

2 次配置空間の副 p 基本群を用いた関数体の復元, 研究報告 (Reconstruction of function fields from pro- p second configuration space groups, a research announcement)

By

東山 和巳 (Kazumi Higashiyama)*

Abstract

In the present article, the author gives an outline of the paper “The semi-absolute anabelian geometry of geometrically pro- p arithmetic fundamental groups of associated low-dimensional configuration spaces”. The detail of the arguments appearing in the present paper may be found in [Hgsh2].

§ 0. 序

本稿の目的は, 論文「The semi-absolute anabelian geometry of geometrically pro- p arithmetic fundamental groups of associated low-dimensional configuration spaces」の概要を解説することである.

本稿の構成は以下の通りである: §1 で, 主結果の主張を述べて, 従来の結果との比較を行う. §2 以降では, §1 で述べた主結果の証明の概略を与える. 本稿で与えられている議論の詳細については [Hgsh2] を参照.

定義 0.1. k を体とする.

- (i) 基点付きの連結な (代数) 多様体 X のエタール基本群 (以下, 基本群) を $\pi_1(X)$ とかく. (連結性により, 基本群の同型類は基点の取り方に依存しない. 以降の議論ではその同型類にのみ関心があるので, 基本群の表記やそれを用いた議論においては基点の選択を明示しない.)

Received March 23, 2018. Revised July 7, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 14H30, 14H10.

Key Words: anabelian geometry, Grothendieck conjecture, configuration space.

*606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所;

RIMS, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.

e-mail: higashi@kurims.kyoto-u.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

- (ii) X を k 上の滑らかな曲線とする. k 値点の集合を $X(k)$ とかく. k の代数閉包を $\bar{k}$ とかく. X の滑らかなコンパクト化 X^{cpt} の種数を g とする. $X^{\text{cpt}}(\bar{k}) \setminus X(\bar{k})$ の濃度を r とする. $2g - 2 + r > 0$ を満たすとき, X を $((g, r)$ 型の) 双曲的曲線という. さらに $X^{\text{cpt}}(k) \setminus X(k)$ の濃度が r のとき, X を分裂 (g, r) 型双曲的曲線という.
- (iii) $X^\dagger, X^\ddagger$ を k 上の双曲的曲線とする. k 上の双曲的曲線 Y と, 有限エタール射 $Y \rightarrow X^\dagger, Y \rightarrow X^\ddagger$ が存在するとき, $X^\dagger, X^\ddagger$ は同種であるという. X を k 上の双曲的曲線とする. X が数体上定義されていて, 種数 0 の双曲的曲線と同種であるとき, X を狭義ベリ型双曲的曲線という.
- (iv) (g, r) を $2g - 2 + r > 0$ を満たす非負の整数の組とする. $(k$ 上の) (g, r) 型の標点に順序付けされた標点付き安定曲線のモジュライスタックを $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ とかく. 双曲的曲線に対応する開部分スタックを $\mathcal{M}_{g,r} \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ とかく.
- (v) n を正の整数, X を k 上の双曲的曲線とする. X の n 次配置空間を X_n とかく.

注意. k を体, n を正の整数, X を k 上の分裂 $(0, 3)$ 型双曲的曲線とする. このとき, 自然な同型

$$X_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{0,3+n}$$

が存在することに注意する.

§ 1. 主結果

§1 では, [Hgsh2] により得られた主結果を説明する. そのために, まず遠アーベル幾何について説明しよう.

遠アーベル幾何とは, 大雑把に言うと, グロタンディークが提唱した基本群に関する以下の主張 (今ではグロタンディーク予想と呼ばれている) の解決を目的とした分野である:

予想 1.0 (グロタンディーク予想). 素体上有限生成な体 k 上の “遠アーベル多様体” X は, 基本群 $\pi_1(X)$ の位相群構造及び付随する k の絶対ガロア群への全射 $\pi_1(X) \twoheadrightarrow G_k$ の構造から “復元” できる.

