

ランダム信頼区間について

筑波大・数学 高橋 邦彦 (Kunihiko Takahashi)

1. はじめに

通常, 離散型分布の場合に与えられた大きさをもつ非ランダム検定または信頼区間を求めることはできない. 実際の大きさが予め与えられた有意水準とは全く異なるようなことが時々起こる. 一方, ランダム方式は理論的には優れているが, 実際家にとっては容易には受け入れ難い. そこで, Akahira, Takahashi and Takeuchi ([ATT97]) は, 1 母数離散指数型分布族において最適なランダム検定からランダム信頼区間を構成する方法を提案した. 実際, T を整数値をとる統計量とするとき, $\theta = \theta_0$ に対する最適な検定の検定関数 ϕ は

$$\phi(T) = \begin{cases} 1 & (T < c_1(\theta_0), T > c_2(\theta_0)), \\ \gamma_1(\theta_0) & (T = c_1(\theta_0)), \\ \gamma_2(\theta_0) & (T = c_2(\theta_0)), \\ 0 & (c_1(\theta_0) < T < c_2(\theta_0)), \end{cases}$$

のランダム検定の形で表される. ここで $c_1(\theta_0), c_2(\theta_0)$ は整数値であり, $0 < \gamma_i(\theta_0) < 1$ ($i = 1, 2$) とする ([L86]). このとき T とは独立に $(0, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U を用いることによって, このランダム検定関数 ϕ は, $Y := T + U$ に基づく非ランダム検定関数

$$\phi^*(Y) = \begin{cases} 1 & Y < c_1(\theta_0) + \gamma_1(\theta_0), Y > c_2(\theta_0) - \gamma_2(\theta_0) + 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と同値になる. 本論では, 1 母数指数型分布族において検定関数 ϕ^* によって得られるランダム信頼区間を Edgeworth 展開を用いることで近似式を導出し, 実際の分布として, 2 項分布, ポアソン分布の場合, そして負の 2 項分布, 対数級数分布の場合に数値的に検討する ([ATT97], [T98]).

2. 1 母数離散指数型分布族の母数のランダム信頼区間

まず, $X_1, \dots, X_n, \dots$ を互いに独立にいずれも確率関数

$$f(x, \theta) = h(x) \exp\{\eta(\theta)x - C(\theta)\} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

をもつ1母数離散指数型分布に従うとする. ただし $\theta \in \mathbf{R}^1$ で $\eta(\theta)$, $C(\theta)$ は実数値関数, $h(x)$ は非負の実数値関数とする. また, この分布の平均を $\mu(\theta)$, 分散を $\sigma^2(\theta)$, r 次のキュムラントを $\kappa_r(\theta)$ とし, $T := \sum_{i=1}^n X_i$ とおく. また T を

$$Z_n = \frac{T - n\mu(\theta)}{\sqrt{n}\sigma(\theta)}$$

と規準化すると, Z_n の r 次のキュムラントは $n^{-(r/2)+1}\beta_r(\theta)$ になる. ただし

$$\beta_r(\theta) = \kappa_r(\theta) / \{\sigma(\theta)\}^r$$

とする. このとき仮説 $H: \theta = \theta_0$ の対立仮説 $K: \theta \neq \theta_0$ に対する検定問題を考えると, 水準 α の一様最強力不偏 (UMPU) ランダム検定関数は

$$\phi(T) = \begin{cases} 1 & (T < t_1, T > t_2), \\ u_i & (T = t_i) \quad (i = 1, 2), \\ 0 & (t_1 < T < t_2) \end{cases} \quad (1)$$

になる ([L86]). ただし t_1, t_2, u_1, u_2 は

$$E_{\theta_0}[\phi(T)] = \alpha, \quad E_{\theta_0}[T\phi(T)] = n\alpha\mu(\theta_0) \quad (2)$$

から定められる. 次に確率変数 U が区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従い, T とは独立であると仮定し, $Y := T + U$ とすれば (1) は Y に基づく非ランダム検定

$$\phi^*(Y) = \begin{cases} 1 & (Y < t_1 + u_1, Y > t_2 - u_2 + 1), \\ 0 & (t_1 + u_1 \leq Y \leq t_2 - u_2 + 1) \end{cases} \quad (3)$$

と同等になる. このとき補正を考慮に入れて $\underline{y}(\theta) := t_1 + u_1 - (1/2)$, $\bar{y}(\theta) := t_2 - u_2 + (1/2)$ とおいて, 方程式 $\underline{y}(\bar{\theta}) = Y$, $\bar{y}(\underline{\theta}) = Y$ を解いて, 信頼水準 $1 - \alpha$ の θ のランダム信頼区間 $[\underline{\theta}(Y), \bar{\theta}(Y)]$ を得る.

ここで, Edgeworth 展開を用いて $\underline{\theta}(Y)$, $\bar{\theta}(Y)$ の近似式を得る ([ATT97]).

定理. $\underline{y}(\theta)$, $\bar{y}(\theta)$ の3次までの近似は次のようになる.

$$\begin{aligned} \underline{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(-u_{\alpha/2} + \Delta_1), \\ \bar{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(u_{\alpha/2} + \Delta_2) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 + \frac{\beta_3^2}{72n}(4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\ &\quad - \frac{\beta_4}{24n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) - \frac{u_{\alpha/2}}{24n\sigma^2}\{12u_1(1 - u_1) - 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{u_2(1-u_2) - u_1(1-u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
\Delta_2 = & \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} u_{\alpha/2}^2 - \frac{\beta_3^2}{72n} (4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\
& + \frac{\beta_4}{24n} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) + \frac{u_{\alpha/2}}{24n\sigma^2} \{12u_2(1-u_2) - 1\} \\
& - \frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{u_2(1-u_2) - u_1(1-u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

とし, u_α は $N(0, 1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点とする.

この定理の証明は第3節で述べる. また, この定理より以下のことが直接導かれる.

系 1. ランダム信頼区間 $[\underline{\theta}(Y), \bar{\theta}(Y)]$ の3次までの近似は, 次の方程式を θ について解くことにより求められる.

$$\begin{aligned}
Y &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(-u_{\alpha/2} + \Delta_1), \\
Y &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(u_{\alpha/2} + \Delta_2)
\end{aligned}$$

ただし Δ_1, Δ_2 は定理で与えられたものと同じとする.

実際に $\underline{y}(\theta), \bar{y}(\theta)$ の3次近似は, θ を任意に固定し, $\underline{y}(\theta) := t_1 + u_1 - (1/2)$, $\bar{y}(\theta) := t_2 - u_2 + (1/2)$ として次の方程式から u_1, u_2 を求めることにより得られる.

$$\begin{aligned}
\underline{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(-u_{\alpha/2} + \Delta_1), \\
\bar{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(u_{\alpha/2} + \Delta_2)
\end{aligned}$$

ただし Δ_1, Δ_2 は定理で与えられたものと同じとする.

系 2. $\underline{y}(\theta), \bar{y}(\theta)$ の1次, 2次までの近似はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned}
\underline{y}(\theta) &= n\mu - \sqrt{n}\sigma u_{\alpha/2} + o(\sqrt{n}), \\
\bar{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma u_{\alpha/2} + o(\sqrt{n}).
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\underline{y}(\theta) &= n\mu - \sqrt{n}\sigma u_{\alpha/2} + \frac{1}{6}\sigma\beta_3 u_{\alpha/2}^2 + o(1), \\
\bar{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma u_{\alpha/2} + \frac{1}{6}\sigma\beta_3 u_{\alpha/2}^2 + o(1).
\end{aligned} \tag{6}$$

さらに $\underline{y}(\theta), \bar{y}(\theta)$ の3次の近似のバージョンを2つ挙げる.

(バージョン I)

$$\begin{aligned}\underline{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(-u_{\alpha/2} + \Delta_1^0), \\ \overline{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(u_{\alpha/2} + \Delta_2^0),\end{aligned}\tag{7}$$

ただし

$$\begin{aligned}\Delta_1^0 &= \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 + \frac{\beta_3^2}{72n}(4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\ &\quad - \frac{\beta_4}{24n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}), \\ \Delta_2^0 &= \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 - \frac{\beta_3^2}{72n}(4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\ &\quad + \frac{\beta_4}{24n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}).\end{aligned}$$

(バージョン II)

$$\begin{aligned}\underline{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(-u_{\alpha/2} + \hat{\Delta}_1), \\ \overline{y}(\theta) &= n\mu + \sqrt{n}\sigma(u_{\alpha/2} + \hat{\Delta}_2),\end{aligned}\tag{8}$$

ただし

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_1 &= \Delta_1^0 - \frac{1}{24n\sigma^2} \{12\hat{u}_1(1 - \hat{u}_1) - 1\} u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{\hat{u}_2(1 - \hat{u}_2) - \hat{u}_1(1 - \hat{u}_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \hat{\Delta}_2 &= \Delta_2^0 + \frac{1}{24n\sigma^2} \{12\hat{u}_2(1 - \hat{u}_2) - 1\} u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{\hat{u}_2(1 - \hat{u}_2) - \hat{u}_1(1 - \hat{u}_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

とする. ここで $\hat{u}_1$ と $\hat{u}_2$ は (6) において $\underline{y}(\theta) = t_1 + u_1 - (1/2)$, $\overline{y}(\theta) = t_2 - u_2 + (1/2)$ とした方程式の解 u_1, u_2 とする.

