

Link の concordant classification について

大阪市大 炭谷哲夫

序

R^3 or S^3 の knot の concordant (cobordic) classification は [1] で, link に関しては [2] でやられている。ここでは [1] と同じようなやり方で link に concordant classification を導入しようとする。link の product がうまく定義できず, あまりうまくいかないという話である。

4-dimensional Euclidean space R^4 に embed された oriented surface F を考える。 F の local knot type を次のように定める。 $N(x, R^4)$, $N(x, F)$ をそれぞれ R^4 , F の点 x における regular neighborhood とする。もし x が F の interior point ならば, boundary $\partial N(x, R^4)$ は 3-sphere で $\partial N(x, F)$ は 1-sphere である。そのとき $\partial N(x, F)$ を $k(x)$ と書き x における F の local knot という。 $k(x)$ が trivial ならば F は

x が locally flat といい、もし $k(x)$ が non-trivial のとき、 F は x で locally knotted あるいは x は F の locally knotted point という。 F が R^4 の subspace に properly に embed されているとき ∂F の真に隣しても local knot は考えられるが、 F の slight modification により x は F の interior point と考えることによりそこの local knot ということになり ∂F では locally flat と仮定してさしつかえない。
 F の各点で locally flat のとき F は locally flat といい、そうでないとき F は locally knotted という。

Fox, Milnor は [1] で knot に equivalence relation をいれた。すなわち、knot k と k' が concordant, $k \sim k'$ とは $k \# (-k')$ が slice knot で定義する。 k が slice knot とは $R^4 \supset R^3[0] = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid t=0\} \supset k$ が $R^3[0, \infty) = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid t \geq 0\}$ で locally flat な disk をはるときをいう。さらに R^4 に embed された 2-sphere S^2 の locally knotted points のすべてを $p_1, \dots, p_n$ としたとき、 S^2 上で $p_1, \dots, p_n$ を通る arc α をとるとき、 $(\partial N(\alpha, S^2), \partial N(\alpha, R^4)) \approx (k(p_1) \# \dots \# k(p_n), S^3)$ が slice knot になる。また [1] の Theorem 3 により次のようにもいえる。すなわち $k \sim k'$ なるための必要十分条件は $R^3[0, 1] = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid 0 \leq t \leq 1\}$ に locally flat な annulus が

存在して $R^3[0]$, $R^3[1]$ での boundary が k と $-k'$ になることである。これを link に拡張する。すなわち l と l' なる link が concordant, $l \sim l'$ とは (ここで l と l' の components の数が異なる場合も定義できるが、一応その数は同じとする。) $R^3[0]$, $R^3[1]$ に $\mu(l)$ 個の disjoint locally flat な annuli が存在して $R^3[0]$, $R^3[1]$ での boundary が l と $-l'$ になるときをいう。さらにこの定義を少し弱めて、 l と l' の間に locally flat でなくともよいが disjoint な annuli がはれるとき l と l' は weak concordant と呼び $l \sim_w l'$ で表わす。そのとき次の 2 つの Lemma は明らかである。

Lemma 1: $\sim, \sim_w$ は equivalence relation になる。

Lemma 2: 任意の knot は weak concordant to 0 (0 は trivial knot)。特に slice knot ならば concordant to 0 。

Theorem 1: $l \sim_w l'$ とする。そのとき対応する各 component が knot concordant ならば $l \sim l'$ 。

proof: $F_1 \cup \dots \cup F_n$ を $R^3[0,1]$ の mutually disjoint な annuli で $(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[0] \sim l$, $(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[1] \sim (-l')$ なるものとする。各 F_i がすでに locally flat ならばなにもする必要がないから少なくとも一つ、たとえば F_1 が locally flat でないとする。

$F_1 \cap R^3[0] = k_1$, $F_1 \cap R^3[1] = (-k'_1)$ とすると条件より $k_1 \sim k'_1$ 。 $R^3[1]$, $R^3[2]$ で p, p' をそれぞれとり 2 つの cone $p * k_1$, $p' * (-k'_1)$ を

