

多変数多項式のベキ級数根の桁落ち誤差…その 2

筑波大学数学系 佐々木 建昭(Tateaki SASAKI)
奈良女子大学理学部 加古 富士雄(Fujio KAKO)

概 要

多変数多項式の主変数に関するベキ級数根を Newton 法で、浮動小数を用いて計算する際、特異点の近傍で巨大な誤差が生じ得ることを 1994 年に発表した。その当時は原点から遠方での解析が不十分であったので、本稿では特に遠方での解析に重点をおいて報告する。展開点が原点から遠方の場合、展開点の近くに特異点があれば展開次数 k に比例する大きな桁落ちが発生しないが、近くに特異点があれば、場合によって k に比例する大きな桁落ちが発生し得ることを理論的に証明し、数値例で確認する。また、特異点近傍での安全な (大きな誤差を生じない) 計算法も示す。

本稿では定理の証明等は省略するので、詳細は論文 [SKK00] を参照されたい。

1 Newton 法と巨大な誤差

与式 $F(x, u_1, \dots, u_\ell) \in \mathbb{C}[x, u_1, \dots, u_\ell]$ を簡単に $F(x, u)$ と表す：

$$F(x, u) = f_n(u)x^n + f_{n-1}(u)x^{n-1} + \dots + f_0(u) \quad (1)$$

多項式 $f(u)$ の $u_1, \dots, u_\ell$ に関する全次数 (total-degree) を $\text{tdeg}(f)$ と表す。 $f(u)$ の中で全次数最低の項の全次数を位数 (order) といい $\text{ord}(f)$ と表す。有理式 $f(u)/g(u)$ の位数は $\text{ord}(f/g) = \text{ord}(f) - \text{ord}(g)$ と定める。多項式 $F(x, u)$ のノルムを $\|F\|$ と表す。ノルムとしては、たとえば $F(x, u)$ の絶対値最大の係数とすればよい。 $O(\varepsilon)$ は、計算量のオーダー記号と同じで、 ε によらない定数倍を除いて ε 程度の大きさの数を表す。

$f_n \neq 1$ のときは、よく知られたモニック変換 $F(x, u) \mapsto \tilde{F}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} f_n^{n-1} F(x/f_n, u)$ を施せば、 $F(x, u)$ の x に関する根 $\bar{\chi}(u)$ は $\tilde{F}(x, u)$ の根 $\tilde{\chi}(u)$ により $\bar{\chi}(u) = \tilde{\chi}(u)/f_n(u)$ と与えられる。したがって、一般性を失うことなく、 $F(x, u)$ は無平方でモニックである ($f_n = 1$) と仮定する。さらに $F(x, u)$ は次のように正規化されていると仮定する。

$$\|f_n\| \simeq \max\{\|f_{n-1}\|, \dots, \|f_0\|\} \approx 1 \quad (2)$$

正規化は適当な数値 a, b により $F(x, u) \mapsto aF(bx, u)$ と変換することにより行える。

(s) $\stackrel{\text{def}}{=} (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ とし、 $F(x, s) \in \mathbb{C}[x]$ の根を α とする。

$$F(\alpha, s) = 0 \quad (3)$$

定義 1 $F(x, s)$ が無平方とならないとき (s) を $F(x, u)$ の Newton 法に対する特異点 (singular point) といい、そうでないとき非特異点 (non-singular point) という。すなわち、 (s) が特異点 $\iff \text{resultant}(F(x, s), dF(x, s)/dx) = 0$ である。 ■

(s) が特異点ならば $F(x, s)$ は重根を持つが、 α が重根とは限らない。 α が重根のとき、 (α, s) は代数幾何の意味で特異点となる ([Wal78] 参照)。

$F(x, u)$ の根 $\bar{\chi}(u)$ は一般に代数関数であるが、 (α, s) が非特異点の場合、 $(u) = (s) + (v)$ と変換して原点を移動すると、新しい変数 $v_1, \dots, v_\ell$ に関する (無限) 級数 $\chi(v)$ に展開できる。 $\chi(v)$ をベキ級数根と呼ぶ。 $\chi(v)$ を全次数 k で打ち切った (打ち切り) ベキ級数を $\chi^{(k)}(v)$ と表す。 $\chi^{(0)} = \alpha$ を初期値として、 $\chi^{(1)}(v), \chi^{(2)}(v), \dots$ を順に次の Newton 法で計算できる ([KT78], [GCL92] 参照)。

$$\chi^{(k)}(v) \equiv \chi^{(k-1)}(v) - \frac{F(\chi^{(k-1)}(v), s+v)}{F'(\alpha, s)} \pmod{(v)^{k+1}} \quad (4)$$

この式では α をどう計算するかが決定的に重要である。計算代数では従来、 α を代数的数として計算したが、そうすると $\chi^{(k)}(v)$ の計算は非常に重くなる。応用面ではベキ級数根を近似的に定めればよい場合も多いので、我々は α を浮動小数を用いて数値計算で決定するものとする。この場合、 α には必然的に誤差が入り込み、ベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ にも当然、誤差が入り込むことになる。その誤差が非常に大きくなり得ることを例で示す。