3. 定理の証明

まず, t を非負の整数, $0 \leq u < 1$, とし, $y := t + u$ の関数として

$$\begin{aligned}F_n(y) &:= P_\theta\{Y \leq t + u\} = P_\theta\{T_n \leq t - 1\} + uP_\theta\{T_n = t\} \\ &= (1 - u)P_\theta\{T_n \leq t - 1\} + uP_\theta\{T_n \leq t\}, \\ M_n(y) &:= \sum_{x=0}^{t-1} xP_\theta\{T_n = x\} + utP_\theta\{T_n = t\}\end{aligned}$$

を定義する. (2) の条件から

$$\begin{aligned} F_n(t_2 - u_2 + 1) - F_n(t_1 + u_1) &= 1 - \alpha, \\ M_n(t_2 - u_2 + 1) - M_n(t_1 + u_1) &= n\mu(\theta_0)(1 - \alpha) \end{aligned}$$

となることがわかる. 簡単のために $\mu(\theta_0)$, $\sigma(\theta_0)$, $\beta_r(\theta_0)$ をそれぞれ単に μ , σ , β_r と表す. ここで, n が大きくて $|t - n\mu|/\sqrt{n}\sigma$ が小さいとき,

$$\begin{aligned} F_n(y) &\doteq (1-u)P\{Z_n \leq z'\} + uP\{Z_n \leq z\} \\ &= (1-u) \left[\Phi(z') - \phi(z') \left\{ \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(z'^2 - 1) + \frac{\beta_4}{24n}(z'^3 - 3z') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta_3^2}{72n}(z'^5 - 10z'^3 + 15z') - \frac{1}{24n\sigma^2}z' \right\} \right] \\ &\quad + u \left[\Phi(z) - \phi(z) \left\{ \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(z^2 - 1) + \frac{\beta_4}{24n}(z^3 - 3z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta_3^2}{72n}(z^5 - 10z^3 + 15z) - \frac{1}{24n\sigma^2}z \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

になる. ただし

$$z' = (t - \frac{1}{2} - n\mu)/(\sqrt{n}\sigma), \quad z = (t + \frac{1}{2} - n\mu)/(\sqrt{n}\sigma)$$

とする. 一方

$$\begin{aligned} M_n(y) - n\mu F_n(y) \\ = (1-u) \sum_{x=0}^{t-1} (x - n\mu) P_\theta\{T_n = x\} + u \sum_{x=0}^t (x - n\mu) P_\theta\{T_n = x\} \end{aligned} \quad (10)$$

でとなるから, 十分大きな n に対して

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^t (x - n\mu) P_\theta\{T_n = x\} \\ = \sum_{x=0}^t \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \left[\phi(z_x) + \phi(z_x) \left\{ \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(z_x^3 - 3z_x) + \frac{\beta_4}{24n}(z_x^4 - 6z_x^2 + 3) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta_3^2}{72n}(z_x^6 - 15z_x^4 + 45z_x^2 - 15) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

が成り立つ. ただし $z_x = (x - n\mu)/(\sqrt{n}\sigma)$ とする. ここで, $z = \{t + (1/2) - n\mu\}/(\sqrt{n}\sigma)$ として積分近似

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{x=0}^t z_x \phi(z_x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^z x\phi(x)dx - \frac{1}{24n\sigma^4} \int_{-\infty}^z (x\phi(x))'' dx + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -\phi(z) + \frac{1}{24n\sigma^4} (z^2 - 1)\phi(z) + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

を得る. (11) の右辺に同様の積分近似を施せば, (11) は

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^t (x - n\mu) P_\theta\{T_n = x\} \\
&= \sqrt{n}\sigma \left[\int_{-\infty}^z x\phi(x) \left\{ 1 + \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(x^3 - 3x) + \frac{\beta_4}{24n}(x^4 - 6x^2 + 3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_3^2}{72n}(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) \right\} dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24n\sigma^4}(x^2 - 1)\phi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]
\end{aligned} \tag{12}$$

になる. 次に $H_j(x)$ を j 次のエルミート多項式, すなわち $H_j(x) = \{(-d/dx)^j \phi(x)\}/\phi(x)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) とすると, 各 $j = 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned}
\int x\phi(x)H_j(x)dx &= -x\phi(x)H_{j-1}(x) + \int \phi(x)H_{j-1}(x)dx \\
&= -x\phi(x)H_{j-1}(x) - \phi(x)H_{j-2}(x)
\end{aligned}$$

という関係が得られることより, (12) から

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=0}^t (x - n\mu) P_\theta\{T_n = x\} \\
&= \sqrt{n}\sigma \left[-\phi(z) \left\{ 1 + \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}z^3 + \frac{\beta_4}{24n}(z^4 - 2z^2 - 1) + \frac{\beta_3^2}{72n}(z^6 - 9z^4 + 9z^2 + 3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{24n\sigma^4}(z^2 - 1) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned} \tag{13}$$

を得る. 今, 滑らかな関数 G と小さい実数 h を与えると

$$\begin{aligned}
&(1 - u)G(t) + uG(t + h) \\
&= G(t + uh) + \frac{1}{2}u(1 - u)h^2G''(t + uh) + o(h^2)
\end{aligned}$$

となるから, (9), (10), (13) より

$$\begin{aligned}
&F_n(t + u) \\
&= \Phi(z_0) - \phi(z_0) \left\{ \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(z_0^2 - 1) + \frac{\beta_4}{24n}(z_0^3 - 3z_0) \right.
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_3^2}{72n}(z_0^5 - 10z_0^3 + 15z_0) + \frac{1}{24n\sigma^2}(12u(1-u) - 1)z_0 \Big\} \\
& + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
M_n(t+u) - n\mu F_n(t+u) & \tag{15} \\
& = -\sqrt{n}\sigma\phi(z_0) \left\{ 1 + \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}z_0^3 + \frac{\beta_4}{24n}(z_0^4 - 2z_0^2 - 1) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta_3^2}{72n}(z_0^6 - 9z_0^4 + 9z_0^2 + 3) + \frac{1}{24n\sigma^4}(12u(1-u) - 1)(z_0^2 - 1) \right\} \\
& + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

になる。ただし

$$z_0 = \{t + u - (1/2) - n\mu\}/(\sqrt{n}\sigma)$$

とする。また (2) の条件は,

$$F_n(t_2 + (1 - u_2)) - F_n(t_1 + u_1) = 1 - \alpha, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
M_n(t_2 + (1 - u_2)) - n\mu F_n(t_2 + (1 - u_2)) & \tag{17} \\
- \{M_n(t_1 + u_1) - n\mu F_n(t_1 + u_1)\} = 0
\end{aligned}$$

になる。さらに

$$\begin{aligned}
z_1^* &:= (t_1 + u_1 - \frac{1}{2} - n\mu)/(\sqrt{n}\sigma), \\
z_2^* &:= (t_2 - u_2 + \frac{1}{2} - n\mu)/(\sqrt{n}\sigma) = \{t_2 + (1 - u_2) - \frac{1}{2} - n\mu\}/(\sqrt{n}\sigma)
\end{aligned}$$

とし, $\Delta_1 := z_1^* + u_{\alpha/2}$, $\Delta_2 := z_2^* - u_{\alpha/2}$ とおくと, $\Delta_1 = O(1/\sqrt{n})$, $\Delta_2 = O(1/\sqrt{n})$ になる。ただし u_{α} は $N(0, 1)$ の上側 100%点とする。よって

$$\begin{aligned}
\Phi(z_1^*) &= \Phi(-u_{\alpha/2}) + \phi(-u_{\alpha/2})\Delta_1 + \frac{1}{2}\phi'(-u_{\alpha/2})\Delta_1^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\alpha}{2} + \phi(u_{\alpha/2})\Delta_1 + \frac{1}{2}u_{\alpha/2}\phi(u_{\alpha/2})\Delta_1^2 + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
\Phi(z_2^*) &= 1 - \frac{\alpha}{2} + \phi(u_{\alpha/2})\Delta_2 - \frac{1}{2}u_{\alpha/2}\phi(u_{\alpha/2})\Delta_2^2 + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
(z_1^{*2} - 1)\phi(z_1^*) &= (u_{\alpha/2}^2 - 1)\phi(u_{\alpha/2}) + (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2})\phi(u_{\alpha/2})\Delta_1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \\
(z_2^{*2} - 1)\phi(z_2^*) &= (u_{\alpha/2}^2 - 1)\phi(u_{\alpha/2}) - (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2})\phi(u_{\alpha/2})\Delta_2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

となり, (14) から

$$\begin{aligned}
& F_n(t_2 + (1 - u_2)) - F_n(t_1 + u_1) \\
&= \Phi(z_2^*) - \Phi(z_1^*) - \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} \{ (z_2^{*2} - 1)\phi(z_2^*) - (z_1^{*2} - 1)\phi(z_1^*) \} \\
&\quad - \phi(u_{\alpha/2}) \left\{ \frac{\beta_4}{24n} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) + \frac{\beta_3^2}{72n} (u_{\alpha/2}^5 - 10u_{\alpha/2}^3 + 15u_{\alpha/2}) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{24n\sigma^2} (12u_2(1 - u_2) - 1)u_{\alpha/2} \right\} \\
&\quad + \phi(u_{\alpha/2}) \left\{ \frac{\beta_4}{24n} (-u_{\alpha/2}^3 + 3u_{\alpha/2}) + \frac{\beta_3^2}{72n} (-u_{\alpha/2}^5 + 10u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{24n\sigma^2} (12u_1(1 - u_1) - 1)u_{\alpha/2} \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \alpha + (\Delta_2 - \Delta_1)\phi(u_{\alpha/2}) - \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)u_{\alpha/2}\phi(u_{\alpha/2}) \\
&\quad + \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(\Delta_1 + \Delta_2)(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2})\phi(u_{\alpha/2}) \\
&\quad - \phi(u_{\alpha/2}) \left\{ \frac{\beta_4}{12n} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) + \frac{\beta_3^2}{36n} (u_{\alpha/2}^5 - 10u_{\alpha/2}^3 + 15u_{\alpha/2}) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{12n\sigma^2} (6u_1(1 - u_1) + 6u_2(1 - u_2) - 1)u_{\alpha/2} \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

が得られる. このとき (16) から

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_2 - \Delta_1 - \frac{1}{2}u_{\alpha/2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2})(\Delta_1 + \Delta_2) \quad (18) \\
&\quad - \frac{\beta_4}{12n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) - \frac{\beta_3^2}{36n}(u_{\alpha/2}^5 - 10u_{\alpha/2}^3 + 15u_{\alpha/2}) \\
&\quad - \frac{u_{\alpha/2}}{12n\sigma^2} \{ 6u_1(1 - u_1) + 6u_2(1 - u_2) - 1 \} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となる. ゆえに

$$\begin{aligned}
\Delta_2 - \Delta_1 &= \frac{1}{2}u_{\alpha/2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) \quad (19) \\
&\quad - \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2})(\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{\beta_4}{12n}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) \\
&\quad + \frac{\beta_3^2}{36n}(u_{\alpha/2}^5 - 10u_{\alpha/2}^3 + 15u_{\alpha/2}) \\
&\quad + \frac{1}{12n\sigma^2} \{ 6u_1(1 - u_1) + 6u_2(1 - u_2) - 1 \} u_{\alpha/2} \\
&\quad + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となる. また, (15), (17) から

$$\begin{aligned}
 0 &= M_n(t_2 + (1 - u_2)) - n\mu F_n(t_2 + (1 - u_2)) \\
 &\quad - \{M_n(t_1 + u_1) - n\mu F_n(t_1 + u_1)\} \\
 &= -\sqrt{n}\sigma \left[\phi(z_2^*) - \phi(z_1^*) + \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} \{z_2^{*3}\phi(z_2^*) - z_1^{*3}\phi(z_1^*)\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2n\sigma^2} \phi(u_{\alpha/2})(u_{\alpha/2}^2 - 1) \{u_2(1 - u_2) - u_1(1 - u_1)\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
 \end{aligned} \tag{20}$$

が得られる. ここで

$$\begin{aligned}
 z_1^{*3}\phi(z_1^*) &= -u_{\alpha/2}^3\phi(u_{\alpha/2}) - (u_{\alpha/2}^4 - 3u_{\alpha/2}^2)\phi(u_{\alpha/2})\Delta_1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \\
 z_2^{*3}\phi(z_2^*) &= u_{\alpha/2}^3\phi(u_{\alpha/2}) - (u_{\alpha/2}^4 - 3u_{\alpha/2}^2)\phi(u_{\alpha/2})\Delta_2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
 &z_2^{*3}\phi(z_2^*) - z_1^{*3}\phi(z_1^*) \\
 &= 2u_{\alpha/2}^3\phi(u_{\alpha/2}) - (u_{\alpha/2}^4 - 3u_{\alpha/2}^2)\phi(u_{\alpha/2})(\Delta_2 - \Delta_1) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
 \end{aligned} \tag{21}$$

