聴講者が私一人しか居ないのに延々と続けられるのである。Topological Entropy などというのは初

めて聞く概念であり、こちらが理解しているかどうかはお構いなしの先生の話からは、状態空間の分割ということからエントロピーを導入すること、それがベルヌーイシフトのような抽象力学系と何らかの関係がありそうだということがおぼろげながら伝わってきた。しかしながら、ローレンツモデルのような力学系と Topological Entropy がいったいどう関係するのかについては先生は何もおっしゃらずに話を終えられてしまった。

翌日数理解析研での数学の研究会に出席してみると、十時先生は何と、私にして下さった Adler の Topological Entropy に関するレビュートークをされるではないか。十時先生は私に向かって講演の予行演習をされたのだな、と思った。ともかく、十時先生は私のローレンツモデルの計算の話聞いた上で、Topological Entropy の話をされたのだからこれらの間には何らかの関係があると先生は思っておられるにちがいない。これがそのとき私が考えたことである。

## 14 九大で出会った人々

当てにしていた蔵本さんはドイツの Haken の所に出張中で不在、森先生に力学系についての質問攻めにあう、という形で私の九大居候期間は過ぎていった。その間に長島知正さんとの full paper の出版が進んでいた。

森研に滞在していた Rikvold 夫妻とは仲良くなった。P.A. Rikvold 氏は気さくなノルウェー人で、森研のセミナーで Marotto の論文 (F. R. Marotto, Snap-back repellers imply chaos in  $R^n$ , J. Math. Anal. Appl. **63** (1978), 187) を紹介した時の私の英語のだじゃれに、ただ一人大笑いしてくれた。当時森研では、国際会議での発表に備えてセミナーは英語でやるという森先生からのおふれが出ていたのである。ある日、Rikvold 夫人と話をする機会があり、彼女の専門が computer science であることを聞かされた。ところがその当時の私は computer science なるものがいかなる研究分野なのか、全く理解していなかった。私が数値計算法などの研究をするのか、と的はずれな質問をしたためがっかりしたようであった。10 年位してから Wolfram や Crutchfield たちと話す機会があり、computer science における複雑性の量的な評価の問題とカオスの関連を知るようになるのだが、この時の私には猫に小判であった。Rikvold 夫人は tatami mat の発送手続きをすませて、Rikvold 氏を残して帰国した。

同じ居候仲間太田隆夫氏がいた。森研のセミナーではほとんど顔を合わせることはなかったが、一度、かしわ鍋をごちそうしてくれた。私が蔵本さんのおっかけなら、彼の方は基礎研から九大に移られた川崎先生のおっかけであった。彼は私の話を聞いて「ローレンツモデルも面白そうだけどなあ」と言って 1 点を見つめた。太田隆夫氏はその後パターンの生成の方面で活躍されることになる。

当時九大の有機化学の教室で助手をしていた大野克嗣氏がやってきて、ずいぶんと長く話し込んだ。彼は、これからは生物のことをやりたいのだと盛んに力説した。自宅で粘菌を飼っているという話もしていたように思う。非線形非平衡熱力学と生命の理解という点で私も思うところがあり、話は大いに盛り上がった。後で聞いた話だが、この時期にやはり九大の物性実験にいた林初男氏もまた、大野克嗣氏の仲間であったようで、生物をやりたいと気炎をあげていたという。

その後林氏は本当に神経系の実験を始めてしまい、大野氏がシカゴに旅立ってしまった後、研究室のボスとの間で問題になり、大変な苦勞をしたということである。北大P-クラブと同じような熱い空気が当時の九州にも巻き起こっていたのである。