ここでも, “復元” について復習する. $X^\dagger, X^\ddagger$ を k 上の多様体, $\bar{k}$ を k の代数閉包とする. k 上の多様体の同型射 $X^\dagger \xrightarrow{\sim} X^\ddagger$ は, 位相群の同型射 $\pi_1(X^\dagger) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X^\ddagger)$ の $\pi_1(X_k^\ddagger)$ 共役類を誘導する. すなわち, $\text{Isom}_k(X^\dagger, X^\ddagger)$ を $X^\dagger$ から $X^\ddagger$ への k 上の多様体の同型射全体, $\text{Isom}_{G_k}(\pi_1(X^\dagger), \pi_1(X^\ddagger))$ を $\pi_1(X^\dagger)$ から $\pi_1(X^\ddagger)$ への G_k 上の位相群の同型射全体, $\text{Inn}(\pi_1(X_k^\ddagger))$ を $\pi_1(X_k^\ddagger)$ の元から生じる $\pi_1(X^\ddagger)$ の内部自己同型全体としたとき, 以下の射が得られる:

$$\text{Isom}_k(X^\dagger, X^\ddagger) \rightarrow \text{Isom}_{G_k}(\pi_1(X^\dagger), \pi_1(X^\ddagger)) / \text{Inn}(\pi_1(X_k^\ddagger)).$$

“復元”とは、例えば、この逆写像を与えることである。また“遠アーベル多様体”とは、大雑把に言うと、このような意味での“復元”ができるような多様体のことである。

グロタンディーク予想にはさまざまなバージョンがある。上にあげたような「 G_k 上の位相群の同型射

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X^\dagger) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X^\ddagger) \\ & \searrow & \swarrow \\ & G_k & \end{array}$$

から、多様体の同型射 $X^\dagger \xrightarrow{\sim} X^\ddagger$ を復元する」問題を、相対グロタンディーク予想型問題という。「位相群の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X^\dagger) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X^\ddagger) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k & \xrightarrow{\sim} & G_k \end{array}$$

から、多様体の同型射 $X^\dagger \xrightarrow{\sim} X^\ddagger$ を復元する」問題を、半絶対グロタンディーク予想型問題という。「基本群の同型射 $\pi_1(X^\dagger) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X^\ddagger)$ から、多様体の同型射 $X^\dagger \xrightarrow{\sim} X^\ddagger$ を復元する」問題を、絶対グロタンディーク予想型問題という。

既存の結果には、例えば、以下のようなものがある。

定理 1.1. p を素数とする。 k を数体または p 進局所体とする。 $X^\dagger, X^\ddagger$ を k 上の双曲的曲線とする。 G_k を k の絶対ガロア群とする。

(i) 相対グロタンディーク予想型問題が肯定的に解ける (cf. [LocAn], Theorem A). すなわち、以下の同型射が得られる：

$$\mathrm{Isom}_k(X^\dagger, X^\ddagger) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1(X^\dagger), \pi_1(X^\ddagger)) / \mathrm{Inn}(\pi_1(X_k^\ddagger)).$$

(ii) 自然な写像

$$\mathrm{Isom}(X^\dagger, X^\ddagger) \rightarrow \mathrm{Isom}(\pi_1(X^\dagger), \pi_1(X^\ddagger)) / \mathrm{Inn}(\pi_1(X^\ddagger))$$

は、 $\mathrm{Isom}(X^\dagger, X^\ddagger)$ と、任意の分解群をある分解群に移す同型射全体のなす $\mathrm{Isom}(\pi_1(X^\dagger), \pi_1(X^\ddagger)) / \mathrm{Inn}(\pi_1(X^\ddagger))$ の部分集合との全単射を定める (cf. [AbsTpII], Corollary 2.9). すなわち、大雑把に言うと、分解群の集合が与えられている場合の、双曲的曲線に対する絶対グロタンディーク予想型問題が肯定的に解ける。

(iii) $X^\dagger, X^\ddagger$ が狭義ベリー型双曲的曲線であるとき、絶対グロタンディーク予想型問題が肯定的に解ける (cf. [AbsTpIII], Theorem 1.9).