作る。すると $F_1 \cup p \# k_1 \cup p' \# (-k'_1)$ は 1つの 2-sphere S^2 で "locally knotted points" は $p, p', p_1, \dots, p_n$ である。ここで $p_1, \dots, p_n$ は F_1 の locally knotted points の全部とする。そこで S^2 上で p, p' を通り $p_1, \dots, p_n$ を通らない arc α をとる。すると $\partial(N(\alpha, R^4) \cap S^2) \approx k_1 \# (-k'_1) \sim 0$ 。だから F_1 上で $p_1, \dots, p_n$ を通る arc β をとると $\partial(N(\beta, R^4) \cap S^2) \approx k(p_1) \# \dots \# k(p_n) \sim 0$ 。だから $N(\beta, R^4)$ の中で $k(p_1) \# \dots \# k(p_n)$ に locally flat な disk D をはり $\tilde{F}_1 = (F_1 - N(\beta, R^4) \cap F_1) \cup D$ とおくと $\tilde{F}_1$ は locally flat で $\partial \tilde{F}_1 = \partial F_1$ 。以下同様 $F_2 \cup \dots \cup F_n$ を locally flat にできる。故に $l \sim l'$ g.e.d.

l と l' が isotopic ならば $l \sim l'$ だから

Corollary 1.1: (D. Rolfsen [4]) l と l' が isotopic で対応する component が concordant ならば $l \sim l'$ 。

Lemma 2. と Theorem 1 より 次の Corollary は明らか。

Corollary 1.2: $l = k_1 \cup \dots \cup k_n$ を link でその components が $k_1, \dots, k_n$ とする。 $l \sim 0_1 \circ \dots \circ 0_n$ ならば $l \sim k_1 \circ \dots \circ k_n$ 。ここで $k \circ k'$ は split して 11 するという意味である。

2つの knot k と k' の product は unique にきまるが、2つの link l と l' の product は l と l' の projection や band の結び方などにより unique にはきまらない。ここでは n -fusion なるものを定義する。 $l = k_1 \cup \dots \cup k_n$,

$l' = k'_1 \vee \dots \vee k'_n$ なる link とする。 l と l' の異なる component を 1 個ずつ band であすぶ。 l の $k_1, \dots, k_n$ と結ばれる l' の component を $k'_1, \dots, k'_m$ とするとき、できあがった link を $f_{i_1 \dots i_n}(l \circ l')$ と書き $l \circ l'$ より n -fusion でえられるという。

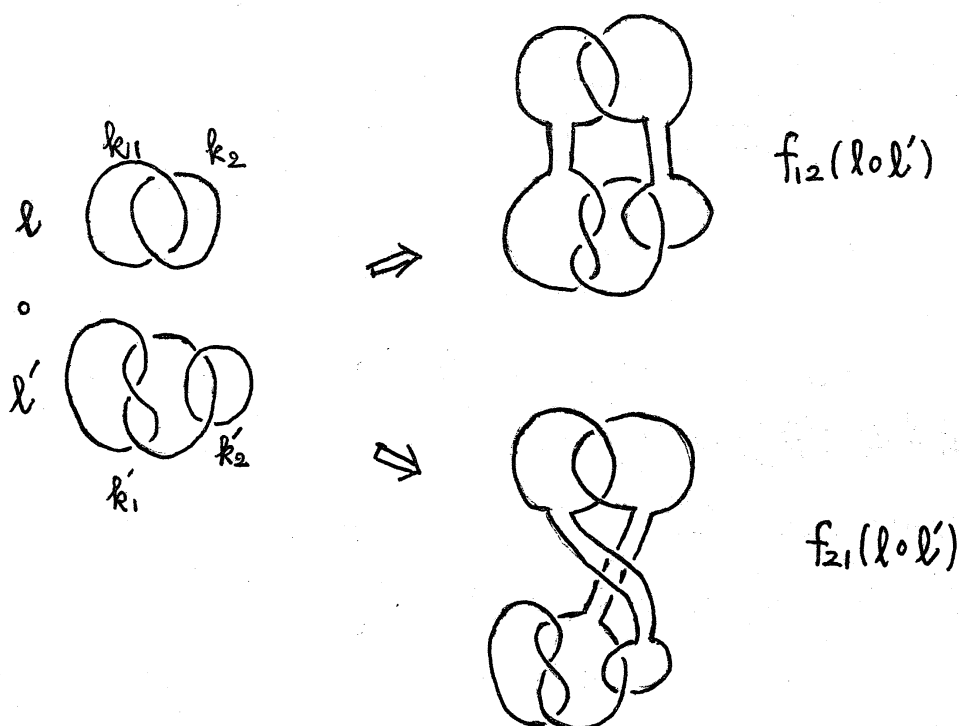


Fig 1

特に $k \circ k'$ の 1-fusion を $f(k \circ k')$ と書く。さらに n -fusion は $n!$ 個の異なる component の fusion があるがそれらを区別しないとき $f^n(l \circ l')$ と書く。

n -fusion は concordance の範囲で unique ではない。たとえば、同じ $f_{12}(l \circ l)$ でも ~ 0 になったり $\neq 0$ になったりする。(Fig 2).

