

Constructions of Fibered 2-knots

東大理 斎藤 昌彦 (Masahico Saito)

Fibered 2-knots の構成法としてよく知られたものには, Zeeman の *twist spinning* とその拡張と, Asano-Yoshikawa の方法とがあるが, 前者は, fiber は豊富にできるが *monodromy* には *finite order* という制限がつき, 後者は, *monodromy* は豊富にできるが, fiber は $\text{punc}(\#S^2 \times S^1)$ だけである. この, fiber の豊富さと *monodromy* の豊富さとの背反関係は, fiber の *Thurston norm* と深いにかかわりがあり, fiber が *irreducible* で豊富な *monodromy* をもつ fibered 2-knot を構成することの困難さにつながっている。

([3] 参照)

特に fiber が $\text{punc}T^3$ の場合は, [1] でくわしく調べられているが, ここでは, [3] で使われた方法を一般化した形で述べる。

構成法

K を S^4 内の fibered ribbon 2-knot (fiber は $\text{punc}(\#S^2 \times S^1) = (\#S^2 \times S^1)^0$ であり, monodromy を h とすれば,
 $S^4 - K = (\#S^2 \times S^1)^0 \times I / h$ とかける) で, 次の (i), (ii) を満たすものとする。

(i) essential simple closed curve $\gamma \subset (\#S^2 \times S^1)^0$ で,
 $h|_{\gamma} = \text{identity}$,

γ は homologous to 0 in $H_1((\#S^2 \times S^1)^0; \mathbb{Z})$

をみたすものが存在する。

(ii) $\Gamma = \gamma \times I / h \subset (\#S^2 \times S^1)^0 \times I / h = S^4 - K \subset S^4$

とするとき, $\Gamma \cong T^2$ であるが, この Γ が S^4 内で

unknotted である。(i.e. solid torus $S^1 \times D^2$ を bound する)

このとき, Γ に沿って "equivariant $\frac{1}{p}$ -Dehn surgery"
 (各 fiber 内の γ に沿って " $\frac{1}{p}$ -surgery" となるような, S^4 内での
 Γ に沿った surgery) をすると, 新しい fibered 2-knot $\tilde{K} \subset S^4$
 ができる。(用語の定義と証明については [3] 参照)

$\tilde{K}$ の fiber は $(\#S^2 \times S^1)^0$ を γ に沿って " $\frac{1}{p}$ -surgery" した
 ものであり, monodromy は h から誘導されるものである。

とくに, fiber の 1次元 homology 群上は, もとの K と同じなので,
 Alexander polynomial は不変である。

例

$\#_4 S^2 \times S^1$ 内に, fig. 1 のような simple closed curve γ をとる。

$\#_4 S^2 \times S^1 = (\natural_4 S^1 \times D^2) \cup_0 (\natural_4 S^1 \times D^2)$ であるが, $F = \partial(\natural_4 S^1 \times D^2)$ とおく。(F は fig. 1 において, ちょうど紙面に相当する。)

$\gamma \subset F$ であることに注意する。また, $\#_4 S^2 \times S^1$ 内に, embedded tori T_i ($i = -2, -1, 0, 1, 2$) を fig. 2 ~ 6 の様にとる。

T_i は γ と disjoint であり, また, F に関して対称である。

T_i に沿った "right handed round Dehn twist" (right handed Dehn twist $\times S^1$, fig. 7 参照) を τ_i とし,

$$h = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_{-1} \circ \tau_{-2} : \#_4 S^2 \times S^1 \rightarrow$$

とおく。 h は F に関して対称であり, h が induce する automorphisms

$h_\# : \pi_1(\#_4 S^2 \times S^1) \rightarrow$, $h_* : H_1(\#_4 S^2 \times S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow$ について, 次のことが成り立つ。

$$(1) \text{ 群 } \langle x_1, x_2, x_3, x_4, t \mid t, tx_1t^{-1}h_\#(x_1)^{-1}, \dots, tx_4t^{-1}h_\#(x_4)^{-1} \rangle$$