となる. また

$$\begin{aligned}
 \phi(z_2^*) - \phi(z_1^*) &= -(\Delta_1 + \Delta_2)u_{\alpha/2}\phi(u_{\alpha/2}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\Delta_2^2 - \Delta_1^2)(u_{\alpha/2}^2 - 1)\phi(u_{\alpha/2}) + o\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

となるから, (20) と (21) から

$$\begin{aligned}
 0 &= -u_{\alpha/2}(\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{1}{2}(u_{\alpha/2}^2 - 1)(\Delta_2^2 - \Delta_1^2) \\
 &\quad + \frac{\beta_3}{3\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^3 - \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(u_{\alpha/2}^4 - 3u_{\alpha/2}^2)(\Delta_2 - \Delta_1) \\
 &\quad + \frac{1}{2n\sigma^2}(u_{\alpha/2}^2 - 1) \{u_2(1 - u_2) - u_1(1 - u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
 &\Delta_1 + \Delta_2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(u_{\alpha/2} - \frac{1}{u_{\alpha/2}} \right) (\Delta_2^2 - \Delta_1^2) \\
 &\quad + \frac{\beta_3}{3\sqrt{n}}u_{\alpha/2}^2 - \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}}(u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2})(\Delta_2 - \Delta_1)
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$+ \frac{1}{2n\sigma^2} \left(u_{\alpha/2} - \frac{1}{u_{\alpha/2}} \right) \{u_2(1-u_2) - u_1(1-u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる. ゆえに (19) と (22) から

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} u_{\alpha/2}^2 - \frac{u_{\alpha/2}}{2} \Delta_1^2 - \frac{1}{4u_{\alpha/2}} (\Delta_2^2 - \Delta_1^2) \\ &\quad + \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) \Delta_1 - \frac{\beta_4}{24n} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) \\ &\quad - \frac{\beta_3^2}{72n} (u_{\alpha/2}^5 - 10u_{\alpha/2}^3 + 15u_{\alpha/2}) - \frac{1}{24n\sigma^2} \{12u_1(1-u_1) - 1\} u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{u_2(1-u_2) - u_1(1-u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \Delta_2 &= \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} u_{\alpha/2}^2 + \frac{u_{\alpha/2}}{2} \Delta_2^2 - \frac{1}{4u_{\alpha/2}} (\Delta_2^2 - \Delta_1^2) \\ &\quad - \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) \Delta_2 + \frac{\beta_4}{24n} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) \\ &\quad + \frac{\beta_3^2}{72n} (u_{\alpha/2}^5 - 10u_{\alpha/2}^3 + 15u_{\alpha/2}) + \frac{1}{24n\sigma^2} \{12u_2(1-u_2) - 1\} u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{u_2(1-u_2) - u_1(1-u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

が得られる. これらを整理して

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} u_{\alpha/2}^2 + \frac{\beta_3^2}{72n} (4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\ &\quad - \frac{\beta_4}{24n} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) - \frac{1}{24n\sigma^2} \{12u_1(1-u_1) - 1\} u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{u_2(1-u_2) - u_1(1-u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \Delta_2 &= \frac{\beta_3}{6\sqrt{n}} u_{\alpha/2}^2 - \frac{\beta_3^2}{72n} (4u_{\alpha/2}^3 - 15u_{\alpha/2}) \\ &\quad + \frac{\beta_4}{24n} (u_{\alpha/2}^3 - 3u_{\alpha/2}) + \frac{1}{24n\sigma^2} \{12u_2(1-u_2) - 1\} u_{\alpha/2} \\ &\quad - \frac{1}{4n\sigma^2 u_{\alpha/2}} \{u_2(1-u_2) - u_1(1-u_1)\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

を得る. $\square$

4. ランダム信頼区間とその数値的検討

ここで, ランダム信頼区間とその近似についていくつかの分布での例を挙げ, 数値的検討を行う.

4.1. 2項分布, Poisson 分布

$X_1, \dots, X_n, \dots$ が互いに独立にいずれも確率関数

$$f_1(x, p) = \binom{k}{x} p^x q^{k-x} \quad (x = 0, 1, \dots, k; 0 < p < 1, q = 1 - p)$$

の2項分布 $B(k, p)$ に従うとする. このとき $T := \sum_{i=1}^n X_i$ の分布は $B(nk, p)$ になり, これは $B(1, p)$ に従う確率変数の和の分布として考えられるので, $k = 1$ とすると

$$\begin{aligned} \kappa_1(p) &= \mu(p) = p, & \kappa_2(p) &= \sigma^2(p) = pq, \\ \kappa_3(p) &= pq(q - p), & \kappa_4(p) &= pq(1 - 6pq), \end{aligned}$$

を用いて, $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$, $\alpha = 0.05$ の場合の (2) で求めた $t_1 + u_1 - (1/2)$, $t_2 - u_2 + (1/2)$ の値と各近似 (4), (5), (6), (7), (8) の誤差を数値的に求めた (表 1 ~ 6 参照 (ここでは $p = 0.2, 0.3, 0.5$ の場合を掲載)).

系 1 より, 信頼水準 $1 - \alpha$ での p のランダム信頼区間 $[p, \bar{p}]$ の近似は方程式

$$\begin{aligned} Y &= np + \sqrt{np(1-p)}(-u_{\alpha/2} + \Delta_1), \\ Y &= np + \sqrt{np(1-p)}(u_{\alpha/2} + \Delta_2) \end{aligned} \quad (23)$$

を p について解くことによって得られる. ここでは, Δ_1, Δ_2 の代わりに Δ_1^0, Δ_2^0 を用いることによって, 更に簡単な計算によってランダム信頼区間を求めることができ, $n = 20$ の場合に受容域 $[t_1 + u_1 - (1/2), t_2 - u_2 + (1/2)]$ と比較を行った (図 1 参照).

次に, $X_1, \dots, X_n, \dots$ が互いに独立にいずれも確率関数

$$f_2(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0)$$

の Poisson 分布 $Po(\lambda)$ に従うとする. $T := \sum_{i=1}^n X_i$ の分布は $Po(n\lambda)$ になり, $Po(\lambda)$ の 4 次までのキュムラントは

$$\kappa_1(\lambda) = \kappa_2(\lambda) = \kappa_3(\lambda) = \kappa_4(\lambda) = \lambda$$

となることより, これらを用いて $\alpha = 0.05$ の場合について, $\underline{y}(\theta), \bar{y}(\theta)$ の真値と各近似の精度を数値的に比較した (表 7, 8 参照). また, 系 1 よりランダム信頼区間 $[\lambda, \bar{\lambda}]$ は, 方程式

$$\begin{aligned} Y &= \lambda + \sqrt{\lambda}(-u_{\alpha/2} + \Delta_1), \\ Y &= \lambda + \sqrt{\lambda}(u_{\alpha/2} + \Delta_2) \end{aligned} \quad (24)$$

を λ について解くことによって得られる. $n = 20$ の場合に Δ_1, Δ_2 の代わりに Δ_1^0, Δ_2^0 を用いたランダム信頼区間と受容域をグラフで示し比較した (図 2 参照).

表 1. 2 項分布 $B(n, p)$ の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p = 0.2, \alpha = 0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—
15	0.3205	—	0.0273	-0.0100	0.0278	0.0035
20	0.7999	-0.3060	0.0782	0.0054	0.0786	-0.0047
25	1.5040	-0.4239	-0.0398	-0.0105	-0.0495	0.0072
30	2.0194	-0.3135	0.0707	0.0012	0.0711	0.0057
35	2.7066	-0.3447	0.0394	0.0018	0.0398	-0.0060
40	3.4391	-0.3974	-0.0133	-0.0088	-0.0130	-0.0105
45	4.0719	-0.3310	0.0531	-0.0006	0.0534	0.0036
50	4.7940	-0.3376	0.0465	0.0017	0.0468	-0.0030
60	6.2934	-0.3661	0.0180	-0.0028	0.0183	0.0009
70	7.7867	-0.3460	0.0382	0.0011	0.0384	-0.0025
80	9.3670	-0.3792	0.0050	-0.0032	0.0052	-0.0019
90	10.9061	-0.3436	0.0405	0.0003	0.0404	-0.0006
100	12.5501	-0.3899	-0.0058	-0.0011	-0.0056	-0.0006

表 2. 2 項分布 $B(n, p)$ の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p = 0.2, \alpha = 0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (5)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	1.4500	-0.4660	-0.0819	-0.0503	-0.0840	—
5	3.3516	-0.5986	-0.2144	-0.1104	-0.2153	—
10	5.0395	-0.5603	-0.1762	-0.0517	-0.1768	—
15	6.4285	-0.3921	-0.0080	-0.0082	-0.0085	-0.0104
20	7.9946	-0.4885	-0.1044	-0.0165	-0.1048	-0.0203
25	9.3304	-0.4105	-0.0263	-0.0056	-0.0267	-0.0028
30	10.7246	-0.4305	-0.0464	-0.0022	-0.0468	-0.0130
35	12.0932	-0.4551	-0.0709	-0.0094	-0.0713	-0.0059
40	13.3582	-0.3998	-0.0157	-0.0033	-0.0160	-0.0001
45	14.6699	-0.4108	-0.0266	-0.0012	-0.0269	-0.0072
50	15.9878	-0.4442	-0.0601	-0.0046	-0.0603	-0.0053
60	18.4532	-0.3805	0.0037	-0.0031	0.0034	-0.0053
70	20.9933	-0.4340	-0.0499	-0.0031	-0.0501	-0.0033
80	23.4012	-0.3890	-0.0049	-0.0021	-0.0051	-0.0018
90	25.8608	-0.4233	-0.0391	-0.0010	-0.0394	-0.0035
100	28.2475	-0.4077	-0.0235	-0.0022	-0.0237	-0.0002

表 3. 2 項分布 $B(n, p)$ の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p = 0.3, \alpha = 0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	—	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—
10	0.4578	-0.2981	-0.0420	-0.0324	-0.0285	-0.0387
15	1.2334	-0.2120	0.0441	-0.0068	0.0551	0.0040
20	2.1928	-0.2095	0.0466	-0.0029	0.0561	0.0048
25	3.2299	-0.2207	0.0354	-0.0042	0.0439	0.0022
30	4.3222	-0.2417	0.0144	-0.0068	0.0222	-0.0028
35	5.4632	-0.2768	-0.0207	-0.0081	-0.0135	-0.0120
40	6.5798	-0.2603	-0.0042	-0.0015	0.0025	-0.0007
45	7.7084	-0.2335	0.0226	0.0007	0.0289	-0.0021
50	8.8690	-0.2200	0.0361	0.0020	0.0421	0.0002
60	11.2817	-0.2389	0.0172	-0.0026	0.0227	-0.0002
70	13.7220	-0.2366	0.0195	0.0005	0.0246	-0.0014
80	16.1995	-0.2329	0.0232	-0.0009	0.0279	0.0010
90	18.7186	-0.2394	0.0167	0.0003	0.0212	-0.0012
100	21.2584	-0.2401	0.0160	-0.0013	0.0203	0.0002