例 1 2 変数多項式の場合の巨大な誤差 ([SY99] も参照されたい)。

$$F(x, u) = x^6 - 3(u-1)x^4 - 2ux^3 + 3(u^2 - 2u + 1)x^2 - 6(u^2 - u)x - u^3 + 4u^2 - 3u + 1$$

$s = 0.517$ とし ($\implies u = 0.517 + v$)、ベキ級数根を 4 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} \chi^{(4)}(v) = & (-\underline{0.4012978676277880536} - \underline{0.00008628154461670816683} i) \\ & + (-\underline{0.2587349243255296906} - \underline{1.167585113458430428} i) v \\ & + (\underline{0.1668181426979336807} - \underline{0.08344507519359525892} i) v^2 \\ & + (-\underline{0.1793895553538013117} - \underline{0.6958222465143548943} i) v^3 \\ & + (2.002104809488503015 - 2.156471842392122295 i) v^4 \end{aligned}$$

ここで、下線部は意味ある数字だが、それ以外は無意味な誤差である。展開次数 k に比例する巨大な誤差が現れていることが分かる。

$$\text{resultant}_x(F, F') = -46656u^4(u-1)^3(64u^3 - 165u^2 + 192u - 64)^2$$

から特異点を計算すると、 $F(x, u)$ は次の 5 つの特異点を持つことが分かる。

$$u = 0, 1, 0.516926 \dots, 1.030599 \dots \pm 0.934011 \dots i$$

したがって、今の場合、展開点は特異点の $O(10^{-4})$ 近傍にある。 ■

2 特異点での“級数”展開

本稿の主テーマは特異点近傍での桁落ち解析である。そのためには、特異点での級数展開が必要になる。特異点での展開法は、Sasaki-Kako の特異点での Hensel 構成法を Newton 法に焼き直したものなので、詳細は文献 [SK99], [SKK00] を参照してもらうことにして、ここでは概略のみを記す。なお、本稿では特異点に関する記号には $\wedge$ をつけて表す。

基本的アイデアは $F(x, u_1, \dots, u_\ell) \mapsto F(x, tu_1, \dots, tu_\ell)$ なる変換で全次数変数 t を導入し、2変数多項式の根の Puiseux 級数展開と同様、 t に関する分数べき級数に展開することである。簡単のため、原点が特異点と仮定し、 $F(x, 0) = x^m$ なる場合を考える。 $F(x, u)$ の各項 $x^{e_x} t^{e_t} u_1^{e_1} \dots u_\ell^{e_\ell}$, $e_1 + \dots + e_\ell = e_t$, を 2次元平面上の点 (e_x, e_t) にプロットする (図1参照)。このとき、最高次数項 x^m に対応する点 $(m, 0)$ を通る直線で、少なくとも他の一つのプロット点を通り、しかも全ての項がこの直線の下にはプロットされない、そのような直線が唯一つ定まる。この直線を $\mathcal{L}_0$ と表し **Newton 線** と呼ぶ (図1参照)。 $\mathcal{L}_0$ 上にプロットされる全ての項からなる多項式を $F_{\text{New}}(x, u)$ と表し **Newton 多項式** と呼ぶ。直線 $\mathcal{L}_0$ の傾きを $-\lambda$ とすれば、 $F_{\text{New}}(x, tu)$ は x と t^λ に関して同次多項式となる。

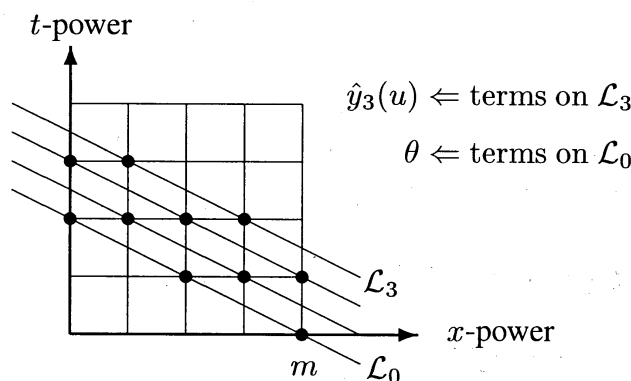


図1：特異点での展開法の図解

$F(x, tu)$ のべき級数根の初期値としては $F_{\text{New}}(x, u) = 0$ から定まる代数関数 θ をとる： $F_{\text{New}}(\theta, u) = 0$ 。このとき、 θ の明示的表現が得られるとは限らないが、最小多項式は得られる。この θ を初期値として、図1に示すごとく、 $\mathcal{L}_0 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \Rightarrow \dots$ のように法を上げる形で $F(x, tu)$ の根を t に関して級数展開する。法を上げるとき全ての格子点を通過させるには次のようにする。Newton 線の傾き $-\lambda$ に対し、正整数 $\hat{m}$ と $\hat{r}$ を $\hat{r}/\hat{m} = \lambda$, $\gcd(\hat{r}/\hat{m}) = 1$ を満たすように決める。次に、イデアル $\hat{I}_k$ を $\hat{I}_k = \langle x, t^\lambda \rangle^m \cdot \langle t^{k/\hat{m}} \rangle$ と定める。すると、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ を次式を満たすように決めることができる。

$$\hat{F}(\hat{\chi}^{(k)}(tu), tu) \equiv 0 \pmod{\hat{I}_{k+1}}, \quad \text{ord}_t(\hat{\chi}^{(k)}) = \lambda + k/\hat{m}$$