は Andrews-Curtis moves で trivial presentation になる。

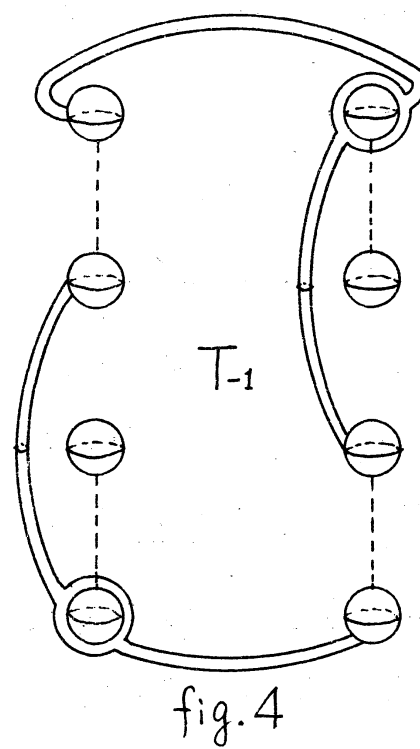
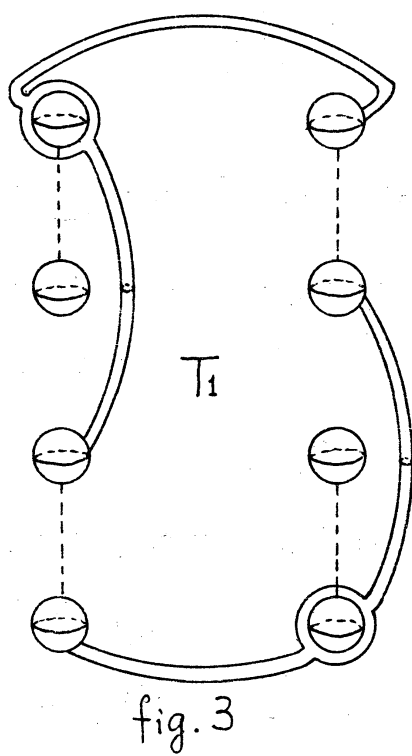
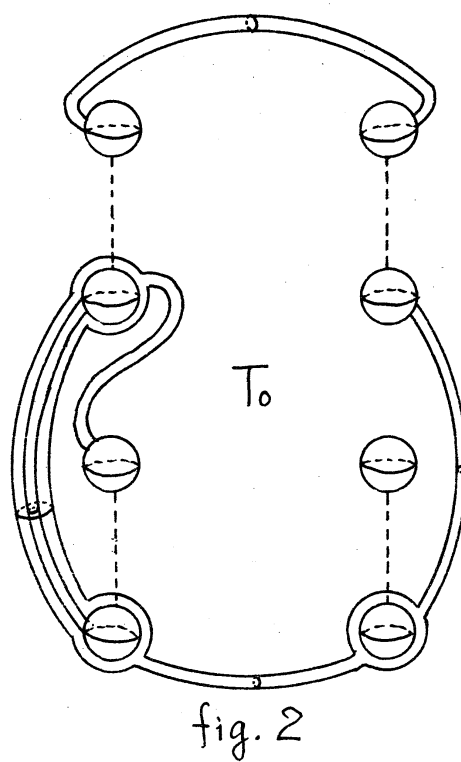
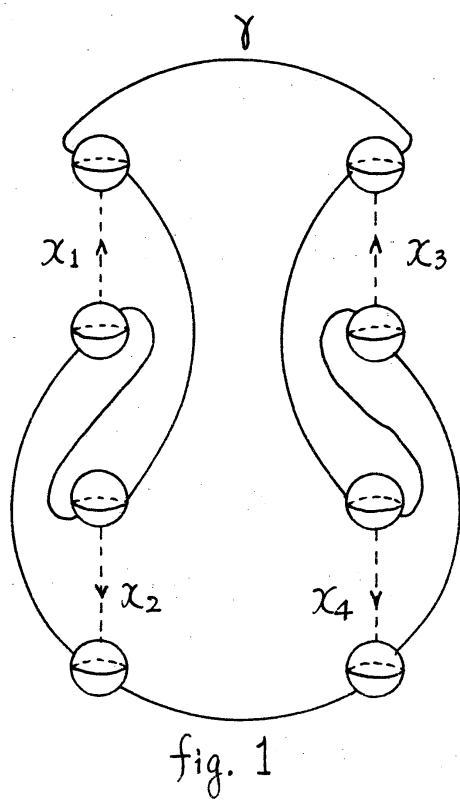
($x_1, \dots, x_4$ は fig. 1 に図示された $\pi_1(\#_4 S^2 \times S^1)$ の生成元)