大野さんとは話す機会があったが、当時、彼の仲間であった林初男氏とは全く別のルートからおつきあいが始まることになった。九大で大野さんと会ってから何年か後の物理学会で、川島さんがどこからともなくふっと林初男氏を連れてきた。“連れてきた”という変な言い方だが川島さんによると、気の合う人間はにおいでわかるのだそうである。川島さんは目も良くて（北大の構内が広いせいもあるが）100メートルから50メートルの範囲に接近すると、必ず先にこちらが川島さんに認知されてしまう。その後、学会のたびに3人は連れ立って行動するようになるのだから、川島さんの嗅覚は確かなのだ。北大P-クラブの一員であり、博士課程の途中で物性の実験から非平衡熱力学の理論へ転身しようとしたことのある川島さんが、その嗅覚で物性実験から神経生理学へ転身した林初男氏を私に引き合わせてくれたのかもしれない。林初男氏は世界で2番目に生理学的な実験でカオスを観測した人である。材料はイソアワモチという軟体動物である。1番目はマッグギール大学のレオングラスのところのゲバラ氏、3番目が合原一幸氏で、こちらはヤリイカの巨大神経系。

合原さんのヤリイカの実験については、私は当時慶応の院生だった丹生さんから実況中継を受けている。丹生さんは合原さんとの実験結果を毎週のように実験室から私の所へ電話で報告してくれたのである。合原さんがこの事を知っていたかどうかは定かではない。たぶん、丹生さんが合原さんの実験を手伝っていたのではないと思う。合原さんとは時々地下鉄千代田線の新お茶の水駅周辺でばったり顔をあわせ「おう！」とか言ってすれ違うくらいだった。

次に川島さんが連れてきたのは、当時麻布獣医大学にいた永井喜則さんである。こちらもすぐに仲良くなった。彼は早稲田の斎藤研出身で、いつでもご飯を人の3倍は普通に食べる。この永井さんつながりで、東工大の椎野正壽さん、そして当時東海大学にいた深井朋樹さんが加わる。これらのメンバーは学会のたびになぜか知らないのだが、そろそろと連れだって行動するようになった。深井さんはそのころ椎野さんと組んで神経モデルを手がけ始め、素粒子論から神経生理学へと分野を変更しつつあった。永井さんは川島さんに劣らず実に世話好きな人で、彼のプロモーションでとうとう九工大の林研と日大の私の研究室とで合同の合宿セミナーを2年間続けることになった。その頃、林さんは九大歯学部の石塚智さんとラットの海馬のスライスを使った実験を始めていた。合同セミナーの2年目には林研で64個の電極をつくり海馬の神経ネットワークのダイナミクスを調べようということになった。私は大自由度の非線形力学系の観点から理論解析を分担する計画であった。電極の作成は“プラ板”を使うことで見事に成功した。透明のプラスチックの板に絵を描いて火であぶると縮んでプレスレットなどを作れるあれである。はじめは大きく作っておいて火であぶると縮むので、丁度、海馬のスライスに64本の電極を刺すことが出来る大きさになるのである。しかし、今から考えると間抜けな話だが、電極が完成し、64本の信号が取れるめどが立ってから初めて、ロックインアンプが64台要るなあ、という話になった。とても金が無くて買えそうもないのだ。このプロジェクトは電極のみで終わった。これは、1995年のこと

である（永井喜則，林初男，島田一平，シナプスの可塑性とニューロン集団の非線形動力学，国士舘大学情報科学センター紀要 **19** 別冊，35-95）。もしお金があれば、海馬の神経ネットワークからの 64 点での同時記録データーが、かなり早い時期に取れていたかも知れなかったのである。

人のつながりで話の時間軸がどんどんずれ込んでしまったが、ここでまた私の九大時代にもどそう。ドクターの 3 年目に入りそろそろ博士論文と、学振の奨励研究員へ応募するために次の年からの研究受け入れ場所とを考えなければならなかった。