(4) に対応する具体的算式については [SSK00] を参照されたい。

定理 2 $\hat{F}(x, u)$ は原点に特異点を持ち、 θ は $\hat{F}_{\text{New}}(x, u)$ の単根であるとする。このとき、初期値を $\hat{\chi}^{(0)}(tu) = t^\lambda \theta$ とする近似 “ベキ級数” 根 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ ($k \geq 1$) は次の形となる。

$$\begin{cases} \hat{\chi}^{(k)}(tu) = t^\lambda \theta + \hat{y}_1(tu) + \cdots + \hat{y}_k(tu) \\ \text{ord}_t(\hat{y}_j(tu)) = \lambda + j/\hat{m} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \\ \hat{y}_j(u) \text{ は } u_1, \dots, u_\ell \text{ の同次有理式を係数とする } \theta \text{ の多項式} \end{cases} \quad (5)$$

例 2 特異点 (原点) での “ベキ級数” 展開。

$$\hat{F}(x, u) = x^2 - 2(u_1 + u_1^2)x + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + 2u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + u_1^4$$

Newton 多項式は $\hat{F}_{\text{New}}(x, tu) = x^2 - 2u_1x + (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2)$ となり、 θ の定義多項式は $\theta^2 - 2u_1\theta + (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) = 0$ となる。根を t に関して 2 次まで展開した級数根 $\hat{\chi}^{(2)}$ は次式となる。

$$\hat{\chi}^{(2)}(tu) = tu_1 + t^2u_1^2 + (t\theta - tu_1) \cdot \left[1 - t \frac{u_2^3 + u_3^3}{2(u_2^2 + u_3^2)} + t^2 \frac{(u_2^3 + u_3^3)^2}{8(u_2^2 + u_3^2)^2} \right]$$

θ の定義多項式が 2 次ゆえ θ は 1 次までしか現れず、 t の各係数部は u_2, u_3 の同次有理式であることに注意されたい。

上記の定理と例から、特異点での “ベキ級数” 展開の各項は多項式になったり、あるいは有理式を係数とする代数関数になったりする。

定義 3 “ベキ級数” 根 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ が変数 u_j について多項式のとき、すなわち

$$\hat{\chi}^{(k)}(u) = \chi_i^{(k)}(u) + \hat{\chi}_n^{(k)}(\dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots), \quad \chi_i^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \dots, u_\ell] \quad (6)$$

と表せるとき、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ は u_j に関して *integral* といい、そうでないとき *non-integral (rational)* あるいは *algebraic* という。

例 2 においては、 $\hat{\chi}^{(k)}(tu)$ は u_1 に関して *integral* であり、 u_2, u_3 に関して *non-integral* である。特異点で分岐する根は *non-integral* であり、直線的に交差する根は *integral* である。 $\ell \geq 2$ の場合、*integral* な根は稀にしか現れないが、 $\ell = 1$ の場合、*integral* な根は頻繁に現れる。

3 ベキ級数根の性質

以下、 $F(x, u)$ を展開点 $(u) = (s)$ に移動した多項式を $G(x, v)$ とする：

$$G(x, v_1, \dots, v_\ell) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, s_1 + v_1, \dots, s_\ell + v_\ell) \quad (7)$$

$G(x, v)$ を $v_1, \dots, v_\ell$ に関する同次多項式の和に分解する :

$$G(x, v) = G_0(x) + G_1(x, v) + \dots + G_\tau(x, v) \quad (8)$$

ここで $G_j(x, v)$ は $v_1, \dots, v_\ell$ の j 次同次多項式

また、 $G_j(x, v)$ の x に関する i 階微分を $G_j^{(i)}(x, v)$ と表し、数値 β を以下と定める :

$$G_j^{(i)}(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} d^i G_j(x, v)/dx^i, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} dG_0(x)/dx|_{x=\alpha} \quad (9)$$

補題 4 (基本的補題) $\chi^{(k)}(v)$ を次のように全次数一定の項の和に分解する。

$$\chi^{(k)}(v) = \alpha + y_1(v) + \dots + y_k(v), \quad \text{tdeg}(y_j) = j \quad (j = 1, \dots, k) \quad (10)$$

$y_k(v)$ は Newton 法で k 回目に計算される多項式である。 $y_k(v)$ は

$$(\gamma/\beta^e) \cdot \{G_{l_0}^{(0)}(\alpha, v)\}^{e_0} \{G_{l_1}^{(r_1)}(\alpha, v)\}^{e_1} \dots \{G_{l_\kappa}^{(r_\kappa)}(\alpha, v)\}^{e_\kappa} \quad (11)$$

なる項の和となる。ただし、 $\gamma \in \mathbf{C}$ で、かつ次式が成立する。

$$\begin{cases} e = e_0 + e_1 + \dots + e_\kappa & \geq 1 \\ l_0 e_0 + l_1 e_1 + \dots + l_\kappa e_\kappa & = k \\ r_1 e_1 + \dots + r_\kappa e_\kappa & = e - 1 \end{cases} \quad (12)$$