以下の定理が主結果である。

定理 1.2. p を素数とする. k を 1 の p べき根を含む数体または 1 の p べき根を含む p 進局所体とする. G を k の絶対ガロア群の最大副 p 商とする. K を k の最大副 p 拡大とする. Π_2 を $\mathcal{M}_{0,5}$ の基本群の最大副 p 商とする.

$$\mathcal{C}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{D \subset \Pi_2 \mid \text{ある } x \in \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(K) \text{ と } x \text{ の } \Pi_2 \text{ 内の} \\ \text{ある分解群 } D_x \text{ が存在して } D = D_x\}$$

とおく.

このとき, データ

$$\Pi_2 \twoheadrightarrow G, \quad \mathcal{C}_2$$

(これらの組を $PGCS$ -組という (cf. 定義 2.2)) から以下のデータを群論的アルゴリズムのみから構成できる.

(i) K 値点全体

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(K), \quad \mathcal{M}_{0,5}(K), \quad \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(K), \quad \mathcal{M}_{0,4}(K)$$

が構成できる. $\mathcal{M}_{0,5}$ の k 上の自己同型群が定める部分群

$$\text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5}) \subseteq \text{Aut}(\mathcal{M}_{0,5}(K))$$

が構成できる. k 上の全射たち $\mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ が誘導する K 値点の集合の間の写像全体

$$M_{\mathcal{M}_{0,5}(K) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{0,4}(K)}$$

も構成できる.

(ii) 体 K , k が構成できる.

(iii) $\mathcal{M}_{0,4}$ の関数体 $k(\mathcal{M}_{0,4})$ が構成できる. 特に, $PGCS$ -組が与えられている場合の, $\mathcal{M}_{0,4}$ に対する半絶対グロタンディーク予想型問題が肯定的に解ける.

副有限基本群に対して, 最大副 p 商をとるという群論的な操作を行うことで副 p 基本群が得られる. このことからわかるように, 遠アーベル幾何の命題は, 副 p 版から幾何的副 p 版が, 幾何的副 p 版から副有限版が自然に導かれる. 既存の結果はどれも副有限基本群または幾何的副 p 基本群に対しての結果である. 定理 1.1, (i), のみ副 p 版でも成立することが知られていたが, 他の結果の副 p 版の成立は知られていない. この主定理 1.2 は副 p 基本群に対して成り立つという点が新しい.

また, 従来の遠アーベル幾何は

$$\text{Isom}_k(X^\dagger, X^\ddagger) \xrightarrow{\sim} \text{Isom}_{G_k}(\pi_1(X^\dagger), \pi_1(X^\ddagger))/\text{Inn}(\pi_1(X_k^\ddagger))$$

のように「基本群の同型は多様体の同型から誘導されるか?」という, $X^\dagger$ と $X^\ddagger$ という 2 つの対象に対するものであった. このような遠アーベル幾何を“双遠アーベル幾何”という.

一方、「単一の基本群から群の言葉を用いて多様体を構成する」という“単遠アーベル幾何”も存在する. 簡単な例では, G_k という単一の群から群論の言葉を用いて $H^1(G_k, \hat{\mathbb{Z}}(1))$ を構成する. これは (Kummer 理論により) $\widehat{k^\times}$ と同型なので, 乗法群 $\widehat{k^\times}$ を構成したとみなすことができる. このような操作を繰り返すことで関数体ないし多様体を構成しようというのが単遠アーベル幾何である. 単 (遠アーベル幾何) 的な構成ができるとき, 双的なグロタンディーク予想型問題が肯定的に解ける. 既存の結果の中では定理 1.1, (iii), のみが単的に構成できる. 主定理 1.2 の構成は, 単的な構成であり, この点は特筆すべき点である.