相澤さんはベルギーからもどり京都に赴任していたが、ローレンツモデルのパワースペクトルを計算した仕事以来、研究上のやりとりは途切れていた。北大の物理教室に博士論文を提出するとして、ローレンツモデルのような力学系理論が果たして理解されるのかということも心配であり、物理の人間に力学系の結果を納得させる論理を考え出さなければならなかった。ローレンツモデルにエルゴード定理を使うにはローレンツアトラクター上の不変測度の存在を示さなければならぬ。ローレンツアトラクター上の不変測度を調べるには、位相空間を分割して記号列に表現し記号列空間での不変測度を調べる方がやりやすい。ここで、私にとって都合が良かったのは、記号列での表現は 1 次元イジングスピン系の配意空間と言い換えればよく、ローレンツアトラクター上の不変測度は 1 次元スピン系の熱平衡分布とすることが出来る点である。北大の物理の教授連もこれならば理解するだろうと思ったのである。ただ、長島知正さんにはこのアイディアははなはだ評判がわるい。九大の森研の連中とこのような議論ができるという雰囲気もなかった。

私は北大にもどり一人で不変測度の計算をしようと決め、九大を後にした。川崎先生に挨拶に行くと、「島田さんは北大に戻られるんですね」と念をおされた。次の年に王子セミナーという国際会議が予定されていて、九大の森先生のグループと、京都大の富田先生のグループとが研究上のデッドヒートを繰り広げていたのである。そういう世界を全く知らなかった田舎の大学院生にも何かを感じざるを得ない言葉であった。

## 15 ローレンツアトラクター上の不変測度

北大に戻り、ローレンツモデルのアトラクター上の運動について、その力学量の長時間平均を realize する定常統計分布について計算を始めた。一本の軌道からデーターをサンプリングするには 2 つの方法が考えられる。1 つは一定の時間間隔でサンプリングするやりかた、もう 1 つはポアンカレマップ上の点をサンプリングするやりかたである。最初は後者の方法をとった。次に座標値を 2 シンボルの記号列に表現した。ローレンツモデルの 3 つの不動点のうち原点ではない 2 つの不動点について、そのどちらか一方を軌道が一回まわるごとに、右を回るときには +1、左を回るときには -1 とスピン状態を決めていくのである。正確に言うと原点に吸い込まれていく軌道も存在し、これについては 0 という記号を割り当て、スピン状態を 3 種類考えなければならぬのだが、原点に吸い込まれる軌道は確率ゼロだとして無視することにした。数値計算ではこのような軌道は現れない。この方法はローレンツ系の位相空間を分割したというよりは、そのポアンカレ断面を分割したことに相当する。したがって、記号 1 つ分の shift に相当する時間発展は元の連続時間の力学系で考えると一定の時間の時間発展を意味しない。さらに、原点に吸い込ま



れる軌道に近い軌道ほど記号 1 つ分の shift に相当する時間は長くなり、原点に吸い込まれる軌道に漸近するとき、発散する。これは、ローレンツモデルのポアンカレマップを考えるとときに深刻でやっかいな問題を引き起こすことになるのだが、その時の私は、ローレンツモデルを 1 次元スピン系に表現できることと、ローレンツモデルの不変測度がスピン系の熱平衡分布に対応するという物理屋向けにわかりやすい説明の仕方が出来ることに満足していて、この深刻な問題にはいたって無頓着であった。

このアイデアを高橋陽一郎さんに話したところ、可能な  $2^n$  の  $n$  乗通りの記号列が全部出てくるか、それともそれらのうち特定のパターンが禁止されているということが起こるかどうかを調べるように言われた。これはトポロジカルエントロピーの評価につながる。十時先生から受けたトポロジカルエントロピーの講義はここに来てようやく具体的な計算課題となったのである。当時の計算機的能力からして現実的なのは長さ 10 くらいの記号列までで、この範囲で全ての可能な記号列が出てくる事はすぐにわかった。トポロジカルエントロピーは  $\log_2$  以下であるという評価しか出来ないという結果である。記号列とポアンカレ断面上の座標値を対応させるグラフを強引に描かせてみると、良い精度で 1 対 1 の対応関係が成り立っていきそうな図が得られた。高橋陽一郎さんに聞いていた generator としての性質を持つコード化が得られているという見通しを持つことができた。あとはひたすらサンプル数を増やしていき、収束した分布の形状を求めるだけである。