■

次に、展開点を特異点 (今の場合、原点) に近づけた場合のベキ級数根の振舞いを調べる。特異点近傍では、ベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ は、特異点での“ベキ級数”根 $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$ の変数 u に $v + s$ を代入して得られる。

場合 I 特異点での“ベキ級数”根が integral な場合。

式 (6) の $\chi_i^{(k)}(u)$ のみを考える。 $\chi_i^{(k)}(u) \in \mathbf{C}[u_1, \dots, u_\ell]$ ゆえ、

$$\lim_{\|s\| \rightarrow 0} \chi^{(k)}(v) \equiv \lim_{\|s\| \rightarrow 0} \chi_i^{(k)}(s + v) \pmod{(v)^{k+1}} \implies \text{convergent} \quad (13)$$

すなわち、展開点を特異点に近づけたとき $\chi^{(k)}(v)$ は多項式へ収束する。

場合 II 特異点での“ベキ級数”根が non-integral な場合。

$A(u)$ は位数 κ の同次有理式あるいは代数関数とする : $\deg_t(A(tu)) = \kappa$ 。 $A(s + v)$ の Taylor 展開の k 次項は、 $\|s\| \rightarrow 0$ のとき $O(1/\|s\|^{k-\kappa})$ と振舞う。

$$\begin{aligned} \text{有理式例} \quad : \quad & \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_2 + u_3} \implies \frac{(s_2 + v_2)^2 + (s_3 + v_3)^2}{(s_2 + v_2) + (s_3 + v_3)} \\ & = \frac{(s_2^2 + s_3^2) + 2(s_2 v_2 + s_3 v_3) + v_2^2 + v_3^2}{(s_2 + s_3)[1 + v_2/(s_2 + s_3) + v_3/(s_2 + s_3)]} \end{aligned}$$

$$\|s\| \rightarrow 0 \implies v^k \text{ 項 } (k > 1) \text{ は } O(1/\|s\|^{k-1}) \text{ で発散する。}$$

4 桁落ち誤差の解析

まず、Newton 法を各ステップ毎に振り返る。各ステップで計算するものは $\chi^{(k)}(v)$ ではなく、 $y_k(v) = \chi^{(k)}(v) - \chi^{(k-1)}(v)$ であり、その算式は次である。

$$y_k(v) = -[G(\alpha + y_1 + \cdots + y_{k-1}, v)] \text{ の } k \text{ 次項} / \beta \quad (14)$$

$y_k(v)$ の計算は、さらに次の 3 ステップに分解される。

Step 0 : α を $G_j^{(i)}(x, v)$ に代入 ($\Rightarrow$ 桁落ち?)。

Step 1 : $y_k(v)$ を補題 4 の積項の和に展開する。

Step 2 : 積項を展開して加える ($\Rightarrow$ 桁落ち?)。

以上より、Newton 法における桁落ちは次の方針で解析できる。

- (1) $|\alpha|, |\beta|$ の値を決める。
- (2) $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$ の値を決める。
- (3) $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)$ の積項 $\|$ の値を決める。
- (4) $\|y_k(v)\|$ の値を別の方法で決める。
- (5) 桁落ち量 = $\max \|G_j^{(i)}(\alpha, v)$ の積項 $\| - \|y_k(v)\|$ 。

この方法では桁落ち量を詳細に計算することは難しいので、展開点を特異点近傍あるいは遠方に限定し、桁落ち量のオーダー解析を行うことにする。

4.1 展開点が特異点 (原点) の近傍のとき

一般性を失うことなく $F(x, u)$ は原点に特異点を持つと仮定し、展開点は原点の δ 近傍にあるとする : $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \cdots + s_\ell^2} \ll 1$ 。 $F(x, u)$ を原点で特異な因子 $\hat{F}(x, u)$ と非特異な因子 $\tilde{F}(x, u)$ に分解する (この分解は Hensel 構成で行える) :

$$F(x, u) = \hat{F}(x, u)\tilde{F}(x, u), \quad \hat{F}(x, 0) = x^m, \quad \tilde{F}(0, 0) \neq 0 \quad (15)$$

α は特異点で重根になるとするので、 $\hat{F}(x, s)$ の根とする。 $\hat{F}(x, u)$ に対する Newton 線の傾きを $-\lambda$ とすれば、 α, β および $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$ は次のようにオーダー評価できる。

$$\begin{cases} \alpha = O(\delta^\lambda), & \beta = O(\delta^{(m-1)\lambda}) \\ \|G_j^{(i)}(\alpha, v)\| = O(\delta^{\max\{0, (m-i)\lambda-j\}}) \end{cases} \quad (16)$$

正確に言うと、上式の評価は $G_j^{(i)}(x, v)$ が主要項である場合にのみ成立し、非主要項に対する評価は小さくなる。これらのオーダー評価を (11) に代入すると次式を得る (ここで、