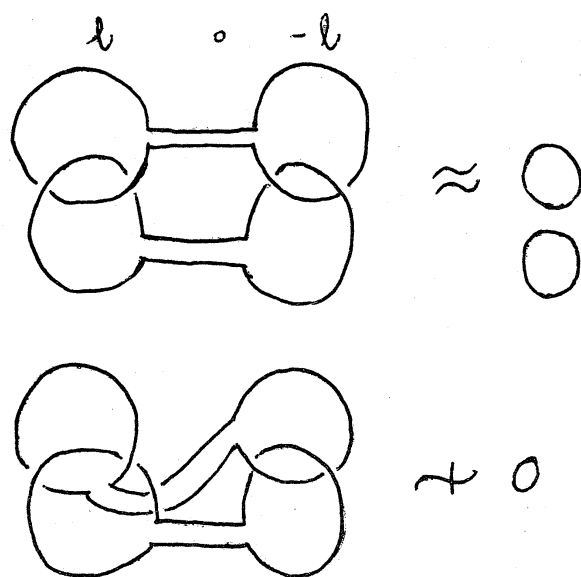


Fig 2

しかし $l \sim_w 0$ or $l' \sim_w 0$ であれば (weak) concordant の範囲である程度 unique にきまる。すなわち

Lemma 3: k と k' の any 1-fusion は product に concordant i.e. $f(k \circ k') \sim k \# k'$

proof: 2つの knot $f(k \circ k')$, $k \# k'$ をそれぞれ $R^3[0], R^3[2]$ におき $R^3[0,2]$ でこれを boundary とする genus 1 の locally flat な surface で $R^3[1]$ との intersection が $k \circ k'$ になるような F をつくる。さらに十分小さな正数 ε に対して $F \cap R^3[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \approx F_1 \cup F'_1$ ここで $F_1 \approx k \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $F'_1 \approx k' \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ と仮定してさしつかえない。 $F' = cl(F - F_1)$ とおく。 $R^3[1]$ での異なる2点 p, q をとり F'_1 と交わらないような2つの cone $C(p) = p * (F_1 \cap R^3[1-\varepsilon])$, $C(q) = q * (F_1 \cap R^3[1+\varepsilon])$

を作ることができる。そこで $\tilde{F} = F' \cup C(p) \cup C(q)$ は $f(k \# k')$ と $k \# k'$ を boundary とする locally knotted points p, q の annulus である。 p と q を $\text{Int } \tilde{F}$ の simple arc α で"むすぶ" と $(\partial N(\alpha, \tilde{F}), \partial N(\alpha, R^3[0, 2])) = (k \# (-k), \partial N(\alpha, R^3[0, 2]))$ であるから $\partial N(\alpha, \tilde{F})$ は $\partial N(\alpha, R^3[0, 2])$ で slice knot であるから $N(\alpha, R^3[0, 2])$ で locally flat な disk D がはれる。このとき $F^* = (\tilde{F} - N(\alpha, \tilde{F})) \cup D$ とおけば F^* は locally flat な annulus で $\partial F^* = f(k \# k') \cup (-(k \# k'))$ 。故に $f(k \# k') \sim k \# k'$ z.e.d. この Lemma を使い 次の 2 つの Theorem を証明する。

Theorem 2: $l = k_1 \cup \dots \cup k_n, l' = k'_1 \cup \dots \cup k'_n$ なる link とし、 $l \sim_w 0$ and $l' \sim_w 0$ とする。すると l と l' の任意の n -fusion は weak concordant to zero i.e. $f^n(l \circ l') \sim_w 0$ になる。さらに各 i に対し $k_i \sim (-k'_i)$ ならば $f_{1, 2, \dots, n}(l \circ l') \sim 0$ proof: 前半は明らか。後半も $f_{1, 2, \dots, n}(l \circ l') \sim_w 0$ で