この段階で印象的だったのは、2 シンボルの記号列を 2 進小数に表現して経験分布の分布密度を実数区間  $[0,1]$  上に描かせてみると、美しいフラクタルなパターンとして分布密度が描けることである。長島知正さんが“ゲテモノ”といって不快感をあらわにされたのは、たぶん、なめらかな流れとしてのローレンツモデルを解析するのに、このような悪魔的な非解析的オブジェクトを持ち出す事への違和感を表明されていたのだろう。分布密度のこの形状は、私には美しいものに感じられた。そして、ローレンツアトラクターの安定多様体方向に、折りたたみによって出来ているはずのカントール集合が、この分布に現れているのではないかと思ったのである。これはだいぶ後になって、早稲田の相澤洋二さんの所で、ローレンツアトラクターのポアンカレ断面を執拗に拡大していったそのカントール集合的な様相を可視化しようと、大変な努力をされ、結局見えたか見えないかよくわからなかった、といういわくつきのものである。この点はカオスの典型例として上田先生のジャパニーズアトラクターの方がローレンツアトラクターに比べて圧倒的に勝っている点である。上田先生のアトラクターはそのまま安定多様体方向のフラクタルな構造が目に見えるのである。

結論からいうと、私の得た定常統計分布のフラクタル構造は必ずしもローレンツアトラクターの安定多様体方向のカントール集合を見ていることにはならないのである。ポアンカレ断面上の点の座標と 2 シンボル記号列から作った 2 進小数の対応をグラフにすると、悪魔の階段状のフラクタル構造が現れる。座標変換がフラクタルならば、もとの位相空間での分布密度がなめらかであっても変換された座標で表した分布はフラクタルになり得るわけで、位相空間での分布密度がなめらかであるという可能性は排除できないのである。

2進小数の区間に表示した分布密度がフラクタルな構造をもつということに必要以上にとらわれていた当時の私は、ここで、研究の戦略としてミスを犯した。分布密度の示すフラクタル性は何らかの意味で系の繰り込み不変性を意味しているであろうから、ローレンツモデルの力学量の長時間での振る舞いにはそれに対応した特異性が現れるかもしれない、と予想したのである。ローレンツアトラクター上の定常分布は、座標を2シンボルの記号列に表した場合、1次元スピン系の空間的に一様な分布を意味する。1次元スピン系が相転移を起こすためには、スピン間の相互作用が長距離相互作用でなければならない。これを見極めるために、サンプリングして得た経験分布から相互作用をするスピン系の熱平衡分布を決定する、すなわち、スピン間の相互作用の強さを決めなければならない。サンプリングされたデータが経験分布に収束する速さはサンプル数  $N$  として  $\sim 1/\sqrt{N}$  であり、分布密度の小さな所の密度値はなかなか収束しない。本来ならばここで統計学的手法で分布の推定を行うべきなのだが、当時の私はひたすらサンプル数を増やすという強引な方法をとろうとした。そして、重大な問題に直面した。その年度の計算機に使える予算を早々と使い切ってしまったのである。分布は収束していない。スピン間の相互作用の大きさが決められない。ピンチであった。丁度その時、名古屋大学のプラズマ物理学研究所から研究会の誘いが来た。私は研究会に参加して発表するから、プラズマ物理学研究所の計算機のマシンタイムを提供して欲しい旨、申し出た。当時のプラズマ物理学研究所の計算機センター長、佐藤哲也先生に直接談判したところ、1週間の滞在費とその間のマシンタイムとしてこのぐらいで良いですか、と書いて書き付けを渡された。そこには北大で私が使っていた1年分のマシンタイムが書き込まれていた。