γ は k には依存するが δ には依存しない数で、 $O(1)$ の大きさである)。

$$\begin{aligned} & \| \gamma \{G_{j_0}^{(0)}/\beta\}^{e_0} \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \dots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa} \| \\ &= O(\gamma) O(\delta^{(1-0)\lambda-j_0})^{e_0} O(\delta^{(1-i_1)\lambda-j_1})^{e_1} \dots O(\delta^{(1-i_\kappa)\lambda-j_\kappa})^{e_\kappa} \\ &= O(\gamma) O(\delta^{(\sum e_r)\lambda - (\sum i_r e_r)\lambda - (\sum j_r e_r)}) = O(\gamma) O(\delta^{\lambda-k}) \end{aligned}$$

上式と特異点近傍でのベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ の振舞いを比較して次の定理を得る。

定理 5 $F(x, u)$ は原点に特異点を持ち、展開点は原点から δ 近傍にあるとする: $0 \ll \delta \ll 1$ 。原点での“ベキ級数”根 $\hat{\chi}^{(\infty)}(u)$ の項のうち、どれかの変数について *integral* な項で最低位数のものを $\hat{T}_\kappa(u)$, ただし $\text{ord}_t(\hat{T}_\kappa(tu)) = \kappa$, とする。また、 $T_k(v)$, ただし $\text{ord}_t(T_k(tv)) = k$, は $\chi^{(k)}(v)$ の主要項であるとする。このとき、 $k < \kappa$ ならば $T_k(v)$ に $O(\delta^{\lambda-k})$ の桁落ちが生じ、 $k \geq \kappa$ ならば $T_k(v)$ に $O(\delta^{\lambda-\kappa})$ の桁落ちが生じる。 ■

この定理の由来は次の通りである。まず、上記のオーダー評価によると、展開点を特異点に近づけると $\chi^{(k)}(v)$ は $O(\delta^{\lambda-k})$ の発散をする。特異点で non-integral な場合、 $\|s\| \rightarrow 0$ で $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$ も同じオーダーの発散をするから、桁落ちは生じない。しかし、特異点で integral な場合、 $\|s\| \rightarrow 0$ で $\hat{\chi}^{(\infty)}(s+v)$ は収束するから、差し引いた分だけ桁落ちが生じることになる。

4.2 原点から遠方での展開 (近くに特異点なし)

展開点は原点から十分遠方にあるとする: $D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \dots + s_\ell^2} \gg 1$ 。今の場合、重要な役割を演じるのは各 $f_i(u)$ の中で全次数が最大の項である。たとえば、(1) の $f_i(s)$ は次のように近似できる。

$$|f_i(s)| = O(D^{\tau_i}), \quad \tau_i = \text{tdeg}(f_i(u)) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

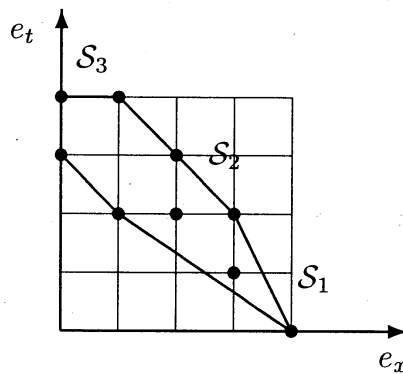


図 2 : 凸包 Ω とその上辺 $S_1, S_2, \dots$

$F(x, u)$ の各項を図 1 のようにプロットし、全てのプロット点を囲む最小の凸包を Ω とする (図 2 参照)。 Ω の上辺を右から順に $S_1, \dots, S_\sigma$ とし、各 S_i 上にプロットされる全ての項からなる多項式を $F_{S_i}(x, u)$ とする。すると、 α は近似的に $F_{S_i}(x, s)$ ($1 \leq i \leq \sigma$) のどれかの根として定まることになる。

α が近似的に $F_{S_i}(x, s)$ の根として定まるとすれば、次のオーダー評価を得る。

$$\alpha = O(D^{\bar{\lambda}}), \quad \bar{\lambda} > 0 \quad (17)$$

ここで、辺 S_i の傾きを $-\bar{\lambda}$ とした。次に、 β の評価であるが、展開点の近傍に特異点はないと仮定する。 $(F_{S_i}(x, s)$ が近接根を持てば、 $F(x, u)$ は (s) の近傍 ($\hat{s}$) に特異点を持つ可能性が高い。したがって、この仮定は「 $F_{S_i}(x, s)$ は近接根を持たない」と言い換えてもよい。) このとき、 β は次のようにオーダー評価できる。

$$\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}), \quad \bar{n} = \deg_x(F_{S_i}(x, u)), \quad \bar{\tau} = \text{tdeg}(f_{\bar{n}}) \quad (18)$$

さらに、 $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$ は次のようにオーダー評価できる。

$$\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\| = O(D^{\max\{0, (\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j\}+\bar{\tau}}) \quad (19)$$

これらより、(11) は次のようにオーダー評価される。

$$\begin{aligned} & \| \hat{\gamma} \{G_{j_0}^{(0)}/\beta\}^{e_0} \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \dots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa} \| \\ &= O(\hat{\gamma}) O(D^{(1-0)\bar{\lambda}-j_0})^{e_0} O(D^{(1-i_1)\bar{\lambda}-j_1})^{e_1} \dots O(D^{(1-i_\kappa)\bar{\lambda}-j_\kappa})^{e_\kappa} \\ &= O(\hat{\gamma}) O(D^{(\sum e_r)\bar{\lambda}-(\sum i_r e_r)\bar{\lambda}-(\sum j_r e_r)}) = O(\hat{\gamma}) O(D^{\bar{\lambda}-k}) \end{aligned}$$