表 4. 2 項分布 $B(n, p)$ の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p = 0.3, \alpha = 0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	1.4500	-0.2518	0.0043	-0.0365	-0.0382	—
5	3.9458	-0.4374	-0.1813	-0.0647	-0.2003	—
10	6.1639	-0.3236	-0.0675	0.0000	-0.0810	0.0110
15	8.2807	-0.3021	-0.0460	-0.0051	-0.0570	0.0031
20	10.3077	-0.2910	-0.0349	-0.0050	-0.0444	0.0008
25	12.2816	-0.2908	-0.0347	-0.0035	-0.0432	0.0015
30	14.2139	-0.2944	-0.0383	-0.0014	-0.0461	0.0027
35	16.1087	-0.2951	-0.0390	0.0006	-0.0462	0.0033
40	17.9790	-0.2985	-0.0424	-0.0007	-0.0491	-0.0019
45	19.8158	-0.2907	-0.0346	-0.0008	-0.0409	-0.0041
50	21.6133	-0.2623	-0.0062	-0.0023	-0.0122	-0.0028
60	25.2386	-0.2814	-0.0253	-0.0011	-0.0308	0.0011
70	28.7968	-0.2822	-0.0261	-0.0004	-0.0312	-0.0025
80	32.3057	-0.2723	-0.0162	-0.0015	-0.0209	0.0000
90	35.7999	-0.2791	-0.0230	-0.0001	-0.0275	-0.0018
100	39.2561	-0.2744	-0.0183	-0.0009	-0.0226	0.0004

表 5. 2 項分布 $B(n, p)$ の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p = 0.5, \alpha = 0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	—	—	—	—	—	—
5	0.3000	0.0087	0.0087	-0.0533	0.0394	-0.0231
10	1.8244	0.0766	0.0766	0.0117	0.0984	0.0011
15	3.6782	0.0264	0.0264	0.0092	0.0441	0.0039
20	5.6165	0.0009	0.0009	0.0058	0.0163	0.0074
25	7.6042	-0.0041	-0.0041	0.0044	0.0096	0.0070
30	9.6291	0.0033	0.0033	0.0043	0.0159	0.0046
35	11.6861	0.0163	0.0163	0.0044	0.0279	0.0020
40	13.7730	0.0291	0.0291	0.0037	0.0399	0.0004
45	15.8891	0.0370	0.0370	0.0020	0.0472	0.0001
50	18.0351	0.0354	0.0354	-0.0008	0.0451	0.0003
60	22.4229	-0.0138	-0.0138	-0.0023	-0.0049	-0.0047
70	26.7791	0.0218	0.0218	0.0022	0.0300	0.0003
80	31.2185	0.0163	0.0163	-0.0023	0.0240	-0.0005
90	35.6933	0.0098	0.0098	0.0018	0.0170	0.0008
100	40.1824	0.0178	0.0178	-0.0016	0.0247	-0.0001

表 6. 2 項分布 $B(n, p)$ の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p = 0.5, \alpha = 0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	1.4500	0.0300	0.0300	-0.0406	-0.0387	—
5	4.7000	-0.0087	-0.0087	0.0533	-0.0394	0.0231
10	8.1756	-0.0766	-0.0766	-0.0117	-0.0984	-0.0011
15	11.3218	-0.0264	-0.0264	-0.0092	-0.0441	-0.0039
20	14.3835	-0.0009	-0.0009	-0.0058	-0.0163	-0.0074
25	17.3958	0.0041	0.0041	-0.0044	-0.0096	-0.0070
30	20.2709	-0.0033	-0.0033	-0.0043	-0.0159	-0.0046
35	23.3139	-0.0163	-0.0163	-0.0044	-0.0279	-0.0020
40	26.2270	-0.0291	-0.0291	-0.0037	-0.0399	-0.0004
45	29.1109	-0.0370	-0.0370	-0.0020	-0.0472	-0.0001
50	31.9649	-0.0354	-0.0354	0.0008	-0.0451	-0.0003
60	37.5771	0.0138	0.0138	0.0023	0.0049	0.0047
70	43.2209	-0.0218	-0.0218	-0.0022	-0.0300	-0.0003
80	48.7815	-0.0161	-0.0161	0.0023	-0.0240	0.0005
90	54.3067	-0.0098	-0.0098	-0.0018	-0.0170	-0.0008
100	59.8176	-0.0178	-0.0178	0.0016	-0.0247	0.0001

表 7. Poisson 分布 $Po(\lambda)$ の場合の $y(\lambda)$ の真値と近似誤差 ($\alpha=0.05$)

λ	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—
3	0.1232	—	0.1223	0.0037	0.0884	0.0238
4	0.6662	-0.5861	0.0541	0.0008	0.0247	-0.0112
5	1.1755	-0.5581	0.0821	-0.0054	0.0559	0.0081
6	1.7708	-0.5717	0.0685	0.0062	0.0444	-0.0030
7	2.4522	-0.6378	0.0025	-0.0211	-0.0197	-0.0134
8	3.0191	-0.5627	0.0775	0.0018	0.0568	0.0034
9	3.7151	-0.5950	0.0453	0.0033	0.0257	-0.0027
10	4.4340	-0.6319	0.0083	-0.0140	-0.0103	-0.0081
11	5.0763	-0.5767	0.0635	-0.0005	0.0458	0.0023
12	5.8001	-0.5896	0.0506	0.0033	0.0337	-0.0012
13	6.5644	-0.6311	0.0091	-0.0044	-0.0072	-0.0064
14	7.2689	-0.6024	0.0378	-0.0057	0.0221	-0.0001
15	7.9934	-0.5843	0.0560	0.0011	0.0408	0.0009
16	8.7618	-0.6016	0.0386	0.0024	0.0239	-0.0011
17	9.5530	-0.6341	0.0061	-0.0039	-0.0081	-0.0052
18	10.2943	-0.6097	0.0305	-0.0050	0.0167	-0.0006
19	11.0480	-0.5913	0.0490	-0.0001	0.0355	0.0008
20	11.8336	-0.5988	0.0414	0.0020	0.0283	-0.0006
21	12.6389	-0.6206	0.0197	-0.0009	0.0069	-0.0031
22	13.4408	-0.6338	0.0064	-0.0062	-0.0061	-0.0038
23	14.2042	-0.6038	0.0364	-0.0025	0.0242	0.0004
24	14.9945	-0.5963	0.0439	0.0006	0.0319	0.0004
25	15.8059	-0.6057	0.0345	0.0016	0.0228	-0.0006
26	16.6298	-0.6237	0.0166	-0.0010	0.0050	-0.0027
27	17.4515	-0.6358	0.0045	-0.0051	-0.0068	-0.0034
28	18.2387	-0.6098	0.0304	-0.0025	0.0193	0.0001
29	19.0495	-0.6006	0.0396	0.0000	0.0287	0.0004
30	19.8695	-0.6046	0.0356	0.0012	0.0249	-0.0003
31	20.7050	-0.6176	0.0226	0.0004	0.0121	-0.0013
32	21.5485	-0.6357	0.0045	-0.0023	-0.0059	-0.0029
33	22.3655	-0.6246	0.0156	-0.0035	0.0054	-0.0013
34	23.1801	-0.6085	0.0317	-0.0015	0.0216	0.0003
35	24.0087	-0.6040	0.0363	0.0002	0.0263	0.0002
40	28.2172	-0.6131	0.0272	-0.0016	0.0179	0.0001

表 8. Poisson 分布 $Po(\lambda)$ の場合の $\bar{y}(\lambda)$ の真値と近似誤差 ($\alpha=0.05$)

λ	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	3.9942	-1.0342	-0.3940	-0.2464	-0.3352	—
2	5.5735	-0.8017	-0.1615	-0.1287	-0.1199	—
3	7.1729	-0.7781	-0.1379	-0.0221	-0.1042	-0.0147
4	8.6403	-0.7204	-0.0801	-0.0465	-0.0508	-0.0565
5	10.1244	-0.7418	-0.1016	-0.0090	-0.0753	-0.0062
6	11.4788	-0.6779	-0.0377	-0.0222	-0.0137	-0.0016
7	12.8924	-0.7068	-0.0666	0.0050	-0.0444	-0.0024
8	14.2559	-0.7123	-0.0721	-0.0115	-0.0513	-0.0041
9	15.5476	-0.6677	-0.0275	-0.0203	-0.0079	-0.0213
10	16.8953	-0.6974	-0.0571	0.0032	-0.0385	-0.0018
11	18.2041	-0.7036	-0.0634	-0.0067	-0.0457	-0.0023
12	19.4546	-0.6651	-0.0249	-0.0107	-0.0079	-0.0070
13	20.7479	-0.6812	-0.0409	-0.0014	-0.0246	-0.0061
14	22.0312	-0.6977	-0.0575	-0.0007	-0.0418	-0.0015
15	23.2786	-0.6877	-0.0475	-0.0064	-0.0323	-0.0020
16	24.4918	-0.6520	-0.0117	-0.0079	0.0030	-0.0066
17	25.7571	-0.6760	-0.0357	-0.0004	-0.0215	-0.0039
18	27.0055	-0.6901	-0.0499	0.0000	-0.0360	-0.0011
19	28.2288	-0.6855	-0.0453	-0.0043	-0.0318	-0.0012
20	29.4269	-0.6617	-0.0215	-0.0063	-0.0083	-0.0034
21	30.6463	-0.6646	-0.0244	-0.0033	-0.0116	-0.0058
22	31.8709	-0.6779	-0.0376	0.0016	-0.0251	-0.0008
23	33.0851	-0.6945	-0.0452	-0.0012	-0.0330	-0.0007
24	34.2783	-0.6765	-0.0363	-0.0040	-0.0243	-0.0012
25	35.4542	-0.6544	-0.0142	-0.0051	-0.0024	-0.0034
26	36.6565	-0.6626	-0.0224	-0.0023	-0.0109	-0.0043
27	37.8577	-0.6734	-0.0332	0.0014	-0.0219	-0.0006
28	39.0522	-0.6811	-0.0408	-0.0006	-0.0297	-0.0006
29	40.2307	-0.6760	-0.0358	-0.0028	-0.0248	-0.0007
30	41.3957	-0.6606	-0.0203	-0.0040	-0.0096	-0.0019
31	42.5651	-0.6525	-0.0123	-0.0038	-0.0017	-0.0047
32	43.7528	-0.6656	-0.0254	0.0001	-0.0150	-0.0018
33	44.9388	-0.6747	-0.0344	0.0007	-0.0242	-0.0005
34	46.1055	-0.6771	-0.0368	-0.0010	-0.0267	-0.0004
35	47.2657	-0.6704	-0.0302	-0.0026	-0.0202	-0.0007
40	53.0702	-0.6743	-0.0341	-0.0006	-0.0248	-0.0003