Theorem 1 (Corollary 1.2) と Lemma 3 を使うと証明できる。

Theorem 3: $l \sim_w 0$ と仮定すると次のことが成立する。

$$f_{i_1, \dots, i_n}(l \circ l') \sim g_{i_1, \dots, i_n}(l \circ l')$$

proof: $l_f = f_{i_1, \dots, i_n}(l \circ l')$, $l_g = g_{i_1, \dots, i_n}(l \circ l')$ と書き $l_f \subset R^3[0]$, $l_g \subset R^3[2]$ におく。 $R^3[0, 2]$ で n 個の locally flat な disjoint な surface $F_1 \cup \dots \cup F_n$ で各 F_i は genus 1 で、 $\partial F_i \cap R^3[0] \neq \emptyset$, $\partial F_i \cap R^3[2] \neq \emptyset$, $\partial(F_1 \cup \dots \cup F_n) = l_f \cup (-l_g)$

$(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[1] = l \circ l'$ なるものを作る。さらに十分小さな正数 ε に対して $(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \approx (l \circ l') \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ としてよい。 $l \sim_0 0$ だから $l \times R^3[1-\varepsilon], l \times R^3[1+\varepsilon]$ は $R^3[1-\varepsilon, 1), R^3(1, 1+\varepsilon]$ でそれぞれ $O_1 \circ \dots \circ O_n, O'_1 \circ \dots \circ O'_n$ と disjoint な annuli $\tilde{U}F_i$ と $\tilde{U}F'_i$ がはれる。 $O_1 \circ \dots \circ O_n, O'_1 \circ \dots \circ O'_n$ にそれぞれ disjoint disks $D_1 \cup \dots \cup D_n, D'_1 \cup \dots \cup D'_n$ をはさみそこで $\tilde{F}_i = (F_i - K_i \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]) \cup \tilde{U}F_i \cup \tilde{U}F'_i \cup O_i \cup O'_i$, $\tilde{F} = \tilde{F}_1 \cup \dots \cup \tilde{F}_n$ とおけば $\partial \tilde{F} = l_f \cup (-l_g)$ 。さらに Lemma 3 より l_f と l_g の対応する knot は互いに concordant で Theorem 1 を使い $l_f \sim l_g$. g.e.d.

[2] で link に 1 つの equivalence relation ($\sim$ と書く) を導入したが、ここで $\sim$ は $\approx$ よりも強い relation であることを証す。すなわち、

Theorem 4: l が l' に concordant ならば l は l' に cobordic になる。すなわち $l \sim l'$ ならば $l \approx l'$ 。

proof: $l \sim l'$ より locally flat disjoint な annuli $F_1 \cup \dots \cup F_n$ が $R^3[0, 1]$ にあり $(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[0] = l$, $(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[1] = l'$ となっている。そこで isotopy で $F_1 \cup \dots \cup F_n$ をうごかして次のような状態におく。すなわち minimal points は $R^3[\frac{1}{8}]$ にあり $R^3[\frac{1}{4}]$ で l と trivial link との fusion の bands が同時に

おこる。 $R^3[\frac{3}{4}]$ で fission が同時におこり l' と trivial link に
わかれ, maximum points が $R^3[\frac{7}{8}]$ にある。このように変形
した annuli を改めて $F_1 \cup \dots \cup F_n$ と書くことにすると $\sim_c$ の
definition より $l \sim_c l'' = (F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[\frac{1}{2}]$, $l'' \sim_c l'$.

故に $l \sim_c l'$ g.e.d.

しかし逆は成立しない。たとえば

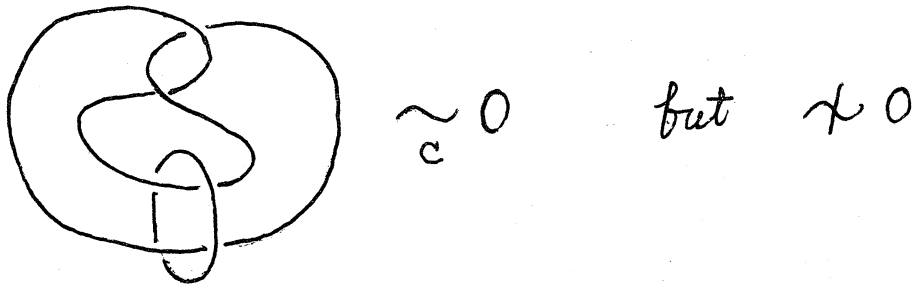


Fig 3

$R^3[0,1]$ の link l が $R^3[0,1]$ で "locally flat な genus 0 の
surface" をはるとき l を weak slice link と呼ぶ。 $\sim_0$
は $\sim_w 0$, $\sim_c 0$, weak slice link になるが, $\sim_w 0$, $\sim_c 0$,
weak slice link の間には強弱関係はないが次の Theorem
が成立する。