定理 1.2 の証明の概略については, 次 § 以降で解説していく.

§ 2. 定理 1.2, (i), の証明のアイデア

§2 では, 定理 1.2, (i), の証明のアイデアについて解説する.

命題 2.1. p を素数とする. k を 1 の p べき根を含む数体または 1 の p べき根を含む p 進局所体とする. $\bar{k}$ を k の代数閉包とする. $i \in \{1, 2\}$ に対して, $(\mathcal{M}_{0,3+i})_{\bar{k}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{0,3+i} \times_k \bar{k}$ とかく. このとき以下が成立する.

(i) 自然な射 $(\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}} \rightarrow \mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \text{Spec}(k)$ は同型射

$$\pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)} \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} \rightarrow G_k^{(p)})$$

を誘導する, ここで群 H に対して $H^{(p)}$ は H の最大副 p 商のことである.

(ii) 全射 $(\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}} \rightarrow (\mathcal{M}_{0,4})_{\bar{k}}$ が誘導する基本群の最大副 p 商の間の射

$$\pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)} \rightarrow \pi_1((\mathcal{M}_{0,4})_{\bar{k}})^{(p)}$$

の核を“一般化ファイバー部分群”という (cf. [HMM], Definition 2.1, (ii)). このとき, 一般化ファイバー部分群全体は群論的に特徴付けされる (cf. この命題の直後の注意, (iii)). 以下, 一般化ファイバー部分群 E を 1 つ固定する.

(iii) ある全射 $\mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ は同型射

$$\pi_1((\mathcal{M}_{0,4})_{\bar{k}})^{(p)} \xleftarrow{\sim} \pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)} / E,$$

$$\pi_1(\mathcal{M}_{0,4})^{(p)} \xleftarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} / E$$

を誘導する.

(iv) $i \in \{1, 2\}$ に対して,

$$\mathcal{D}_i \stackrel{\text{def}}{=} \{D \subset \pi_1(\mathcal{M}_{0,3+i})^{(p)} \mid \text{ある } x \in \overline{\mathcal{M}}_{0,3+i}(K) \text{ と } x \text{ の } \pi_1(\mathcal{M}_{0,3+i})^{(p)} \text{ 内の} \\ \text{ある分解群 } D_x \text{ が存在して } D = D_x\}$$

とおく. このとき, (iii) の全射 $\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{0,4})^{(p)}$ に対して,

$$\mathcal{D}_1 = \{(\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{0,4})^{(p)})(D) \mid D \in \mathcal{D}_2\}$$

が成り立つ.

(v) $i \in \{1, 2\}$ に対して, 分解群を考えることで得られる写像

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,i+3}(K) \rightarrow \mathcal{C}_i / \text{Inn}(\pi_1((\mathcal{M}_{0,3+i})_{\bar{k}})^{(p)})$$

は全単射である.

(vi) 任意の $x \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(K)$ に対して,

$$x \in \mathcal{M}_{0,4}(K) \iff D_x \cap \pi_1((\mathcal{M}_{0,4})_{\bar{k}})^{(p)} = \{1\}.$$

(vii)

$$\begin{aligned} & \text{Aut}_{G_k^{(p)}}(\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)}) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in \text{Aut}(\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)}) \mid \sigma(\pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)}) = \pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)} \\ & \quad \text{かつ } \sigma \text{ は } G_k^{(p)} \text{ 上恒等射} \} \end{aligned}$$

とする. このとき, 基本群の関手性によって得られる射

$$\text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5}) \rightarrow \text{Aut}_{G_k^{(p)}}(\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)}) / \text{Inn}(\pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)})$$

は同型写像である.

(viii) $q: \mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ を全射としたとき,

$$q \circ \text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5}) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \circ f \mid f \in \text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})\}$$

は全射 $\mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ 全体である.