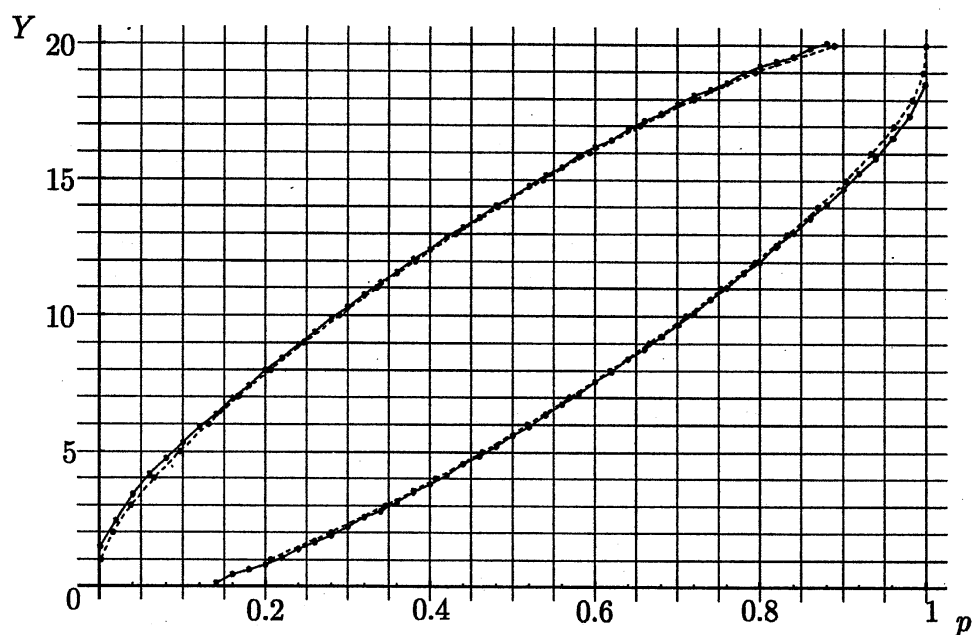


図 1. 2 項分布 $B(20, p)$ の場合の受容域 $[t_1+u_1-(1/2), t_2-u_2+(1/2)]$ と
ランダム信頼区間 $[p, \bar{p}]$

—— 受容域, - - - - ランダム信頼区間

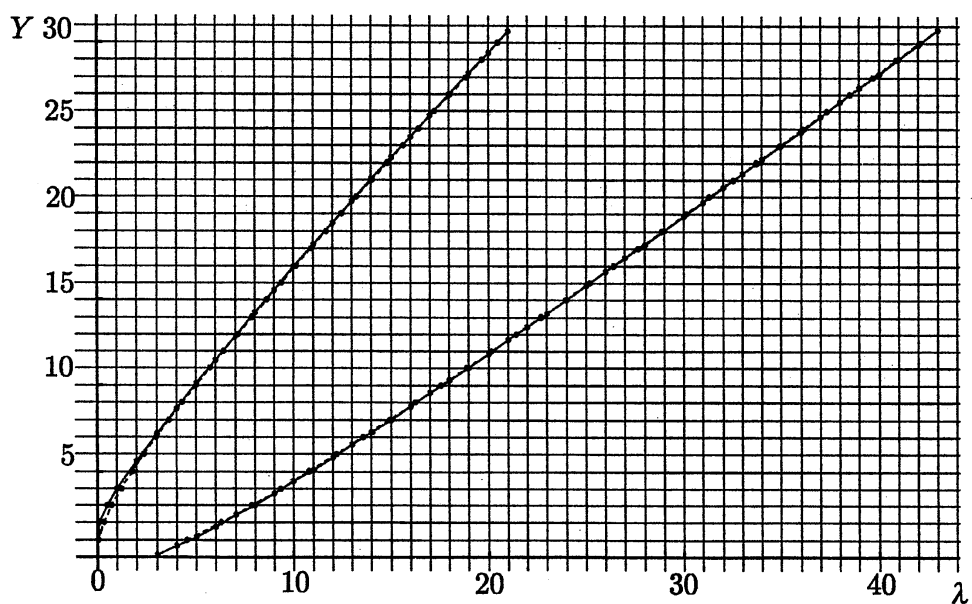


図 2. Poisson 分布 $Po(\lambda)$ の場合の受容域 $[t_1+u_1-(1/2), t_2-u_2+(1/2)]$ と
ランダム信頼区間 $[\lambda, \bar{\lambda}]$

—— 受容域, - - - - ランダム信頼区間

4.2. 負の2項分布, 対数級数分布

$X_1, \dots, X_n, \dots$ が互いに独立にいずれも確率関数

$$f_3(x, p) = \binom{x+k-1}{x} p^k q^x \quad (x = 0, 1, 2, \dots; 0 < p < 1, q = 1 - p)$$

の負の2項分布 $NB(k, p)$ に従うとする. このとき $T := \sum_{i=1}^n X_i$ の分布は $NB(nk, p)$ に従い, これは $NB(1, p)$ の和の分布として表せるので, $k = 1$ のときの4次までのキウムラント

$$\begin{aligned} \kappa_1(p) &= \mu(p) = \frac{q}{p}, & \kappa_2(p) &= \sigma^2(p) = \frac{q}{p^2}, \\ \kappa_3(p) &= \frac{q(1+q)}{p^3}, & \kappa_4(p) &= \frac{q(1+4q+q^2)}{p^4}, \end{aligned}$$

を用いて, $p = 0.2, 0.5, 0.8$, $\alpha = 0.05$ の場合に $\underline{y}(p)$, $\bar{y}(p)$ の真値と各近似の精度を数値的に比較した (表 9 ~ 14 参照). また, 系 1 より, ランダム信頼区間 $[\underline{p}, \bar{p}]$ は方程式

$$\begin{aligned} Y &= \frac{nq}{p} + \frac{\sqrt{nq}}{p^2} (-u_{\alpha/2} + \Delta_1), \\ Y &= \frac{nq}{p} + \frac{\sqrt{nq}}{p^2} (u_{\alpha/2} + \Delta_2) \end{aligned} \tag{25}$$

を解くことによって得られ, $n = 10, 20$ の場合に Δ_1, Δ_2 の代わりに Δ_1^0, Δ_2^0 を用いて得られたものと受容域をグラフで示し比較した (図 3, 4 参照).

次に $X_1, \dots, X_n, \dots$ が互いに独立にいずれも確率関数

$$f_4(x, p) = \frac{ap^x}{x} \quad (x = 1, 2, \dots; 0 < p < 1)$$

に従う対数級数分布に従うとする. ただし $a = -1/\log q$, $q = 1 - p$ とする. この場合の4次までのキウムラントは

$$\begin{aligned} \kappa_1(p) &= \mu(p) = \frac{ap}{q}, & \kappa_2(p) &= \sigma^2(p) = \frac{ap(1-ap)}{q^2}, \\ \kappa_3(p) &= \frac{ap(1+p-3ap+2a^2p^2)}{q^3}, \\ \kappa_4(p) &= \frac{ap\{1+4p+p^2-4ap(1+p)+6a^2p^2-3a^3p^3\}}{q^4} - 3\sigma^4(p), \end{aligned}$$

となり, これらを用いて $p = 0.2, 0.5, 0.8$, $\alpha = 0.05$ の場合に $\underline{y}(p)$, $\bar{y}(p)$ の近似値を求めた. 一方, $T := \sum_{i=1}^n X_i$ の分布は再生性がないことより重畳を使って再帰的に求めることになる. これから $\underline{y}(p), \bar{y}(p)$ の真値を求め, 先程の各近似と数値的に比

較した (表 15 ～ 20 参照). また系 1 より, $n = 10, 20$ の各場合に Δ_1^0, Δ_2^0 を用いた方程式

$$\begin{aligned} Y &= \frac{anp}{q} + \frac{a\sqrt{np}(1-ap)}{q^2}(-u_{\alpha/2} + \Delta_1^0), \\ Y &= \frac{anp}{q} + \frac{a\sqrt{np}(1-ap)}{q^2}(u_{\alpha/2} + \Delta_2^0) \end{aligned} \quad (26)$$

を解くことによって得られたランダム信頼区間 $[p, \bar{p}]$ と受容域をグラフで示し比較した (図 5, 6 参照).

さらに, Wani and Lo ([WL75]) は T の分布が第 1 種のスターリング分布に従う ([PW65]) を用いて $\alpha = 0.05$, $n = 10, 15, 20$ の場合に信頼区間を計算している. ここでは $n = 15, 20$ の場合の値を, (26) で求めた信頼区間と比較してみた. (表 21, 22 参照).

表 9. 負の 2 項分布 $NB(n, p)$ の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.2, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	—	—	—	—	—	—
2	0.4454	—	0.9209	-0.2861	-0.2662	-0.2735
3	1.7811	—	0.7993	-0.1740	-0.1700	-0.1717
4	3.5479	—	0.6838	-0.1592	-0.1556	-0.1676
5	5.5406	-5.1402	0.6220	-0.1307	-0.1289	-0.1413
10	17.5791	-5.2971	0.4650	-0.0633	-0.0659	-0.0752
15	31.4266	-5.3741	0.3881	-0.0476	-0.0454	-0.0525
20	46.2152	-5.4144	0.3478	-0.0337	-0.0277	-0.0277
25	61.6261	-5.4521	0.3101	-0.0269	-0.0257	-0.0319
30	77.4716	-5.4806	0.2816	-0.0246	-0.0249	-0.0292
35	93.6407	-5.4963	0.2658	-0.0195	-0.0179	-0.0231
40	110.0726	-5.5086	0.2536	-0.0166	-0.0119	-0.0143
45	126.7252	-5.5240	0.2381	-0.0151	-0.0122	-0.0167
50	143.5598	-5.5391	0.2230	-0.0140	-0.0144	-0.0180

表 10. 負の 2 項分布 $NB(n, p)$ の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.2, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	21.2895	-8.5243	-2.7621	—	-1.0833	—
2	27.7588	-7.3629	-1.6007	-0.4051	-0.4136	-0.3938
3	34.2273	-7.0455	-1.2834	-0.2961	-0.3141	-0.2962
4	40.3411	-6.8107	-1.0485	-0.1950	-0.1979	-0.1997
5	46.2807	-6.6811	-0.9190	-0.1553	-0.1682	-0.1633
10	74.0991	-6.3811	-0.6189	-0.0786	-0.0880	-0.0904
15	100.2010	-6.2535	-0.4913	-0.0506	-0.0578	-0.0528
20	125.3790	-6.1798	-0.4176	-0.0392	-0.0422	-0.0353
25	149.9612	-6.1351	-0.3730	-0.0310	-0.0372	-0.0364
30	174.4079	-6.0988	-0.3367	-0.0248	-0.0302	-0.0256
35	197.9288	-6.0732	-0.3110	-0.0220	-0.0272	-0.0258
40	221.4828	-6.0468	-0.2846	-0.0198	-0.0192	-0.0150
45	244.8327	-6.0339	-0.2718	-0.0174	-0.0215	-0.0215
50	267.9984	-6.0190	-0.2568	-0.0151	-0.0194	-0.0162