私はプラズマ物理学研究所の大型計算機でひたすらローレンツモデルの軌道を計算し、2進コード化してスピン間の相互作用を nearest neighbor, next nearest neighbor, next next nearest neighbor, ... と求めていった。その結果、スピン間の相互作用の強さは距離の指数関数で減少していく事がわかった。つまりローレンツアトラクター上の定常統計分布は短距離相互作用するスピン系の熱平衡分布になるのである。したがってそのゆらぎは臨界的な性質は示さない。記号列を区間  $[0,1]$  上の2進小数にしたとき、区間  $[0,1]$  上の分布密度に現れるフラクタル性はゆらぎの臨界的な特異性とは無関係であったのである。私の予想は見事にうらぎられた。

このときのプラズマ物理学研究所での研究会には、D. Ruelle も参加して話をしている (D. Ruelle, What are the measures describing turbulence ?, 核融合研究, 40 別冊その 4 (1978-10), 4-12)。彼はここでローレンツアトラクター上の不変測度のある意味での一意性について一つの推測を述べているのだが、私は自分の計算結果が何度やっても初期条件には依存しない事を経験で知っていて、そのことは明らかだと思っていた。これは Ruelle の述べた推測を私の計算機実験が支持しているということなのだが、私はその事に気がついていなかった。

その年の王子セミナーの2週間ほど前に Ruelle が北大にやってきた。私は彼にローレンツアトラクター上の定常統計分布についての私の結果を話した。Ruelle は「お前の求めた分布から Kolmogorov-Sinai エントロピーを求める事ができるはずだ。その値とお前の計算したリヤプノフ指数の値が一致するかどうかを知りたい。」と私に言った。私はスピン系の配意空間に表現した

経験分布からスピン 1 個あたりのエントロピーとして Kolmogorov-Sinai エントロピーを求め、1 秒あたりではなくポアンカレ写像 1 回あたりリヤプーノフ指数を求め、それらが一致することを確認して、その結果を 1 週間後に京都での王子セミナーの会場で Ruelle に示すことができた。

## 16 王子セミナー

王子セミナーは私が生まれて初めて出席する国際会議であった。たぶん全ての講演が英語で話されたせいであろう、講演の内容はあまり覚えていない。今でもよく覚えているのは van Kampen 氏の講演の後、中野藤生先生がものすごい剣幕で van Kampen 氏に議論を仕掛けていた姿である。中野先生の世代の日本の統計物理学者にとって van Kampen 氏は長年の宿敵であり論敵であるらしい。この辺の事情は詳しく調べてみようと思いつつ何も果たせずに今に至っている。

もう一つ印象に残っているのは、会議の合間のコーヒブレイクでのできごとである。たぶん Zwanzig 氏であろうとおぼしき恰幅のいいおじさんがソファに座って私に手招きをしている。近づいて行くと Zwanzig 氏は大きな皿を持って、その中にどこから手に入れたのかドライアイスの塊を入れ、皿を傾けながら私にそれを見せるのである。ドライアイスは白煙をあげながら皿の中でシュルシュルと動き回っている。氏はニコニコと笑っているだけで何も言わない。英語に不慣れな私もそれを見ながらただ笑っていた。コーヒブレイクのときに Zwanzig 氏が私に皿の中でふらふらと動いているドライアイスを見せたのは、氏が、「お前のやっているローレンツモデルでの軌道不安定性やそれに由来する不規則運動は要するにこういうことだろう。」と言いたかったからであろう。私は Zwanzig 氏と量子の力学過程と確率過程との関連について議論する機会をみすみす逃してしまったのである。