注意.

(i) 命題 2.1, (i), は

$$1 \longrightarrow \pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)} \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} \longrightarrow G_k^{(p)} \longrightarrow 1$$

が完全列であるという主張である. この命題を成立させるために体 k が 1 の p べき根を含むという条件を課した. 詳しくは [MzTa], Proposition 2.2, (i), を参照.

- (ii) k を標数 0 の体とする. $n > m$ を正の整数とする. k 上の双曲的曲線 X に対して, n 次, m 次配置空間 X_n, X_m を考える. X_n の n 個の座標のうちの $n-m$ 個を忘れることで得られる全射 $X_n \rightarrow X_m$ を射影といい, このような射影が誘導する基本群の射 $\pi_1(X_n) \rightarrow \pi_1(X_m)$ の核をファイバー部分群という (cf. [MzTa], Definition 2.3, (iii)). X が $(g, r) = (0, 3), (1, 1)$ 型 of 双曲的曲線の場合, 射影以外の全射 $X_n \rightarrow X_m$ も存在することが知られている (cf. e.g., [Hgsh1], §3). そのため, X が $(g, r) = (0, 3), (1, 1)$ 型 of 双曲的曲線の場合, ファイバー部分群だけでなく, 命題 2.1, (ii), で導入したような一般化ファイバー部分群を考えることが自然である (cf. [Hgsh1]).
- (iii) 命題 2.1, (ii), の一般化ファイバー部分群は大雑把には「曲面群と同型になるような部分群」として群論的に特徴付けされる. より詳しい議論については, [HMM], Theorem 2.5, (iv), を参照.

定義 2.2. Π_2 を副有限群とする. G を Π_2 の商とする. $\mathcal{C}_2$ を Π_2 の部分群の集合とする. 以下が成立するとき, $\mathcal{B} = (\Pi_2, G, \mathcal{C}_2)$ を “PGCS-組” という (PGCS は Point-theoretic Galois Configuration Space の略):

1 の p べき根を含む数体または 1 の p べき根を含む p 進局所体 k と同型射 $\alpha: \Pi_2 \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)}$ が存在して, α は可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2 & \xrightarrow[\alpha]{\sim} & \pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G & \xrightarrow[\sim]{\dots\dots\dots} & G_k^{(p)} \end{array}$$

と (α を各部分群へ制限することにより得られる) 全単射

$$\mathcal{C}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_2$$

を誘導する.

定義 2.3. $\mathcal{B} = (\Pi_2, G, \mathcal{C}_2)$ を PGCS-組とする.

- (i) $\Delta_2[\mathcal{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(\Pi_2 \rightarrow G)$.
- (ii) 命題 2.1, (ii), のように一般化ファイバー部分群に対応する $\Delta_2[\mathcal{B}]$ の部分群全体 $\{E \subseteq \Delta_2[\mathcal{B}]\}$ が群論的に特徴付けられる. このような部分群 E を $\Delta_2[\mathcal{B}]$ の一般化ファイバー部分群と呼ぶ. 以下, 一般化ファイバー部分群 E を 1 つ固定する.
- (iii) $\Delta_1[\mathcal{B}, E] \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_2[\mathcal{B}]/E, \Pi_1[\mathcal{B}, E] \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_2/E$.
- (iv) $\mathcal{C}_1[\mathcal{B}, E] \stackrel{\text{def}}{=} \{(\Pi_2 \rightarrow \Pi_1[\mathcal{B}, E])(D) \mid D \in \mathcal{C}_2\}$.
- (v) $A[\mathcal{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_2/\text{Inn}(\Delta_2[\mathcal{B}])$.

