

Z-transforms and Seminormality

広島大 理学部 伊藤 史朗

イデアル transform を拡張した概念である Z-transform を用いて, ネーター環 A の拡大環 B の性質を調べるのがこの講演の目的である。拡大環 B を調べるにあたって, 全て $\text{Ass}_A(B/A)$ の点 $\mathfrak{z}$ での $(A_{\mathfrak{z}})^{\#}$ (又は $(A_{\mathfrak{z}})^{\#} \cap B_{\mathfrak{z}}$) の性質に帰着させる。ここでは次の3つの問題を取り扱う。

(A) R をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq R \subseteq Q(A)$ とする。このとき A が R で seminormal となる条件を $(A_{\mathfrak{z}})^{\#} \cap R_{\mathfrak{z}}$ ($\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(R/A)$) の性質で記述すること。

(B) R をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq R \subseteq Q(A)$ とする。このとき R が A -加群として有限生成となる条件を $(A_{\mathfrak{z}})^{\#} \cap R_{\mathfrak{z}}$ ($\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(R/A)$) の性質で記述すること。

(C) A をネーター環で Serre の条件 (S_1) を満たすものとする。 A が有限 (S_2) -拡大環をもつための条件を $(A_{\mathfrak{z}})^{\sharp}$ ($\mathfrak{z} \in \text{Spec}(A)$) の性質をもって記述すること。

§1. Z -transforms

A をネーター環, Z を $\text{Spec}(A)$ の部分集合で特殊化で安定なものとする。 A の Z -transform $T(Z, A)$ とは, 次のようにして定まる $\mathcal{Q}(A)$ の A -subalgebra である。

$$T(Z, A) = \{ z \in \mathcal{Q}(A) \mid V(A :_A z) \subseteq Z \}.$$

又, A の global transform $A^{\sharp}$ とは A の $\text{Max}(A)$ -transform のことである。 定義からすぐに分かるように

$$(1.1) \quad z \in \mathcal{Q}(A) \text{ について, } z \in T(Z, A) \iff z/1 \in A_{\mathfrak{z}}$$

$$\forall \mathfrak{z} \in \text{Spec}(A) - Z.$$

さて, $\mathfrak{z} \in Z$ であって $\mathfrak{z} \not\subseteq \mathfrak{p}$ なる A の素イデアル $\mathfrak{p}$ については $\mathfrak{p} \not\subseteq Z$ のとき $\mathfrak{z}$ を Z の generic point と呼ぶことにする。 そうすると次の事実も定義より容易に分かる。

$$(1.2) \quad \mathfrak{z} \in Z \text{ が } Z \text{ の generic point で正則元を含んで}$$

$$\text{いれれば } T(Z, A)_{\mathfrak{z}} = (A_{\mathfrak{z}})^{\sharp}.$$

次の2つの補題も簡単ではあるが大切な事柄である。

(1.3) 補題. $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ なる拡大環 B について,

$$\text{Ass}_A(B/A) = \{ \mathfrak{z} \in \text{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{z}} \neq (A_{\mathfrak{z}})^{\circ} \cap B_{\mathfrak{z}} \}.$$

(1.4) 補題. 上と同じ条件のもとで

$$\text{Ass}_A(T(Z, A) \cap B / A) = \text{Ass}_A(B/A) \cap Z.$$

一般に $A^{\circ} = A \iff A$ のどの極大イデアル m に対しても $\text{depth } A_m \neq 1$ が成立するので, $\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(B/A)$ であるならば $\mathfrak{z}$ は正則元を含みかつ $\text{depth } A_{\mathfrak{z}} = 1$ となる。

§2 問題(A).

最初に次のような場合について考えてみよう。即ち, B はネーター環 A の有限拡大環で $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ かつ $\text{Ass}_A(B/A) = \{\mathfrak{z}\}$ 。このとき $\mathfrak{z}$ 上の B の素イデアル全体を $P_1, \dots, P_r$ とおき, A と B の中間の環の列 $C_0, C_1, \dots$ を帰納的に次のようにして定める。

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\mathfrak{z}) & \longrightarrow & \prod k(P_i) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} C_{n+1} & \longrightarrow & C_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\mathfrak{z}) & \longrightarrow & C_n \otimes k(\mathfrak{z}) \end{array} \quad (n=0, 1, \dots)$$

は全て pull back 図式。

このとき次の補題が成立する。

(2.1) 補題. A, B, C_n ($n=0, 1, \dots$), $\mathfrak{z}$ は上の通りとする。このとき次の主張が成立する。

- (1) C_0 は B で seminormal.
- (2) ある n について $A = C_n$ となる。
- (3) A が B で seminormal $\Leftrightarrow A$ は $\text{End}_A(\mathfrak{z}) \cap B$ で seminormal.