表 11. 負の 2 項分布 $NB(n, p)$ の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.5, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	—	—	(0.1489)	—	—	—
4	0.0680	—	0.3091	-0.0304	0.0250	0.0198
5	0.5359	—	0.1869	-0.0494	-0.0672	-0.0976
10	2.9577	-1.7229	0.1978	-0.0175	0.0181	-0.0110
15	6.0228	-1.7580	0.1628	-0.0131	0.0160	-0.0057
20	9.4134	-1.8093	0.1114	-0.0163	-0.0157	-0.0090
25	12.9342	-1.7932	0.1275	-0.0084	0.0139	-0.0079
30	16.6387	-1.8204	0.1003	-0.0087	-0.0035	-0.0169
40	24.3000	-1.8303	0.0904	-0.0065	0.0005	0.0003
50	32.2360	-1.8356	0.0851	-0.0050	0.0047	0.0001
60	40.3806	-1.8509	0.0698	-0.0050	-0.0036	-0.0009
80	57.0562	-1.8479	0.0728	-0.0030	0.0092	-0.0017
100	74.1387	-1.8567	0.0640	-0.0025	0.0071	-0.0008

表 12. 負の 2 項分布 $NB(n, p)$ の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.5, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
1	6.9571	-3.1853	-1.2646	-0.6526	-0.6963	-0.6398
2	8.7133	-2.7934	-0.8727	-0.4332	-0.4708	-0.4000
3	10.3564	-2.5555	-0.6347	-0.2474	-0.3066	-0.2677
4	11.9434	-2.3998	-0.4790	-0.1501	-0.1949	-0.2085
5	13.4444	-2.2464	-0.3257	-0.0677	-0.0716	-0.0268
10	20.9453	-2.1801	-0.2594	-0.0451	-0.0797	-0.0626
15	27.8556	-2.1204	-0.1997	-0.0278	-0.0530	-0.0424
20	34.4565	-2.0606	-0.1399	-0.0163	-0.0128	-0.0050
25	40.9307	-2.0717	-0.1510	-0.0152	-0.0373	-0.0201
30	47.2309	-2.0491	-0.1284	-0.0111	-0.0246	-0.0058
40	59.5482	-2.0178	-0.0971	-0.0106	-0.0072	-0.0105
50	71.6108	-2.0112	-0.0905	-0.0079	-0.0101	-0.0147
60	83.4669	-1.9966	-0.0759	-0.0058	-0.0025	-0.0019
80	106.7902	-1.9984	-0.0777	-0.0044	-0.0142	-0.0070
100	129.7052	-1.9872	-0.0664	-0.0036	-0.0096	-0.0063

表 13. 負の 2 項分布 $NB(n, p)$ の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.8, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
10	—	—	—	—	—	—
15	0.3987	—	0.0683	-0.0356	-0.0126	-0.0021
20	0.9268	-0.8267	0.1336	0.0001	0.0636	0.0005
25	1.6578	-0.8860	0.0743	-0.0075	0.0117	-0.0204
30	2.4181	-0.9193	0.0411	-0.0136	-0.0161	-0.0019
35	3.1369	-0.8688	0.0915	-0.0033	0.0386	0.0040
40	3.9378	-0.8673	0.0931	-0.0017	0.0435	-0.0020
45	4.7857	-0.8855	0.0749	0.0001	0.0282	-0.0044
50	5.6587	-0.9061	0.0542	-0.0035	0.0099	-0.0122
60	7.4481	-0.9349	0.0254	-0.0080	-0.0150	-0.0027
70	9.2382	-0.9051	0.0553	-0.0043	0.0179	0.0024
80	11.0978	-0.8976	0.0628	-0.0026	0.0277	0.0009
90	13.0042	-0.8984	0.0619	-0.0017	0.0289	-0.0007
100	14.9451	-0.9016	0.0587	-0.0013	0.0274	-0.0017

表 14. 負の 2 項分布 $NB(n, p)$ の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.8, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
5	5.1744	-1.4745	-0.5141	-0.2653	-0.3740	—
10	7.2198	-1.2550	-0.2947	-0.1112	-0.1956	—
15	9.1087	-1.1153	-0.1549	-0.0101	-0.0740	-0.0122
20	11.0294	-1.1295	-0.1692	-0.0341	-0.0991	-0.0406
25	12.8151	-1.0869	-0.1265	-0.0243	-0.0638	-0.0382
30	14.5147	-1.0136	-0.0532	-0.0181	0.0040	-0.0108
35	16.2892	-1.0572	-0.0969	-0.0146	-0.0439	-0.0061
40	17.9985	-1.0690	-0.1086	-0.0131	-0.0591	-0.0158
45	19.6333	-1.0335	-0.0731	-0.0181	-0.0264	-0.0275
50	21.2844	-1.0370	-0.0766	-0.0110	-0.0323	-0.0030
60	24.4815	-0.9947	-0.0343	-0.0063	0.0062	-0.0021
70	27.6846	-1.0177	-0.0574	-0.0052	-0.0199	-0.0127
80	30.8267	-1.0269	-0.0665	-0.0045	-0.0315	-0.0093
90	33.9217	-1.0274	-0.0671	-0.0043	-0.0340	-0.0067
100	36.9814	-1.0249	-0.0646	-0.0042	-0.0332	-0.0051

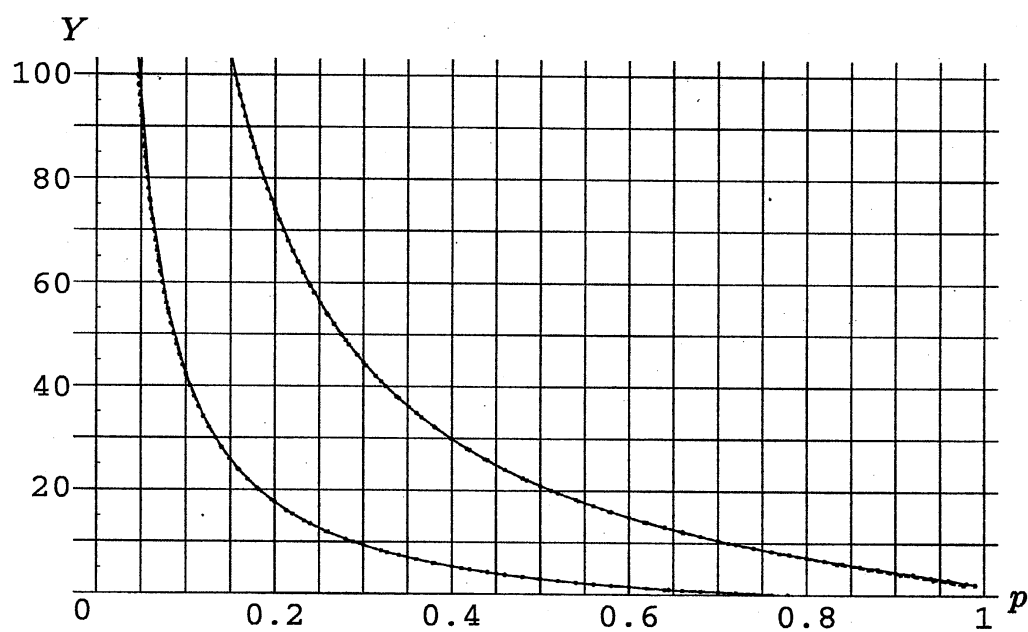


図 3. 負の 2 項分布 $NB(10, p)$ の場合の受容域 $[t_1+u_1-(1/2), t_2-u_2+(1/2)]$ と
ランダム信頼区間 $[p, \bar{p}]$ ($\alpha = 0.05$)
—— 受容域, - - - - ランダム信頼区間

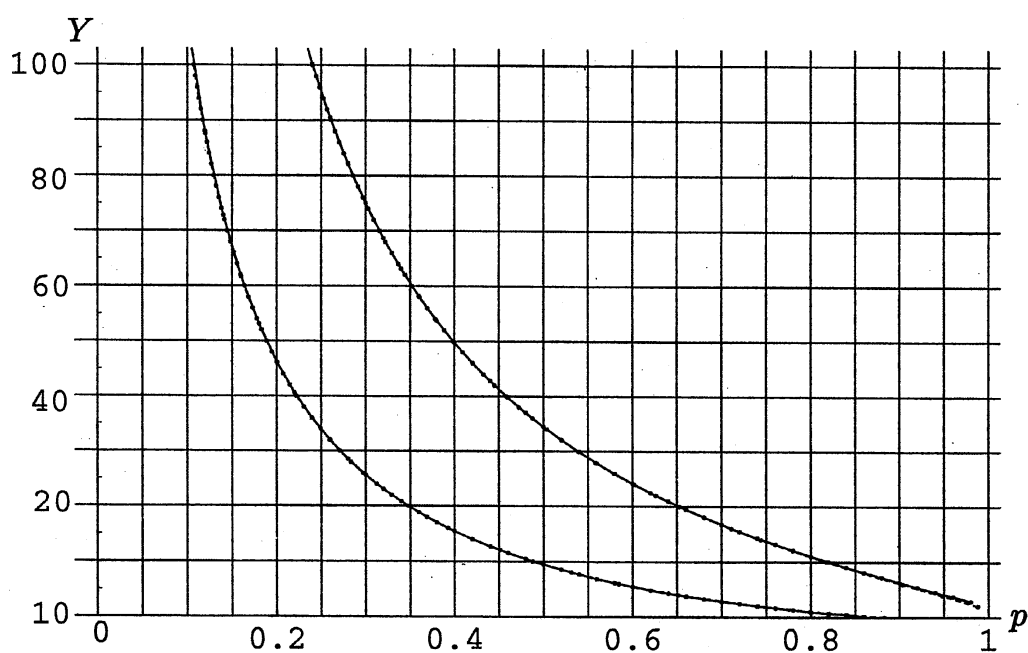


図 4. 負の 2 項分布 $NB(20, p)$ の場合の受容域 $[t_1+u_1-(1/2), t_2-u_2+(1/2)]$ と
ランダム信頼区間 $[p, \bar{p}]$ ($\alpha = 0.05$)
—— 受容域, - - - - ランダム信頼区間