- (vi) $B[\mathcal{B}, E] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_1[\mathcal{B}, E] / \text{Inn}(\Delta_1[\mathcal{B}, E])$.
- (vii) $\partial B[\mathcal{B}, E] \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{D} \in B[\mathcal{B}, E] \mid D \cap \Delta_1[\mathcal{B}, E] \neq \{1\}\}$.
- (viii) $H[\mathcal{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}_G(\Pi_2) / \text{Inn}(\Delta_2[\mathcal{B}])$.
- (ix) $M[\mathcal{B}, E] \stackrel{\text{def}}{=} (A[\mathcal{B}] \rightarrow B[\mathcal{B}, E]) \circ H[\mathcal{B}]$, ここで $A[\mathcal{B}] \rightarrow B[\mathcal{B}, E]$ は $\Pi_2 \rightarrow \Pi_1[\mathcal{B}, E]$ から生じた射である.

定理 2.4 (定理 1.2, (i), の証明). $\mathcal{B} = (\Pi_2, G, \mathcal{C}_2)$ を PGCS-組とする. すなわち, 1 の p べき根を含む数体または 1 の p べき根を含む p 進局所体 k とある同型射 $\alpha: \Pi_2 \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)}$ が存在して, α は可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2 & \xrightarrow[\alpha]{\sim} & \pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\sim} & G_k^{(p)} \end{array}$$

と全単射

$$\mathcal{C}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_2$$

を誘導する. $E \subseteq \Pi_2$ を定義 2.3, (ii), のようにとる. このとき以下が成立する.

(i) α は以下の可換図式を定める.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Delta_2[\mathcal{B}] & \xrightarrow{\quad} & \Pi_2 \\ & \swarrow \sim & \downarrow & & \swarrow \sim \alpha \\ \pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)} & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \swarrow \sim & \Delta_1[\mathcal{B}, E] & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1[\mathcal{B}, E] \\ \pi_1((\mathcal{M}_{0,4})_{\bar{k}})^{(p)} & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(\mathcal{M}_{0,4})^{(p)} & & \end{array}$$

ここで, $\pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_{\bar{k}})^{(p)} \rightarrow \pi_1((\mathcal{M}_{0,4})_{\bar{k}})^{(p)}$, $\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})^{(p)} \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{0,4})^{(p)}$ はある全射 $\mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ が誘導する基本群の最大副 p 商の間の射.

(ii) α は以下の同型を定める.

$$\mathcal{C}_1[\mathcal{B}, E] \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_1, \quad A[\mathcal{B}] \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(K), \quad B[\mathcal{B}, E] \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(K),$$

$$\partial B[\mathcal{B}, E] \xrightarrow{\sim} \{0, 1, \infty\}, \quad H[\mathcal{B}] \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5}),$$

$$M[\mathcal{B}, E] \xrightarrow{\sim} M_{\mathcal{M}_{0,5}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}(K)}.$$

定理 2.4 は, 「定義 2.3 で群論的に定義した

$$A[\mathcal{B}], B[\mathcal{B}, \mathcal{E}], \partial B[\mathcal{B}, E], H[\mathcal{B}], M[\mathcal{B}, E]$$

が, 所望の

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(K), \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(K), \mathcal{M}_{0,4}(K), \text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5}), M_{\mathcal{M}_{0,5}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}(K)}$$

に自然に対応する。」という主張である. この定理は, 命題 2.1 の幾何的な結果により簡単に従う.

§ 3. 定理 1.2, (ii), の証明のアイデア

定理 1.2, (ii), の証明のアイデアについて解説する. §0 で注意したように, $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ と $\mathcal{M}_{0,4}$ との間には自然な同型 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{0,4}$ が存在する. これにより

$$K \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1 \text{ と } \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(K),$$

$$K \setminus \{0, 1\} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \text{ と } \mathcal{M}_{0,4}(K),$$

$$\{(a, b) \in (K \setminus \{0, 1\})^2 \mid a \neq b\} \text{ と } \mathcal{M}_{0,5}(K)$$

を同一視する. §2 では, $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}(K) = K \cup \{\infty\}$ に自然に対応する集合が復元できた. §3 では K の体構造を復元する. 体構造を復元するために $\mathcal{M}_{0,5}$ の自己同型群を用いる.