王子セミナーの直後のサテライトセミナーでは、私も講演をすることが出来た。前日、宿舎で一緒になった大野克嗣さんは、セミナーでの講演を英文の原稿できっちりと用意されていて、それを練習していた。そこまで準備するのか、とびっくりした。私は、原稿なしのぶっつけ本番でいくと腹をくくるしかなかった。当日は Lebowitz 氏の講演の直後が私の講演であった。Lebowitz 氏はあの独特のかん高い声でときどき質問をしてくれたので、私のめちゃくちゃな英語の講演もなんとか話の筋を違えずに終えることができた。Lebowitz 氏はスピン間の相互作用が距離の指数関数で減少するということは、本質的に相互作用が無いことと同等であり、相関関数も有限の時間で消失するはずである、とのコメントをしてくれた。Ruelle 氏に伝えてあった Kolmogorov-Sinai エントロピーの計算結果についてはこのときの講演では、なぜか、話さなかったように記憶している。ともあれ、少なくとも Lebowitz 氏には私の話はちゃんと伝わったようであった。

## 17 6 年後の出会い

「サンタクルツから来たんだ」連中のうちの一人がそういった。よれたジーンズと長い髪、口ひげを蓄えた男の風貌から、私は十字架に貼り付けにされたキリストの姿を思い浮かべていた。

1979年12月、外には時折雪がちらつき、ロックフェラーセンターのクリスマスのイルミネーションがきれいだった。

我々はバルビゾンホテルの部屋の床に車座になって腰をおろし、紙パックの牛乳を回しのみしながらフランスパンとチーズだけの昼食を共にした。ニューヨークアカデミーオブサイエンス年会会場のスノップな雰囲気と比べて、我々にはこの方がよほど落ち着いた。

会場で、彼らは私の周りを取り囲んでいた。Ruelle氏が講演の中で言及してくれた私の計算についていろいろと聞いたがったのである。くしゃくしゃの白シャツを着たイタリア人が「それは定理だよ」とささやいて、我々のそばを通り過ぎていった。(実はそれは既知の定理ではなく、ちゃんと証明されたのは20年後のことであったのだが(W. Tucker, The Lorenz attractor exists, C.R. Acad. Sci. **328** (1999), 1197-1202).)

彼らが私と同じような事を考えていることはすぐわかった。以前からの知り合いに会ったような懐かしさを感じていた。実はずっと後になって分かったことであるが、その当時の彼らもまた微視的な現代物理学からはドロップアウトしつつあって、そのころU.C. サンタクルツに来ていたR. Abrahamが彼らの数少ない相談相手であったそうである。私が学部学生時代に出会ったThe Foundations of Mechanicsの著者であるR. Abrahamのもとへ彼の本の挿絵を描く仕事で出入りするようになっていたのが、彼らのうちの一人Robert Shawの弟のChristopher Shawであったという。それは何とも不思議な出会いであった。

## 18 そして何も変わっていない

九十九里の海岸で始まった私にとっての力学的世界の物語をここまでたどって来て気づいた事がある。私にとって力学というものはその出会いの頃から実は何も変わっていないのではないかということである。

カオスとの出会いによって力学観が大きく変化した、という考えは実際とはまったく違うようだ。満々と海をたたえた大地がごうごうと宇宙の闇の中を動いていくということは、2重振り子が非周期的な振動することと実は何も変わらない。全てはニュートンの運動方程式によって完全に支配されているのである。確率的に記述されるサイコロの目の出方もこれと何も変わらない力学原理のなせるわざなのだ。力学的原理はそれまで曖昧にされていたその適用限界をこえて、より広い場面でも成り立つのである。私は力学についてそれまでよりも少しばかり広く理解できるようになったのである。力学系の初期条件をだれがどうやって選んだのかという点を除いては。

## 19 カオスを超えて

ここまで、カオスをめぐる私の個人的な体験を振り返って来た。以下では、力学の複雑な様相をめぐる未解決の領域について、少し触れて見たい。その前に、カオスを「基本的なカオス」と「狭い意味の拡張されたカオス」とにわけて考察することにする。これによって、1960年代に始ま