表 15. 対数級数分布の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.2, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
20	—	—	—	—	—	—
25	25.0099	—	0.1731	0.0090	0.0919	0.0292
30	30.3459	—	0.0824	-0.0228	0.0083	0.0142
35	35.6303	—	0.0719	-0.0072	0.0033	-0.0237
40	40.8746	-0.7847	0.1243	0.0099	0.0601	0.0085
50	51.5939	-0.8580	0.0510	-0.0086	-0.0064	-0.0251
60	62.2672	-0.8319	0.0771	-0.0118	0.0247	0.0039
70	72.9879	-0.8127	0.0963	0.0015	0.0478	0.0054
80	83.7782	-0.8309	0.0780	0.0001	0.0326	-0.0083
90	94.6102	-0.8646	0.0444	-0.0063	0.0016	-0.0144
100	105.4510	-0.8852	0.0238	-0.0094	-0.0168	-0.0035

表 16. 対数級数分布の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.2, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
5	8.8170	-1.5449	-0.6360	-0.4318	-0.4544	—
10	14.9721	-1.4064	-0.4975	-0.3515	-0.3691	—
15	20.9934	-1.2951	-0.3861	-0.2061	-0.2813	—
20	26.9512	-1.2036	-0.2946	-0.1260	-0.2038	—
25	32.8644	-1.1207	-0.2117	-0.0624	-0.1305	-0.1010
30	38.7403	-1.0383	-0.1294	-0.0140	-0.0552	-0.0500
35	44.6708	-1.0393	-0.1303	-0.0523	-0.0617	-0.0741
40	50.5564	-1.0179	-0.1090	-0.0636	-0.0448	-0.0850
50	62.3119	-1.0123	-0.1033	-0.0203	-0.0459	-0.0050
60	74.0279	-1.0206	-0.1116	-0.0068	-0.0592	-0.0110
70	85.6705	-0.9961	-0.0871	-0.0200	-0.0386	-0.0341
80	97.3054	-0.9959	-0.0869	-0.0163	-0.0415	-0.0063
90	108.9143	-0.996	-0.0870	-0.0066	-0.0442	-0.0103
100	120.4530	-0.948	-0.0388	-0.0065	0.0018	-0.0013

表 17. 対数級数分布の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.5, \alpha=0.05$)

n	真値	1次近似 (5)	2次近似 (6)	3次近似 (4)	3次 (I) (7)	3次 (II) (8)
5	—	—	(5.0145)	—	—	—
10	10.3907	-1.5213	0.2095	-0.0480	-0.0257	-0.0316
15	16.3946	-1.5607	0.1701	-0.0314	-0.0220	-0.0213
20	22.5803	-1.5859	0.1449	-0.0169	-0.0214	-0.0398
25	28.8406	-1.5604	0.1703	-0.0079	0.0216	-0.0099
30	35.2390	-1.5841	0.1467	-0.0124	0.0109	0.0069
35	41.6969	-1.5997	0.1311	-0.0085	0.0053	-0.0173
40	48.1922	-1.5995	0.1313	-0.0078	0.0137	0.0051
50	61.3334	-1.6256	0.1052	-0.0084	-0.0000	0.0018
60	74.5890	-1.6404	0.0904	-0.0076	-0.0056	-0.0164
70	87.9118	-1.6270	0.1038	-0.0018	0.0149	-0.0038
80	101.3426	-1.6461	0.0847	-0.0068	0.0016	0.0009
90	114.8111	-1.6411	0.0897	-0.0026	0.0113	-0.0060
100	128.3512	-1.6561	0.0747	-0.0048	0.0003	0.0019

表 18. 対数級数分布の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.5, \alpha=0.05$)

n	真値	1次近似 (5)	2次近似 (6)	3次近似 (4)	3次 (I) (7)	3次 (II) (8)
5	13.5383	-2.3951	-0.6643	-0.2851	-0.3317	-0.2570
10	22.0410	-2.0565	-0.3257	-0.0382	-0.0905	-0.0645
15	30.4081	-1.9611	-0.2303	-0.0310	-0.0383	-0.0060
20	38.6482	-1.9348	-0.2041	-0.0348	-0.0377	-0.0413
25	46.7896	-1.9350	-0.2042	-0.0309	-0.0555	-0.0517
30	54.8156	-1.9088	-0.1781	-0.0174	-0.0423	-0.0357
35	62.7856	-1.8941	-0.1633	-0.0178	-0.0376	-0.0305
40	70.6997	-1.8769	-0.1461	-0.0155	-0.0285	-0.0320
50	86.4104	-1.8487	-0.1179	-0.0106	-0.0127	-0.0023
60	102.0283	-1.8535	-0.1228	-0.0065	-0.0267	-0.0062
70	117.5192	-1.8267	-0.0959	-0.0131	-0.0070	-0.0056
80	132.9713	-1.8367	-0.1059	-0.0043	-0.0228	-0.0072
90	148.3390	-1.8239	-0.0932	-0.0071	-0.0148	-0.0018
100	163.6590	-1.8151	-0.0843	-0.0048	-0.0099	-0.0115

表 19. 対数級数分布の場合の $y(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.8, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
5	5.6201	—	0.9611	-0.1360	-0.1462	-0.1431
10	13.7531	—	0.7165	-0.0749	-0.0665	-0.0600
15	22.8163	-4.5131	0.5977	-0.0535	-0.0416	-0.0416
20	32.3961	-4.6020	0.5089	-0.0493	-0.0448	-0.0579
25	42.2791	-4.6447	0.4662	-0.0375	-0.0291	-0.0370
30	52.4130	-4.6902	0.4206	-0.0344	-0.0314	-0.0394
35	62.7125	-4.7133	0.3975	-0.0243	-0.0210	-0.0313
40	73.1577	-4.7333	0.3776	-0.0232	-0.0139	-0.0107
50	94.3998	-4.7797	0.3311	-0.0203	-0.0190	-0.0248
60	115.9654	-4.7988	0.3121	-0.0143	-0.0076	-0.0124
70	137.8016	-4.8226	0.2882	-0.0128	-0.0077	-0.0152
80	159.8413	-4.8394	0.2714	-0.0116	-0.0054	-0.0119
90	182.0509	-4.8540	0.2568	-0.0099	-0.0042	-0.0073
100	204.4086	-4.8728	0.2381	-0.0106	-0.0095	-0.0112

表 20. 対数級数分布の場合の $\bar{y}(p)$ の真値と近似誤差 ($p=0.8, \alpha=0.05$)

n	真値	1 次近似 (5)	2 次近似 (6)	3 次近似 (4)	3 次 (I) (7)	3 次 (II) (8)
5	29.8481	-6.4651	-1.3543	-0.2474	-0.2469	-0.2589
10	46.3677	-6.0197	-0.9089	-0.1139	-0.1259	-0.1315
15	62.0993	-5.8423	-0.7315	-0.0761	-0.0921	-0.0894
20	77.3414	-5.7220	-0.6111	-0.0507	-0.0575	-0.0485
25	92.2894	-5.6568	-0.5460	-0.0425	-0.0508	-0.0429
30	107.0046	-5.6070	-0.4962	-0.0336	-0.0441	-0.0475
35	121.5352	-5.5606	-0.4498	-0.0354	-0.0313	-0.0207
40	135.9423	-5.5395	-0.4287	-0.0274	-0.0372	-0.0414
50	164.3972	-5.4832	-0.3724	-0.0209	-0.0222	-0.0135
60	192.5231	-5.4489	-0.3381	-0.0209	-0.0184	-0.0120
70	220.3931	-5.4245	-0.3137	-0.0160	-0.0178	-0.0102
80	248.0607	-5.4083	-0.2974	-0.0136	-0.0206	-0.0155
90	275.5488	-5.3845	-0.2736	-0.0135	-0.0126	-0.0090
100	302.9061	-5.3740	-0.2631	-0.0102	-0.0155	-0.0140

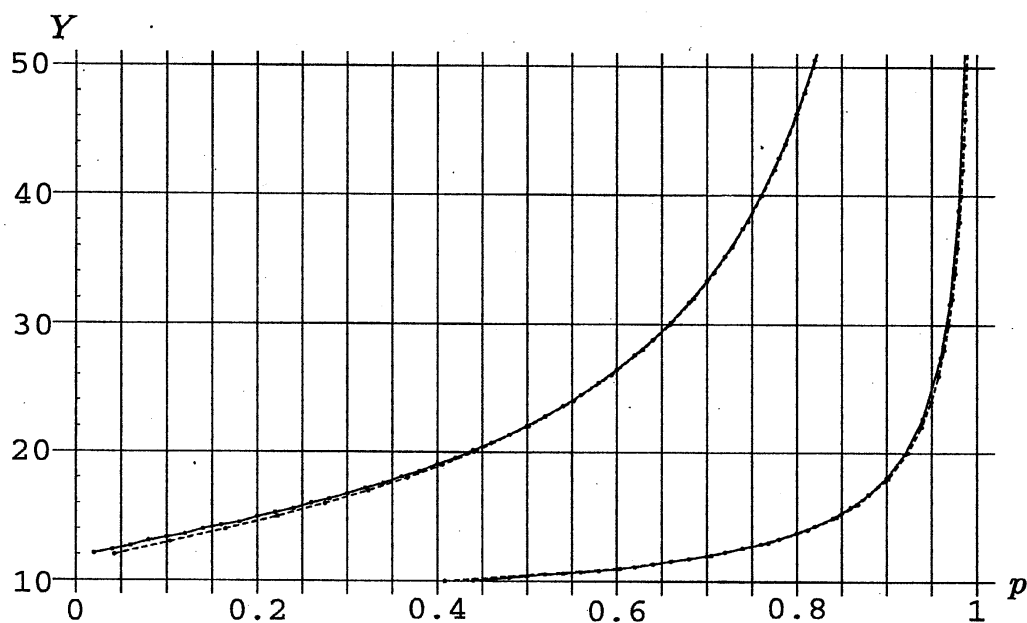


図 5. 対数級数分布の場合の受容域 $[t_1+u_1-(1/2), t_2-u_2+(1/2)]$ と
ランダム信頼区間 $[p, \bar{p}]$ ($\alpha = 0.05, n = 10$)
—— 受容域, - - - - ランダム信頼区間