K 値点 $z \in \mathcal{M}_{0,5}(K)$ は相異なる元 $a, b \in \mathcal{M}_{0,4}(K)$ を用いて, $z = (a, b)$ と書けることに注意する.

元 $a \in \mathcal{M}_{0,4}(K)$ に $\mathcal{M}_{0,4}$ の自己同型 $\text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,4}) \xrightarrow{\sim} S_3$ を作用させても, 新しい元はあまり得られない.

$$a \mapsto a, \frac{1}{a}, 1-a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}, \frac{a}{a-1}.$$

一方, $\text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})$ は $\text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,4})$ に比べて “大きい” ので, $a, b \in \mathcal{M}_{0,4}(K)$ を $(a, b) \in \mathcal{M}_{0,5}(K)$ に持ち上げて, $\text{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})$ の適切な元を作用させて, 再び $\mathcal{M}_{0,4}(K)$ へ射影させることで

$$\frac{b}{a}, \frac{b-a}{b}$$

のような元を構成することができる. 操作 “ $a, b \mapsto \frac{b}{a}$ ” を適切に用いることで乗法構造を復元し, 操作 “ $a, b \mapsto \frac{b-a}{b}$ ” を適切に用いることで加法構造を復元する. これらの操作は §2 で群論的に復元したため, これらの操作を繰り返すことで K の体構造を復元することができる.

§ 4. 定理 1.2, (iii), の証明のアイデア

定理 1.2, (iii), の証明のアイデアについて解説する. §3 で既に体 K を復元している. これと定理 1.1, (iii), を用いて関数体を復元する.

まず最初に, 関数体の復元の準備のための定理を用意する.

定理 4.1. k を数体または p 進局所体とする. Π_2^{prf} を $\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})$ と同型な副有限群とする. 副有限群 Π_2^{prf} が与えられているとき, 以下の対象が群論的に復元できる.

- (i) Π_2^{prf} の一般化ファイバー部分群の全体が復元できる (cf. [HMM], Theorem 2.5, (iv)). $E \subseteq \Pi_2^{\text{prf}}$ を一般化ファイバー部分群とすると, ある全射 $\mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4}$ に対応する全射 $\Pi_2^{\text{prf}} \twoheadrightarrow \Pi_1^{\text{prf}}[\Pi_2^{\text{prf}}, E] \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_2^{\text{prf}}/E$ が復元できる.
- (ii) 基礎体 k のガロア群への全射 $\Pi_2^{\text{prf}} \twoheadrightarrow G[\Pi_2^{\text{prf}}]$ が復元できる (cf. [AbsTpI], Proposition 2.5).
- (iii) $\mathcal{M}_{0,5}$ の K 値点に付随する分解群全体の集合 $\mathcal{D}_2[\Pi_2^{\text{prf}}]$ が復元できる (cf. [AbsTpIII], Theorem 1.9).
- (iv) $\mathcal{M}_{0,4}$ の関数体の最大不分岐拡大に対応する群作用付き体 $\Pi_1^{\text{prf}}[\Pi_2^{\text{prf}}, E] \curvearrowright F_1[\Pi_2^{\text{prf}}, E]$ が復元できる (cf. [AbsTpIII], Theorem 1.9).

さて, 定理 1.2, (iii), の証明を完成させよう. $\mathcal{B} = (\Pi_2, G, \mathcal{D}_2)$ を PGCS-組 (cf. 定義 2.2) とする. 定理 1.2, (i), (ii), により, 基礎体 “ k ” に対応する体 $k[\mathcal{B}] = K^G$ が構成できる. k を $k[\mathcal{B}]$ と同型な体とする. Π_2^{prf} を $\pi_1((\mathcal{M}_{0,5})_k)$ と同型な副有限群とする. 定理 4.1 で得られた対象を副 p 化することで PGCS-組 $\mathcal{B}[\Pi_2^{\text{prf}}] \stackrel{\text{def}}{=} (\Pi_2^{\text{prf},(p)}, G^{(p)}[\Pi_2^{\text{prf}}], \mathcal{D}_2^{(p)}[\Pi_2^{\text{prf}}])$ が得られる.