($\text{End}_A(\mathfrak{z})$ は $Q(A)$ の部分環 $\{x \in Q(A) \mid x\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{z}\}$ と同一視する。)

この補題も用いると

定理 A. R をネーター環 A の拡大環で $A \subseteq R \subseteq Q(A)$ とする。このとき次の4条件は同値。

- (1) A は R で seminormal.
- (1') 各 $\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(R/A)$ に対し $A_{\mathfrak{z}}$ は $R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.
- (2) 各 $\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(R/A)$ に対し, $A_{\mathfrak{z}}$ は $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.
- (3) 各 $\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A(R/A)$ に対し, $A_{\mathfrak{z}}$ は $\text{End}_{A_{\mathfrak{z}}}(\mathfrak{z}A_{\mathfrak{z}}) \cap R_{\mathfrak{z}}$ で seminormal.

(証明) R は A の有限拡大としてよい。又 $(1) \Rightarrow (1')$
 $\Rightarrow (3)$ は明らか。 $\text{Ass}_{A_3}((A_3)^{\mathfrak{g}} \cap R_3 / A_3) = \{\mathfrak{g}A_3\}$ である
 ので (2.1) を用いれば $(3) \Rightarrow (2)$ が示される。 $(2) \Rightarrow (1)$
 もし A が R で seminormal でなければ $b \in R - A$ で、 b^2
 $b^3 \in A$ となる元 b が存在する。 $\mathfrak{g} \in A :_A b$ の極小素イデアル
 とすると $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_A(R/A)$, $b/\mathfrak{g} \notin A_3$, $b/\mathfrak{g} \in (A_3)^{\mathfrak{g}} \cap R_3$ であ
 る。 $b^2/\mathfrak{g}, b^3/\mathfrak{g} \in A_3$ かつ A_3 は $(A_3)^{\mathfrak{g}} \cap R_3$ で seminormal
 であるから $b/\mathfrak{g} \in A_3$ 。これは矛盾。

系 ネーター環 A が seminormal $\iff$ 各 $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_A(\bar{A}/A)$
 に対し A は $\text{End}_A(\mathfrak{g})$ で seminormal.

§3 問題 (B).

定理 B. B を ネーター環 A の拡大環で $A \subseteq B \subseteq Q(A)$
 とする。このとき次の条件は同値である。

- (1) B は有限生成 A -加群。
- (2) $\text{Ass}_A(B/A)$ は有限集合で 各 $\mathfrak{g} \in \text{Ass}_A(B/A)$
 に対し $(A_3)^{\mathfrak{g}} \cap B_3$ は A_3 -加群として有限生成。

(証明) $(1) \Rightarrow (2)$ は明らかである。 $(2) \Rightarrow (1)$:

$\text{Ass}_A(B/A)$ が有限集合であるから、特殊化で安定な $\text{Spec}(A)$ の部分集合の列 $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ で、 $\text{Spec}(A) = Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$,
 $\bigcap_n Z_n = \emptyset$, $Z_n - Z_{n+1}$ は Z_n の generic points の一部からなる,
 $\text{Ass}_A(B/A) \cap (Z_n - Z_{n+1})$ は空集合又は1点よりなる——
 ようなものが選べる。 n_0 を $\text{Ass}_A(B/A) \cap Z_{n_0} = \emptyset$ にとれば"
 (1.4) より $T(Z_{n_0}, A) \cap B = A$ 。さて $L = T(Z_{n+1}, A) \cap B$ が
 有限生成 A -加群であることを仮定して $L' = T(Z_n, A) \cap B$ も
 そうであることを示そう。 $L \neq L'$ としてよい。このとき
 は (1.1) (1.2) (1.3) を用いて $\text{Ass}_A(B/A) \cap (Z_n - Z_{n+1})$ は1
 点 (それを $\mathfrak{z}$ としよう) からなる集合であることが分かる。
 さて, $L_{\mathfrak{z}} = A_{\mathfrak{z}}$, $L'_{\mathfrak{z}} = (A_{\mathfrak{z}})^{\#} \cap B_{\mathfrak{z}}$ ((1.1) 及び (1.2)) である。
 従って 正則元 $t \in \mathfrak{z}$ を適当にとれば $tL'_{\mathfrak{z}} \subseteq L_{\mathfrak{z}}$ 。このとき
 (1.1) (1.2) (1.3) を用いると $tL' \subseteq L$ が示される。よって
 L' は有限生成 A -加群である。以下帰納法を用いて
 $T(Z_0, A) \cap B = B$ は有限生成 A -加群。

この定理 B は Nishimura による結果 [5, (2.6.2)]
 及び [5, (3.1)] を含んでいる。次の系は次節で用いる。

系 A をネーター整域とする。又 $\Delta = \{\mathfrak{z} \in \text{Spec}(A) \mid$
 $\text{ht } \mathfrak{z} \geq 2, \text{depth } A_{\mathfrak{z}} = 1\}$ とおく。このとき $A^{(1)} =$

$\bigcap_{\text{ht } \mathfrak{z}=1} A_{\mathfrak{z}}$ が有限生成 A -加群 $\Leftrightarrow \Delta$ は有限集合で各 $\mathfrak{z} \in \Delta$ に対し $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}$ は有限生成 $A_{\mathfrak{z}}$ -加群.