この式の右辺は $O(D^{-k})$ に比例し、ベキ級数根の収束半径が $O(D)$ であることを示している。したがって、次の定理を得る。

定理 6 展開点は原点から遠方 $D \gg 1$ の点にあり、 $F(x, s)$ の根 α は他の根から $O(|\alpha|)$ 程度離れていると仮定する。このとき、任意の k に対し $y_k(v)$ の計算で $O(D^{ck})$, $c > 0$, の大きな桁落ちが生じることはない。 ■

4.3 原点から遠方での展開 (近くに特異点あり)

前節と同じく、展開点は原点から遠方とする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{s_1^2 + \dots + s_\ell^2} \gg 1$ 。前節と異なるのは、展開点の近傍に特異点があることである。すなわち、特異点の位置を $(u) = (\hat{s})$ とするとき、次式を仮定する。

$$D' \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|s_1 - \hat{s}_1|^2 + \dots + |s_\ell - \hat{s}_\ell|^2} \ll D \quad (20)$$

議論を明確にするため、 $(\hat{\alpha}, \hat{s})$ は多重度 m の (代数幾何の意味での) 特異点とする :

$$\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}} \frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}} F(x, u) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=(\hat{s})} = 0 \quad \text{for } i_0 + i_1 + \cdots + i_\ell \leq m-1 \quad (21)$$

α は前節と同様、 $F_{S_i}(x, s)$ の根として定まるが、仮定より $F_{S_i}(x, s)$ は α の近傍に $|\alpha - \alpha'| \ll |\alpha|$ なる根 α' を持つので、 β と $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$ の評価は慎重に行う必要がある。

$$G_j^{(i)}(\alpha, v) = \frac{1}{j!} \left[v_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + v_\ell \frac{\partial}{\partial u_\ell} \right]^j \frac{\partial^i}{\partial x^i} F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=(\hat{s})}$$

と表し、 $F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s)$ を次のように Taylor 展開する。

$$F(x - \hat{\alpha} + \alpha, u - \hat{s} + s) = F(x, u) + \sum_{j'=1}^{\max\{n, \tau\}} \frac{1}{j'!} \left[(\alpha - \hat{\alpha}) \frac{\partial}{\partial x} + (s_1 - \hat{s}_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + (s_\ell - \hat{s}_\ell) \frac{\partial}{\partial u_\ell} \right]^{j'} F(x, u)$$

これら 2 式より、 $G_j^{(i)}(\alpha, v)$ を $\frac{\partial^{i_0}}{\partial x^{i_0}} \frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial u_\ell^{i_\ell}} F(x, u) \Big|_{x=\hat{\alpha}, (u)=(\hat{s})}$ で表すことができる。

この計算法により、 $\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|$ に対して次のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|G_j^{(i)}(\alpha, v)\|}{\hat{B}_{i,j}} = \begin{cases} O(1), & i+j \geq m \\ O(\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|, \|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\|\}^{m-(i+j)}), & i+j < m \end{cases} \quad (22)$$

$$\hat{B}_{i,j} = \max \left\{ \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!} |\hat{\alpha}^{n-i-1} g_{j,n-1}(\hat{s})|, \frac{(n-2)!}{(n-i-2)!} |\hat{\alpha}^{n-i-2} g_{j,n-2}(\hat{s})|, \cdots \right\}$$

ここで、 $G_j(x, u) = g_{j,n-1}(u)x^{n-1} + g_{j,n-2}(u)x^{n-2} + \cdots$ とおいた。 $F(x, u)$ の規格化 (2) より $\|g_{j,n'}(u)\| = O(1)$ ($n' = n-1, n-2, \dots$) である。

(22) によると、桁落ちは $|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|$ の大きさに依存する。 $\|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\| = D'/D$ ゆえ、次の三つの場合に分けて考察する。

$$\frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^{\eta_\alpha}) = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1}), & 1/m \leq \eta_1 < 1 \\ \text{Case 2: } O([D'/D]^{\eta_2}), & \eta_2 = 1 \\ \text{Case 3: } O([D'/D]^{\eta_3}), & \eta_3 > 1 \end{cases} \quad (23)$$

まず、 β は次のようにオーダー評価できる。

$$\beta = O(D^{(\bar{n}-1)\bar{\lambda}+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{(m-1)\eta_\alpha}) \quad (24)$$

一方、(22) 右辺の $O(\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}|, \|s - \hat{s}\|/\|\hat{s}\|\})$ を考慮すると

$$\begin{cases} \|G_0^{(i>1)}(\alpha)\| &= O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-0+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0, (m-i)\eta_\alpha\}}) \\ \|G_{j>0}^{(i)}(\alpha, v)\| &= O(D^{(\bar{n}-i)\bar{\lambda}-j+\bar{\tau}}) \cdot O([D'/D]^{\max\{0, (m-i-j)\eta_\alpha\}}) \end{cases} \quad (25)$$