同型 $\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}[\Pi_2^{\text{prf}}]$ を 1 つとる. 次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2 & \xrightarrow{\sim} & \Pi_2^{\text{prf},(p)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_1[\mathcal{B}, E] & \xrightarrow{\sim} & \Pi_1^{\text{prf},(p)}[\Pi_2^{\text{prf}}, E]. \end{array}$$

すると, Π_2 が作用する体

$$\Pi_2 \curvearrowright F_1^{(p)}[\mathcal{B}, E] \stackrel{\text{def}}{=} F_1[\Pi_2^{\text{prf}}, E]^{\text{Ker}(\Pi_1^{\text{prf}}[\Pi_2^{\text{prf}}, E] \rightarrow \Pi_1^{\text{prf},(p)}[\Pi_2^{\text{prf}}, E] \xrightarrow{\sim} \Pi_1[\mathcal{B}, E])}$$

が定義できる. α により体 $F_1^{(p)}[\mathcal{B}, E]$ は $\mathcal{M}_{0,4}$ の最大副 p 被覆の関数体に対応するため, 固定体 $F_1^{(p)}[\mathcal{B}, E]^{\Pi_2}$ は関数体 $k(\mathcal{M}_{0,4})$ に対応する. 以上の議論により, 関数体 $k(\mathcal{M}_{0,4})$ を構成することができた.

注意. Π_2 と Π_2^{prf} は独立した抽象的な副有限群であるため, とくに, Π_2^{prf} の最大副 p 商が Π_2 というわけではない. 同型 $\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}[\Pi_2^{\text{prf}}]$ を 1 つとることで初めて全射

$$\Pi_2^{\text{prf}} \longrightarrow \Pi_2^{\text{prf},(p)} \xrightarrow{\sim} \Pi_2$$

が得られる.

謝辞

研究集会“代数的整数論とその周辺”での筆者の研究の講演の機会をいただいたことに対して、“代数的整数論とその周辺”研究集会運営委員会の皆様に感謝いたします。また、本研究に関して様々なアドバイスをくださった星裕一郎氏、望月新一氏に感謝いたします。

References

- [Hgsh1] K. Higashiyama, Reconstruction of inertia groups associated to log divisors from a configuration space group equipped with its collection of log-full subgroups, *Math. J. Okayama. Univ.* **61** (2019), 37–73.
- [Hgsh2] K. Higashiyama, The semi-absolute anabelian geometry of geometrically pro- p arithmetic fundamental groups of associated low-dimensional configuration spaces, RIMS preprint **1906** (August 2019).
- [HMM] Y. Hoshi, A. Minamide and S. Mochizuki, Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups, RIMS Preprint **1870** (March 2017).
- [LocAn] S. Mochizuki, The local pro- p anabelian geometry of curves, *Invent. Math.* **138** (1999), 319–423.
- [AbsTpI] S. Mochizuki, Topics in Absolute Anabelian Geometry I: Generalities, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* **19** (2012), 139–242.
- [AbsTpII] S. Mochizuki, Topics in Absolute Anabelian Geometry II: Decomposition Groups and Endomorphisms, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* **20** (2013), 171–269.
- [AbsTpIII] S. Mochizuki, Topics in Absolute Anabelian Geometry III: Global Reconstruction Algorithms, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* **22** (2015), 939–1156.
- [MzTa] S. Mochizuki and A. Tamagawa, The Algebraic and Anabelian Geometry of Configuration Spaces, *Hokkaido Math. J.* **37** (2008), 75–131.