(証明) $Z = \{\mathfrak{z} \in \text{Spec}(A) \mid \text{ht } \mathfrak{z} \geq 2\}$ とし, $B = A^{(1)} = T(Z, A)$ とおく. (1.4) より $\text{Ass}_A(B/A) = \text{Ass}_A(T(Z, A) \cap Q(A)/A) = \text{Ass}_A(Q(A)/A) \cap Z = \Delta$. 又 $\mathfrak{z} \in Z$ のとき $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \subseteq B_{\mathfrak{z}}$ であるから $(A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}} \cap B_{\mathfrak{z}} = (A_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{z}}$. 従って系は定理より従う.

§4. 問題 (C).

B がネーター環の有限 (S_2) -拡大環であるとは, $A \subseteq B \subseteq Q(A)$, B は A -加群として有限生成かつ Serre の条件 (S_2) を満たす. さて, 問題 (C) に関しては複雑な議論をさけるために整域のみを考えよう.

議論に必要な事柄を引挙しておこう. A はネーター整域とする.

(4.1) (Matijevic) $B \in A$ と $A^{\mathfrak{z}}$ の中間の環とする. このとき任意の $x (\neq 0) \in A$ に対し B/xB は有限生成 A -加群. とくに B はネーター環となる. 又, A が局所環であれば, $\underbrace{\dim A \geq 2 \text{ での}}_{\text{dim } A \geq 2 \text{ での}}$ B は半局所環となる.

$$(4.2) \quad A \subseteq B \subseteq A^{\sharp} \Rightarrow B^{\sharp} = A^{\sharp}.$$

$$(4.3) \quad A \subseteq B \subseteq Q(A), \quad B \text{ は } A \text{ 上有限} \Rightarrow B^{\sharp} \text{ は } A^{\sharp} \text{ 上有限} \\ (\text{加群として}).$$

$$(4.4) \quad A \text{ が半局所環のとき, } t (\neq 0) \in A \text{ を高さ} \geq 2 \text{ の} \\ \text{どの極大イデアルにも含まれ} \text{ ^{ない} } \text{ が, 高さ} 1 \text{ のどの極大イ} \\ \text{デアルにも含まれるようにとると } A_t \subseteq A^{\sharp}.$$

$$(4.5) \quad A \text{ が半局所環のとき, 適当な有限拡大環 } B (A \subseteq B \subseteq A^{\sharp}) \\ \text{と種別集合 } \mathcal{S} \text{ に対し } A^{\sharp} = S^{-1}B \text{ であったとする.} \\ \text{このとき } B \text{ の高さ} \geq 2 \text{ の極大イデアル } \mathfrak{m} \text{ に対して} \\ \text{depth } B_{\mathfrak{m}} \geq 2.$$

$$(4.6) \quad R \text{ を } A \text{ の有限拡大環 } (A \subseteq R \subseteq Q(A)), \quad B = \\ A^{\sharp} \cap R \text{ とおく. } \{R \text{ の高さ} 1 \text{ の極大イデアル}\} \text{ と} \\ \{B \text{ の高さ} 1 \text{ の極大イデアル}\} \text{ とは対応 } N \mapsto N \cap B \\ \text{によって 1 対 1 対応がつく. さらに } N \in R \text{ の高さ} \\ 1 \text{ の極大イデアルとすると } B_{N \cap B} = R_N.$$

(4.2) ~ (4.5) は $A^{\sharp}$ の定義から容易に導かれる。(4.6) については [4] または [6] を参考にせよ。

さて, 局所ネーター整域 A が ^(dim $A \geq 2$ かつ) 有限 (S_2) -拡大環 R を与えよう。 $B = A^{\sharp} \cap R$ とおく。 B は半局所環である。

ここで $t (\neq 0) \in B$ を高さ ≥ 2 の B のどの極大イデアルにも含まれないが, 高さ 1 の B のすべての極大イデアルにも含まれるようにとる。このとき, §1 の最後に述べた注意及び (4.2) (4.4) (4.6) より $A^{\sharp} = (B_t)^{\sharp} \leq (R_t)^{\sharp} = R_t$ 。従って $A^{\sharp}$ は B_t 上 finite。よって $A^{\sharp}$ は A 上 essentially finite である。

以上の注意より次の定理 C の (1) $\Rightarrow$ (2) はほとんど明らかである。

定理 C. A もネーター整域, $\Delta = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \text{ht } \mathfrak{p} \geq 2, \text{depth } A_{\mathfrak{p}} = 1 \}$ とおく。このとき次の条件は同値である。

- (1) A は有限 (S_2) -拡大環をもつ。
- (2) Δ は有限集合で各 $\mathfrak{p} \in \Delta$ に対し $(A_{\mathfrak{p}})^{\sharp}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ 上 essentially finite.