を得る。ただし、 η は次式で定義される。

$$\max \left\{ \frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\hat{\alpha}|}, \frac{\|s - \hat{s}\|}{\|\hat{s}\|} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} O([D'/D]^\eta) = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1}) \\ \text{Case 2: } O([D'/D]) \\ \text{Case 3: } O([D'/D]) \end{cases} \quad (26)$$

これらより (11) の評価として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \|\{G_0^{(i'_1)}/\beta\}^{e'_1} \cdots \{G_0^{(i'_\mu)}/\beta\}^{e'_\mu} \cdot \{G_{j_1}^{(i_1)}/\beta\}^{e_1} \cdots \{G_{j_\kappa}^{(i_\kappa)}/\beta\}^{e_\kappa}\| \\ &= O(D^{\bar{\lambda}-k}) \cdot O([D'/D]^{\eta(1-k)+(m-1)(\eta-\eta_\alpha)e}) \cdot O([D'/D]^{(\eta_\alpha-\eta)\sum_{r=1}^\mu(m-i'_r)e'_r}) \end{aligned}$$

これより、 $y_k(v)$ の主要項 $T_k(v)$ に対して次式のオーダー評価を得る。

$$\frac{\|T_k(v)\|}{D^{\bar{\lambda}-k}} = \begin{cases} \text{Case 1: } O([D'/D]^{\eta_1(1-k)}) \\ \text{Case 2: } O([D'/D]^{(1-k)}) \\ \text{Case 3: } O([D'/D]^{(1-k)-(\eta_3-1)(mk-m+1)}) \end{cases} \quad (27)$$

特異点と展開点との距離が D' であることを考えれば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k(v)\| \propto [D']^{-k}$ となるはずで、Case 2 はそれに当たる。Case 3 では主要項はそれより大きく、差の分が桁落ちとなって現れるはずである。しかし、Case 1 では主要項の大きさが必要とされるものより小さいので、Case 1 が現実起きるかどうかわからない。以上より、Case 2 と 3 に対して次の定理を得る。

定理 7 展開点は原点から遠方にあるとする： $D \stackrel{\text{def}}{=} \|s\| \gg 1$ 。さらに、展開点に近い点 ($\hat{s}$) に特異点があるとする： $\|s - \hat{s}\| \stackrel{\text{def}}{=} D' \ll D$ 。 $F(x, s)$ の根を α 、 $F(x, \hat{s})$ の根を $\hat{\alpha}$ とし、 $|\alpha - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O([D'/D]^\eta)$ とする。 $\eta = 1$ の場合、 $y_k(v)$ の計算で $O([D/D']^{ck})$, $c > 0$ の大きな桁落ちが生じず、 $\eta > 1$ の場合には $O([D/D']^{(\eta-1)mk})$ の桁落ちが生じる。 ■

例 3 遠方での展開 (近くに特異点あり)、 $\eta = 1$ の場合。

$$\begin{aligned} F(x, u) = & x^6 - 3(u-1)x^4 - 2ux^3 + 3(u^2 - 2u + 1)x^2 \\ & - 6(u^2 - u)x - (3/4)u^3 + 4u^2 - 3u + 1 \end{aligned}$$

これは例 1 とは u^3 項の係数が異なるのみだが、特異点 $\hat{s}_1 = 1270.84 \cdots$, $\hat{s}_2 = 753.57 \cdots$ を持つ。展開点を $s = 1260$ に選ぶ： $D = 1260$, $D' \approx 10.84$ 。 $F(x, \hat{s})$ は重根 $\hat{\alpha} = 39.644 \cdots$ を持ち、この重根は $F(x, s)$ では二つの近接根に分離する： $\alpha_1 = 38.405 \cdots$, $\alpha_2 = 40.096 \cdots$ 。したがって、 $|\alpha_i - \hat{\alpha}|/|\hat{\alpha}| = O(D'/D)$ である。 $\alpha = \alpha_2$ と選ぶ。

ベキ級数根を 8 次まで計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \chi^{(8)}(v) = & 40.09 \cdots - 0.01232 \cdots v - 0.0006800 \cdots v^2 \\ & - 3.119 \cdots \times 10^{-5} v^3 - 1.798 \cdots \times 10^{-6} v^4 - 1.160 \cdots \times 10^{-7} v^5 \\ & - 8.029 \cdots \times 10^{-9} v^6 - 5.818 \cdots \times 10^{-10} v^7 - 4.359 \cdots \times 10^{-11} v^8 \end{aligned}$$

先頭 2 項を除き、 v^k 項の係数 c_k が k の増加とともに $O(1/D')$ で減少することが分かる。 c_1 は $O(D/D')$ の誤差を含むが、これは $G_1(x, v) \sim \alpha$ を代入する際に生じた桁落ちである。しかし、理論どおり $c_2 \sim c_8$ ではそれ以上の桁落ちは生じていない。 ■

5 特異点近傍での安全な計算法

Newton 法を正直に適用してベキ級数根 $\chi^{(k)}(v)$ を計算すると、特異点近傍で展開次数 k に比例する大きな桁落ちが生じ得ることを見た。本章では、特異点での展開を経由することにより、大した桁落ちを生じることなく $\chi^{(k)}(v)$ を計算できることを示す。