り 1980 年初頭に成し遂げられたカオス概念の新たな進展について、その内容を明確にすることができる。

「基本的なカオス」は、1960 年代から始まるいわゆるカオス研究より以前の、ポアンカレの時代から知られていた。アダマールによる負の定曲率リーマン多様体上の測地流 (J. Hadamard, “Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques”, J. Math. Pures et Appl. 4 (1898), 27-73) がその典型例である。アインシュタインもこれらを知っていた。彼は不変トーラスを持たない力学系が存在し、そのような系は量子化できないことから、量子論は不完全な法則だと主張した。そこでの量子化とはゾンマーフェルト、エプシュタイン、石原らの提案したボーアの量子化条件の一般化をさす。不変トーラスの非存在は保存系における基本的カオスの特性である。(島田一平, 「Chaos 理解への序章」, 物性若手夏の学校講義録, 1983, 東京工業大学物性若手グループ編, 200-201)

このように古い歴史をもつカオスが 1960 年代以降に再び注目されるようになったのはどういうことなのだろうか。基本的なカオスは有限型のサブシフトと同型な力学系であり、幾何学的には一様双曲的な不安定力学系である。ところが明らかに双曲性が破れているにもかかわらず、観測される軌道の複雑な振る舞いが双曲的な不安定力学系とほとんど同じになる力学系が、60 年代になって見つかったのである。この範疇を「狭い意味の拡張されたカオス」ということにする。上田院亮によるジャパニーズアトラクターやローレンツアトラクター上の運動がこの範疇に入る。狭い意味の拡張されたカオスは、双曲性の破れの影響を測度ゼロの例外的な軌道を取り除くことによって無視することが出来るという、測度論的に良い性質を持っている。一つの力学系に対して理論的には複数の不変測度が存在するという不都合も、ある意味で自然に選択される一意的な測度 (SRB 測度) の存在によって解消された。これによって、現実的な状況では基本的なカオスと狭い意味の拡張されたカオスの差が観測にかからない理由も理解できる。このような状況では、アナログコンピューターや浮動小数点演算を使った計算機シミュレーションによる探索が非常に効果的であった。60 年代から始まるカオス研究の成果は、この狭い意味の拡張されたカオスの例を見つけ出したこと、そして、それがなぜ基本的なカオスと同様の振る舞いを示すのかを明らかにしたことである。狭い意味の拡張されたカオスは基本的なカオスを含んで一般的なカオス概念を構成する。

力学の複雑な様相をめぐる未知の領域と言うとき、それは「基本的なカオス」と「狭い意味の拡張されたカオス」からなる「一般的なカオス」という既知の領域の外を指す。非常にまぎらわしいことに、いわゆる“ハミルトン系のカオス”, “大自由度カオス”などの言い方で述べられている現象の中には「一般的なカオス」の範疇を超えてしまっているものが多く含まれている。今までに得られている経験的な知識を総合すると、これらに共通するのは、ある意味での再現可能な複雑さである。双曲性や Transversality といった伝統的な構造安定性とはまったく異なる仕組みで実現する再現可能性というものが存在するらしいのである。そこでは、実数の連続性というアイデアと現実世界のノイズとの干渉によって現象が作り出される仕方が、「一般的なカオス」の場合のそれとはかなり異なる可能性が高い。

カオスによる機能の発現ということについても、「一般的カオス」は、実は、それほど高い機能を示さない。注目されている高い計算能力を持った力学的複雑さは、明らかに「一般的カオス」の埒外の現象である。

これらの事は、この分野の研究者に広く共有されている直感である。我々は、他分野の人間から見たら禅問答のように見えるであろうやりかたで、これをお互いに伝え合うことが可能である。しかし、それは未解決の問題であって、それらがカオスである事を論証しようとするよりは、それらの現象に共通する新たな性質を抜き出して、新しい概念を創出する方が実りある方向だと思う。その意味で、カオスは忘れ去られなければならない。