(証明) (2) $\Rightarrow$ (1): A の有限拡大環 B ($\leq \mathcal{Q}(A)$) に対し

$$\Delta(B) = \{ \mathfrak{q} \in \text{Spec}(B) \mid \text{ht } \mathfrak{q} \geq 2, \text{depth } B_{\mathfrak{q}} = 1 \}$$

$$\Delta^*(B) = \{ \mathfrak{q} \in \Delta(B) \mid (B_{\mathfrak{q}})^{\sharp} \text{ は有限 } B_{\mathfrak{q}}\text{-加群でない} \}$$

$$n(B) = \inf \{ \text{ht } \mathfrak{q} \cap A \mid \mathfrak{q} \in \Delta(B) \}$$

$$n^*(B) = \sup \{ \text{ht } \mathfrak{q} \cap A \mid \mathfrak{q} \in \Delta^*(B) \}$$

とおく。 $\Delta(B)$ は必然的に有限集合となる。

A の適当な有限拡大環 R について $\Delta^*(R) \neq \emptyset$ であれればよい。

実際そのような R については §3 の系より $R^{(1)}$ は R (従って A) 上有限であって $R^{(1)}$ は (S_2) を満たす。そこで $\Delta^*(A) \neq \emptyset$ としよう。 $\Delta = \Delta(A)$ の有限性より A の適当な有限拡大環 C をとれば、各 $\mathfrak{p} \in \Delta(A)$ に対して $(A_{\mathfrak{p}})^{\#}$ は $(A_{\mathfrak{p}})^{\#} \cap C_{\mathfrak{p}}$ の局所化となるように出来る。そこで $Z = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Delta(A)} V(\mathfrak{p})$, $B = T(Z, A) \cap C$ とおく。このとき B は定理の条件 (2) を満たし $n^*(A) \geq n^*(B)$ (もし $\Delta^*(B) \neq \emptyset$ ならば) となることが容易に示される。又, (4.5) を用いることにより $n(B) > n(A)$ (もし $\Delta(B) \neq \emptyset$ ならば) であることが証明出来る。これらの事実を用いて帰納的に A の有限拡大環の列 $B_n (\subseteq Q(A))$ で,

(a) 各 B_n は定理の条件 (2) を満たし,

(b) もし $\Delta^*(B_i) \neq \emptyset$ ($i=1, \dots, n$) であれば

$$n^*(A) \geq n^*(B_1) \geq \dots \geq n^*(B_n) \geq n(B_n) > \dots > n(B_1) > n(A),$$

となるものが構成出来る。数列 $n(B_i)$ は上に有界であるので適当な j について $\Delta^*(B_j) \neq \emptyset$ であるなければならない。

注意 上の定理において A の整域性は不要である。

([6] を参考にせよ。)

注意 [2] において示されているように ネーター局所環 A で $\text{depth } A = 1$ なるものについて

(1) A^g が A 上 finite $\Leftrightarrow$ 任意の $\mathfrak{g} \in \text{Ass } \hat{A}$ に対し $\dim \hat{A}/\mathfrak{g} \geq 2$,

(2) A^g が A 上 integral $\Leftrightarrow$ 任意の $\mathfrak{g} \in \text{Min } \hat{A}$ に対し $\dim \hat{A}/\mathfrak{g} \geq 2$

である。これと類似の結果として,

(3) A^g が A 上 essentially finite $\Leftrightarrow \hat{A}$ の embedded prime ideal $\mathfrak{g}$ について $\dim \hat{A}/\mathfrak{g} \geq 2$

が成立する。とくに $\hat{A}$ が embedded prime ideals をもたない (即ち (S_1)) ならば A^g は A 上 essentially finite である。

参考文献

[1] M. Brodmann, Finiteness of ideal transforms, J. of Algebra 63, 162-185 (1980)

[2] D. Ferrand - M. Raynaud, Fibres formelles d'un anneaux local noethérien, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 3 (1970), 295-311.

[3] J. Matijević, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), 49-52.

- [4] J. Nishimura, On ideal transforms of noetherian rings I, J. Math. Kyoto Univ., 19 (1979), 41-46
- [5] ———, ——— II, J. Math. Kyoto Univ., 20 (1980), 149-154.
- [6] S. Itoh, Z-transforms and overrings of a noetherian rings, (to appear in Hiroshima Math. J.)