大きな桁落ちは根が integral な部分に起きる。そこで、特異点で“ベキ級数”根 $\hat{\chi}^{(k')}(u)$ の integral な部分 $\chi_0^{(k')}(u)$ を計算し、 $\chi_0^{(k')}(s+v)$ から $\chi^{(k)}(v)$ の大きな桁落ちを起こす部分を計算するのである。 $\chi_0^{(k')}(u) \in \mathbf{C}[u]$ ゆえ $\chi_0^{(k')}(s+v)$ は簡単に展開でき、 $\|s\| \ll 1$ ゆえ、 k' の値を k より幾分大きく選んでおけば、 $\chi^{(k)}(v)$ は十分な精度で計算できる。

例 4 例 1 におけるベキ級数根の桁落ちなしの計算。

$F(x, u)$ は $\hat{s} = 0.5169261021 \dots$ に特異点を持ち、 $F(x, \hat{s})$ は重根 $\hat{\alpha} = -0.4012787467 \dots$ を持つ。そこで、まず $F(x, u)$ を $(x, u) = (\hat{\alpha}, \hat{s})$ の位置に原点移動する：

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{x}, \hat{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} F(\hat{x} - 0.40127874676866, \hat{u} + 0.51692610217531) \\ &= \hat{x}^6 - 2.407 \dots \hat{x}^5 + (3.864 \dots - 3\hat{u})\hat{x}^4 \\ &\quad + (4.652 \dots + 2.815 \dots \hat{u})\hat{x}^3 + (3.733 \dots - 3.389 \dots \hat{u} + 3\hat{u}^2)\hat{x}^2 \\ &\quad + (1.932 \dots \hat{u} - 8.407 \dots \hat{u}^2)\hat{x} + (5.339 \dots \hat{u}^2 - \hat{u}^3) \end{aligned}$$

ここで、 $O(10^{-13})$ 以下の項は棄却した（以下の計算でも同様）。この棄却により誤差のみの項は全て除外される。 $\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$ は次数 2 の特異因子と次数 4 の非特異因子を持つ。非特異因子の Newton 多項式は $\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u}) = 3.733 \dots \hat{x}^2 + 1.932 \dots \hat{u}\hat{x} + 5.339 \dots \hat{u}^2$ で、 $\hat{F}_{\text{New}}(\hat{x}, \hat{u})$ の根が $\hat{F}(\hat{x}, \hat{u})$ の根の第 1 次近似 $\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u})$ を与える（共役根のうち一方を選ぶ）：

$$\hat{\chi}^{(1)}(\hat{u}) = (-0.25875958225623 + 1.1675727920436 i) \hat{u}$$

この初期値から特異点での級数根をたとえば 5 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^{(5)}(\hat{u}) &= (-0.25875958225623 + 1.1675727920436 i) \hat{u} \\ &\quad + (0.1668578810829 + 0.083290774208661 i) \hat{u}^2 \\ &\quad + (-0.17932703036999 + 0.6959452980097 i) \hat{u}^3 \\ &\quad + (0.23127358645056 + 0.09797677528285 i) \hat{u}^4 \\ &\quad + (-0.32809453682074 + 1.2907084531487 i) \hat{u}^5 \end{aligned}$$

この式の $\hat{u}$ に $v + (0.517 - \hat{s})$ を代入し、 v の 3 次まで計算すると次式となる。

$$\begin{aligned}\chi^{(3)}(v) &= (-\underline{0.40129786762779} - \underline{0.000086281544621635} i) \\ &+ (-\underline{0.25873492432482} - \underline{1.1675851134593} i) v \\ &+ (\underline{0.16681813302697} - \underline{0.083445063954989} i) v^2 \\ &+ (-\underline{0.17925868582708} - \underline{0.6959743295761} i) v^3\end{aligned}$$

ここで、下線部は正しい数値である。 $|0.517 - \hat{s}| \approx 10^{-4}$ であるから、 $\hat{\chi}^{(6)}$ の 6 次の項は $\chi^{(3)}$ の v^i 項には $O(10^{-4(6-i)})$ の寄与しかない。したがって、上式 $\chi^{(3)}(v)$ の各係数部は $O(10^{-12})$ まで正しいはずで、実際、そうになっている。 ■

参 考 文 献

- [GCL92] K.O. Geddes, S.R. Czapor and G. Labahn: *Algorithms for Computer Algebra*, Ch. 6, Kluwer Academic, Boston-Dordrecht-London, 1992.
- [KT78] H.T. Kung and J.F. Traub: All algebraic functions can be computed fast, J. ACM **25** (1978), 245-260.
- [SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, Japan J. Indus. Appl. Math., **16** (1999), 257-285. (This paper was submitted in March, 1993, and the authors received a referees' reports in September, 1996 and the letter of acceptance in June, 1998.)
- [SKK00] T. Sasaki, T. Kitamoto and F. Kako: On Cancellation Error in Newton's Method for Power Series Roots of Multivariate Polynomial, preprint (32 pages), 2000 (submitted).
- [SY98] T. Sasaki and S. Yamaguchi: An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic, Proc. of ISSAC'98, pp. 1-8, ACM Press (1998).
- [Wal78] R. J. Walker: *Algebraic curves*, Ch. 4, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.