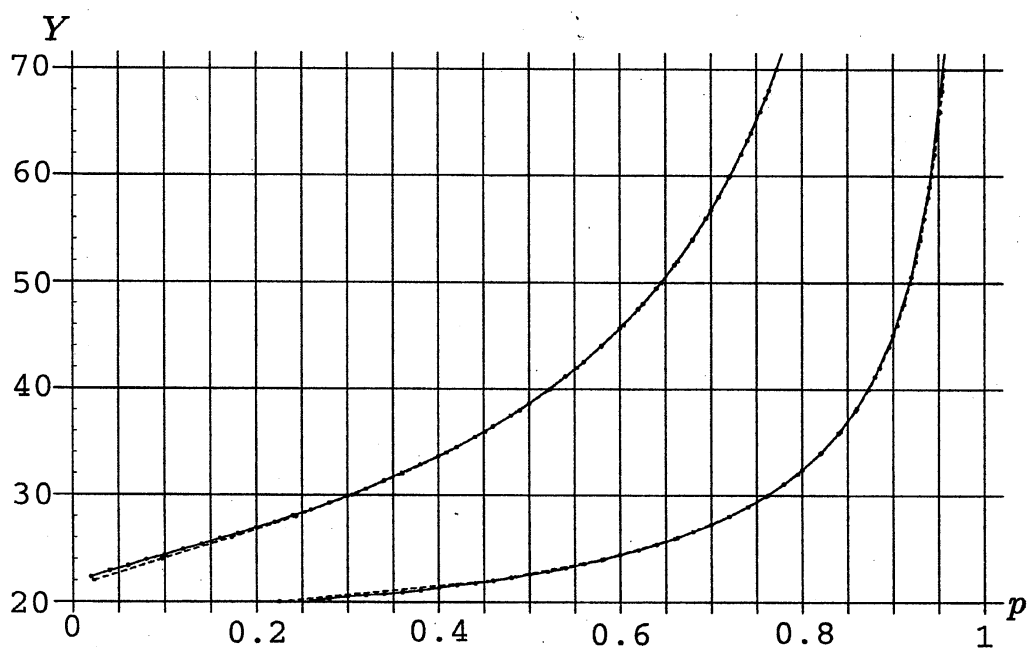


図 6. 対数級数分布の場合の受容域 $[t_1+u_1-(1/2), t_2-u_2+(1/2)]$ と
ランダム信頼区間 $[p, \bar{p}]$ ($\alpha = 0.05, n = 20$)
—— 受容域, - - - - ランダム信頼区間

表 21. 対数級数分布の場合の Wani and Lo [WL75] と 3 次近似での p の信頼限界
の比較 ($\alpha = 0.05, n = 15$)

x	下側限界 $\underline{p}$			上側限界 $\bar{p}$		
	Wani & Lo	(26)	差	Wani & Lo	(26)	差
15	0.000	—	—	0.402	0.2903	-0.112
16	0.003	—	—	0.529	0.4580	-0.071
17	0.030	0.0301	0.000	0.612	0.5580	-0.054
18	0.072	0.0748	0.003	0.671	0.6284	-0.043
19	0.119	0.1220	0.003	0.717	0.6812	-0.036
20	0.166	0.1683	0.002	0.753	0.7224	-0.031
21	0.211	0.2124	0.001	0.782	0.7554	-0.027
22	0.253	0.2538	0.001	0.806	0.7823	-0.024
23	0.293	0.2922	-0.001	0.825	0.8047	-0.020
24	0.329	0.3278	-0.001	0.842	0.8235	-0.018
25	0.363	0.3608	-0.002	0.856	0.8396	-0.016
26	0.394	0.3912	-0.003	0.869	0.8533	-0.016
27	0.423	0.4194	-0.004	0.879	0.8653	-0.014
28	0.456	0.4455	-0.011	0.889	0.8757	-0.013
29	0.475	0.4697	-0.005	0.897	0.8879	-0.012
30	0.498	0.4921	-0.006	0.904	0.8930	-0.011
31	0.519	0.5130	-0.006	0.910	0.9003	-0.010
32	0.539	0.5324	-0.007	0.916	0.9067	-0.009
33	0.557	0.5506	-0.006	0.921	0.9125	-0.008
34	0.575	0.5675	-0.008	0.926	0.9178	-0.008
35	0.591	0.5833	-0.008	0.930	0.9225	-0.007
36	0.606	0.5982	-0.008	0.934	0.9268	-0.007
37	0.620	0.6122	-0.008	0.938	0.9308	-0.007
38	0.633	0.6253	-0.008	0.941	0.9344	-0.007
39	0.645	0.6376	-0.007	0.944	0.9377	-0.006
40	0.657	0.6493	-0.008	0.947	0.9407	-0.006
42	0.679	0.6707	-0.008	0.952	0.9461	-0.006
44	0.698	0.6898	-0.008	0.956	0.9508	-0.005
46	0.715	0.7071	-0.008	0.959	0.9548	-0.004
48	0.731	0.7227	-0.008	0.963	0.9583	-0.005
50	0.745	0.7368	-0.008	0.965	0.9614	-0.004
52	0.758	0.7497	-0.008	0.968	0.9641	-0.004
54	0.769	0.7615	-0.008	0.970	0.9665	-0.003
56	0.786	0.7723	-0.014	0.972	0.9687	-0.003
58	0.790	0.7823	-0.008	0.973	0.9707	-0.002

表 21(続). 対数級数分布の場合の Wani and Lo [WL75] と 3 次近似での p の信頼
 限界の比較 ($\alpha = 0.05, n = 15$)

x	下側限界 $\underline{p}$			上側限界 $\bar{p}$		
	Wani & Lo	(26)	差	Wani & Lo	(26)	差
60	0.799	0.7915	-0.008	0.975	0.9724	-0.003
65	0.819	0.8116	-0.007	0.979	0.9761	-0.003
70	0.836	0.8284	-0.008	0.981	0.9791	0.008
75	0.850	0.8427	-0.007	0.983	0.9815	-0.002
80	0.861	0.8549	-0.006	0.985	0.9834	-0.002
90	0.881	0.8747	-0.006	0.988	0.9865	-0.002
100	0.896	0.8900	-0.006	0.990	0.9887	-0.001
150	0.937	0.9330	-0.004	0.995	0.9943	-0.001
200	0.956	0.9525	-0.004	0.997	0.9964	-0.001
250	0.966	0.9641	-0.002	0.998	0.9975	-0.001
300	0.973	0.9705	-0.002	0.998	—	—

表 22. 対数級数分布の場合の Wani and Lo [WL75] と 3 次近似での p の信頼限界
 の比較 ($\alpha = 0.05, n = 20$)

x	下側限界 $\underline{p}$			上側限界 $\bar{p}$		
	Wani & Lo	(26)	差	Wani & Lo	(26)	差
20	0.000	—	—	0.317	0.2250	-0.092
21	0.003	—	—	0.430	0.3677	-0.062
22	0.023	0.0232	0.000	0.509	0.4595	-0.049
23	0.056	0.0586	0.003	0.569	0.5281	-0.041
24	0.093	0.0969	0.004	0.617	0.5821	-0.035
25	0.132	0.1354	0.003	0.657	0.6261	-0.031
26	0.170	0.1730	0.003	0.690	0.6626	-0.027
27	0.206	0.2089	0.003	0.718	0.6934	-0.025
28	0.241	0.2430	0.002	0.742	0.7197	-0.022
29	0.274	0.2751	0.001	0.763	0.7424	-0.021
30	0.305	0.3054	0.000	0.781	0.7622	-0.019
31	0.334	0.3338	0.000	0.797	0.7796	-0.017
32	0.361	0.3604	-0.001	0.811	0.7950	-0.016
33	0.387	0.3854	-0.002	0.823	0.8087	-0.014
34	0.411	0.4088	-0.002	0.835	0.8209	-0.014
35	0.433	0.4309	-0.002	0.845	0.8319	-0.013

表 22(続). 対数級数分布の場合の Wani and Lo [WL75] と 3 次近似での p の信頼
 限界の比較 ($\alpha = 0.05, n = 20$)

x	下側限界 $\underline{p}$			上側限界 $\bar{p}$		
	Wani & Lo	(26)	差	Wani & Lo	(26)	差
36	0.455	0.4516	-0.003	0.854	0.8418	-0.012
37	0.474	0.4710	-0.003	0.862	0.8508	-0.011
38	0.493	0.4893	-0.004	0.870	0.8590	-0.011
39	0.511	0.5066	-0.004	0.876	0.8664	-0.010
40	0.527	0.5229	-0.004	0.883	0.8732	-0.010
42	0.558	0.5528	-0.005	0.894	0.8853	-0.009
44	0.585	0.5797	-0.005	0.903	0.8955	-0.007
46	0.609	0.6038	-0.005	0.912	0.9044	-0.008
48	0.631	0.6256	-0.005	0.919	0.9120	-0.007
50	0.651	0.6454	-0.006	0.925	0.9187	-0.006
52	0.669	0.6634	-0.006	0.930	0.9246	-0.005
54	0.686	0.6798	-0.006	0.935	0.9298	-0.005
56	0.701	0.6948	-0.006	0.939	0.9344	-0.005
58	0.715	0.7086	-0.006	0.943	0.9386	-0.004
60	0.727	0.7214	-0.006	0.947	0.9423	-0.005
65	0.755	0.7493	-0.006	0.954	0.9502	-0.004
70	0.778	0.7725	-0.006	0.960	0.9564	-0.004
75	0.798	0.7920	-0.006	0.964	0.9614	-0.003
80	0.814	0.8088	-0.005	0.968	0.9655	-0.002
85	0.829	0.8233	-0.006	0.971	0.9690	-0.002
90	0.841	0.8357	-0.005	0.974	0.9719	-0.002
95	0.852	0.8467	-0.005	0.976	0.9743	-0.002
100	0.861	0.8568	-0.005	0.978	0.9765	-0.002
120	0.891	0.8861	-0.005	0.984	0.9826	-0.001
150	0.918	0.9139	-0.004	0.989	0.9879	-0.001
200	0.942	0.9396	-0.002	0.993	0.9923	-0.001
250	0.956	0.9539	-0.002	0.995	0.9946	0.000
300	0.965	0.9635	-0.001	0.996	0.9959	0.000
400	0.975	0.9736	-0.001	0.998	0.9973	-0.001
500	0.981	0.9797	-0.001	0.998	—	—

5. おわりに

第4節の2項分布, Poisson分布, 負の2項分布, 対数級数分布のいずれの場合にも, ランダム信頼区間の近似としては, 3次近似が良いが3次近似のバージョンIIは3次近似より使い易く, 近似も悪くない. また, 3次近似のバージョンIは3次近似, そのバージョンIIより近似は少し良くないが使い易さの点でもそれらより良い. 特に, 信頼区間そのものを求める時には, 対数級数分布の場合の[WL75]と比較しても本論の近似は良く, また実際に計算する場合にも簡便であり有用である. 今後, さらに他の離散分布についても検討を試みたい.

参考文献

- [ATT97] Akahira, M., Takahashi, K. and Takeuchi, K. (1997). Randomized confidence intervals of a parameter for a family of discrete exponential type distributions. *Commun. Statist. - Simula.*, **26**(3), 1103–1128.
- [L86] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses* (2nd ed.). Wiley & Sons, New York.
- [PW65] Patil, G. P. and Wani, J. K. (1965). On certain structural properties of the logarithmic series distribution and the first type Stirling distribution. *Sankhyā, Series A*. **27**, 271–280.
- [T98] Takahashi, K. (1998). Randomized confidence intervals of a parameter for the negative binomial and logarithmic series distributions. *Mathematical Research Note No.98-009*, Inst. Math., Univ. Tsukuba.
- [WL75] Wani, J. K. and Lo, H. P. (1975). Clopper-Pearson system of confidence intervals for the logarithmic series distribution. *Biometrics*, **31**, 771–775.