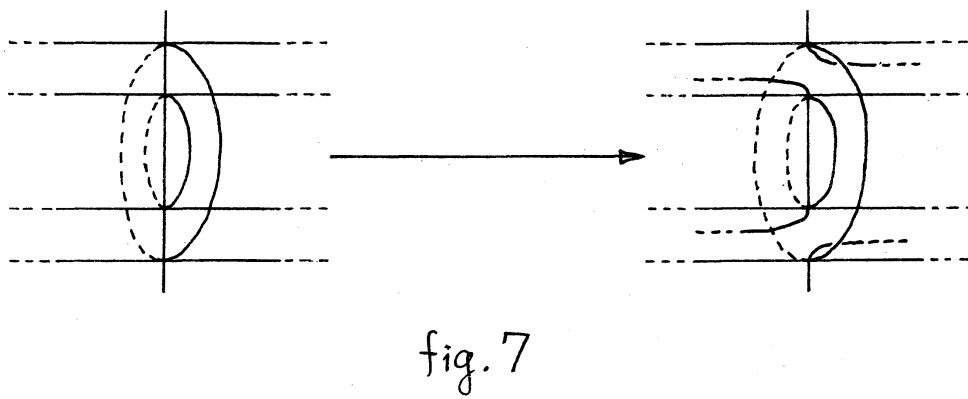
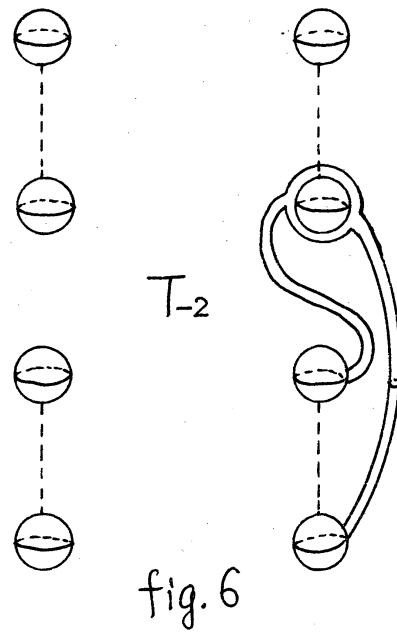
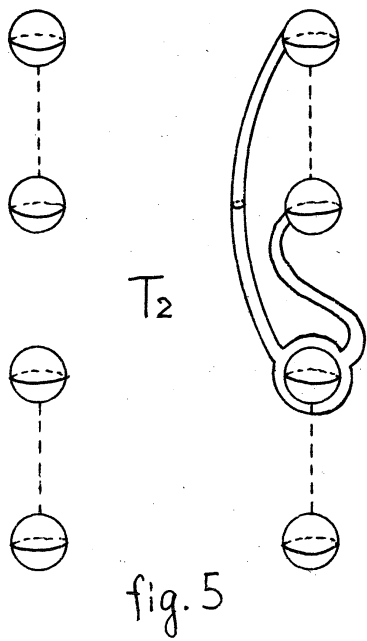
$$(2) \det(tI - h_*) = t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 6t + 1$$

したがって Asano-Yoshikawa の方法により, h を monodromy とする

fibered ribbon 2-knot $K \subset S^4$ ができ, γ は h で不変である。

また, $B = (\natural_4 S^1 \times D^2) \times I / h$ は homotopy 4-ball, ∂B は homotopy 3-sphere である。 $\partial B \cap \Gamma = \gamma \times I / h$ であるから,





Γ は S^4 内で homotopically unknotted である。したがって構成法の (i) は満たし, (ii) は "unknotted" のかわりに "homotopically unknotted" であるような K, Y が得られた。これから homotopy S^4 内の fibered 2-knot $\tilde{K}$ で, fiber が irreducible であるものが構成できる。これが実際 S^4 と diffeomorphic であることを示すためには, [2] で用いられた様に, Montesinos の handle presentation で, Andrews-Curtis moves を handle sliding で実現しなければならない。

(この例自体は (2) の Alexander polynomial の対称性からしても [3] の例と一致してしまう可能性がある。)

References

- [1] I.R. Aitchison, J.H. Rubinstein
Fibered knots and involutions on homotopy spheres
Contemporary Math. A.M.S. 35 (1984) 1-74
- [2] I.R. Aitchison, D.S. Silver
On certain fibered ribbon disc pairs (preprint)
- [3] M. Saito
Fibered 2-knots and Thurston norm
数理解析研究所講究録 575 (1985) 198-212