Theorem 5: l が "weak concordant to zero" のとき l が
cobordic to zero と weak slice link とが同値になる。

proof: $l \sim_w 0$ とすると Corollary 1.2 より $R^3[0,1]$ に disjoint
locally flat proper annuli $F_1 \cup \dots \cup F_n$ で $\partial(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[0]$

$= k_1 \cup \dots \cup k_n$ で $\partial(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[1] = (-k_1) \circ \dots \circ (-k_n)$ なるものが存在する。

$l \sim 0$ ならば $k_1 \# \dots \# k_n \sim 0$ になる。だから $R^3[1,2]$ で $k_1 \# \dots \# k_n$ を boundary にする locally flat な disk D を作る。そのとき $F = (F_1 \cup \dots \cup F_n) \cup D \cup (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$ は locally flat で genus 0 で $\partial F = l$ である, ここで B_i は k_i と k_{i+1} を product する band とする。故に l は weak slice link である。

逆に l を weak slice link とする。 $R^3[2]$ で n 個の異なる点 $p_1, \dots, p_n$ をとり $R^3[1,2]$ で $k_1 \circ \dots \circ k_n$ に disjoint に cones $p_1 * k_1, \dots, p_n * k_n$ を作る。 l は weak slice link だから $R^3[-1,0]$ で genus 0 の locally flat な surface F_0 を作る。そのとき $S = F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_n \cup p_1 * k_1 \cup \dots \cup p_n * k_n$ は 2-sphere で locally knotted points が $p_1, \dots, p_n$ である。そこで $p_1, \dots, p_n$ を通る simple arc α を S 上でとると $(\partial N(\alpha, S), \partial N(\alpha, R^4)) \approx (k_1 \# \dots \# k_n, \partial N(\alpha, R^4))$ で $k_1 \# \dots \# k_n \sim 0$ 。故に $l \sim 0$ g.e.d.

最後に concordance, weak concordance と link の signature ([3]) についてのべる。link l の signature, nullity を $\sigma(l), n(l)$ で表わすと

Lemma 5: l と l' が concordant ならば $\sigma(l) = \sigma(l')$

proof: l と l' がそれぞれ $R^3[0], R^3[1]$ にあるものとし,

$R^3[0,1]$ に concordant を与える annuli $F_1 \cup \dots \cup F_n$ がある。さらに $F_1 \cup \dots \cup F_n$ は Theorem 4 の証明の時のような状態にあると仮定してよい。そのとき [3] の Lemma 6.2, Lemma 7.1 を使うと $\sigma(l) = \sigma(l'')$, $\sigma(l'') = \sigma(l')$ なることがわかる。 *g.e.d.*

Lemma 5 を使い weak concordant のとき次の事柄が成立する。

Theorem 6: $l = k_1 \cup \dots \cup k_n$, $l' = k'_1 \cup \dots \cup k'_n$ なる link と $l \sim_w l'$ ならば, $\sigma(l) - \sum_{i=1}^n \sigma(k_i) = \sigma(l') - \sum_{i=1}^n \sigma(k'_i)$

proof): $l \sim_w l'$ だから $R^3[0,1]$ に disjoint な annuli $F_1 \cup \dots \cup F_n$ で $\partial(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[0] = l$, $\partial(F_1 \cup \dots \cup F_n) \cap R^3[1] = -l'$ なるものが存在する。 l の各 component k_i に l と split した knot $-k_i \# k'_i$ を product した link を l'' と書く。 $(-k_1 \# k'_1) \circ \dots \circ (-k_n \# k'_n)$ に $R^3[0, \varepsilon]$ で $F_1 \cup \dots \cup F_n$ と交わらないような cone をはる。ここで ε は十分小さい正数とする。すると Theorem 1 より $l' \sim l''$ 。 Lemma 5 と [3] の Lemma 7.3 より

$$\sigma(l') = \sigma(l'')$$

$$= \sigma(l) + \sum_{i=1}^n \sigma(-k_i \# k'_i)$$

$$= \sigma(l) - \sum_{i=1}^n \sigma(k_i) + \sum_{i=1}^n \sigma(k'_i) \quad \text{g.e.d.}$$

References

1. R. H. Fox and J. W. Milnor : Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J. vol. 3 (1966)
2. F. Hosokawa : A concept of cobordism between links, Ann. of Math. vol. 86 (1967)
3. K. Murasugi : On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 117 (1965)
4. D. Rolfsen : Isotopy of links in codimension two, to appear