

多重可換置換群について

東大理 坂内英一

多重可移群に関して、いくつかの得られた結果について
報告します

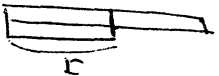
1° 多重可移群の正規部分群について A. Wagner: Normal subgroups of triply transitive permutation groups of odd degree, Math. Zeit 94 (1966). 219-222. N. Ito: Normal subgroups of quadruply transitive permutation groups, Hokkaido J. 1 (1972) 1-6. の表.

定理 1 (character theory に関する部分の拡張) $G = 2r$
重可移 ($r \geq 2$) on $\Omega = \{1, \dots, n\}$. $n \geq 2r+1$. $H \triangleleft G$,
 $H \neq 1$. $H_{1,2}, \dots, H_{r-1}$ の $\Omega - \{1, 2, \dots, 2r-1\}$ 上の orbits
の個数 = 1

$$\Rightarrow 1) \left(X_{\underbrace{\quad}_r}, X_{\underbrace{\quad}_r} \right)_I = 1$$

1

$$2) (X_D, X_D)_H = 1.$$

ここで D は  とは異なる任意の dimension $\leq r$ の Young diagram をあさかつ. なす X_D は Young diagram D により決まる S_n の既約指標であさかつ. Young diagram $D = \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{array}$ の dimension は $n_2 + n_3 + \dots$ と定義する

$$3) X_{\begin{array}{c} r \\ r \end{array}} \Big|_H = \chi_1 + \dots + \chi_d$$

($\chi_1, \dots, \chi_d$ は異なる H の既約指標)

4) $\chi_1, \dots, \chi_d$ は全て非零, i.e., 表現は全て R -realizable.

(注: この結果は ^(9.4) もいふように H の場合でも成り立つ. e.g. $H = 2r-1$ 重可移群. $H_1, \dots, 2r-1$ の $\Omega = \{1, \dots, 2r-1\}$ 上の全ての orbits が self-paired の場合にも成り立つ.)

定理 2. $G = t$ 重可移 ($t \geq 4$) on $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

$n > t+1$. $g = \text{odd prime}$ s.t. $g \mid t-1$. $1 \neq H \triangleleft G$. 更に

(1) $g \nmid n$.

(2) $|G:H| = H_1, \dots, t-1$ の $\Omega - \{1, \dots, t-1\}$ 上の orbits の個数

$$\Rightarrow G = H.$$

系 1. $G =$ 大重可移群 ($k \geq 4$) on $\Omega = \{1, \dots, n\}$. $n > k+1$.

$q = \text{prime}$ s.t. $q | k-1$. $1 \neq H \triangleleft G$ 更に.

(1) $q \nmid n$.

(2) $G/H = \text{solvable}$

$\Rightarrow H =$ 大重可移群 on Ω

系 2. $k=6, 8$ の時は上の系 1 は $G/H = \text{solvable}$ により

決定 (2) 無しに成立する.

系 3 $G =$ 素数次の non-solvable 大重可移群 ($\forall k$)

$1 \neq H \triangleleft G \Rightarrow H \neq$ 大重可移群.

2° 大重可移群の分類問題に關して. M. Hall: On a theorem of Jordan, Pac. J. Math 4 (1954), 219-226.

H. Nagao: On multiply transitive groups V, J. of Alg. 9 (1968), 240-248. の 12 頁 → odd prime の場合 (但し多集度は上か下か) → 7 頁 2 行.

定理 3. $p = \text{odd prime}$. $G = p^2$ 重可移群 on $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

$G_1, \dots, p^2$ の Sylow p -subgroup は $\Omega - \{1, \dots, p^2\}$ 上 semi-regular ($\neq 1$)

$\Rightarrow n = p^2 + p, \quad G \geq A^\Omega$

系 $p = \text{odd prime}$. $G =$ 大重可移群 on $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

$G \not\geq A^\Omega$. かゝ $G_1, \dots, k$ の order は p^{2^k} 未満

$$\Rightarrow \Delta < p^2 + p.$$

この系に対応することは最近宮本泉君により本質的に拡張された。

定理 (宮本) $p = \text{odd prime}$ $G = \Delta$ 重可移 on Ω .
 $G \not\cong A^\Omega$ かつ $G_1, \dots, \Delta$ の order は p で割れない
 $\Rightarrow \Delta < 3p$

(注: この $3p$ は実は $2p+m$, (但 $m/p \rightarrow 0$ as $p \rightarrow \infty$) まで落とすことが出来る.)

なお、大山先生の (4 重可移群の) $p=2$ に関連した分類を $p = \text{odd prime}$ (但、多重度は増えるが) の場合に拡張することも可能である。

追記, なお, この講演のあと, 次の結果が証明できた。

定理. $p = \text{an odd prime}$, $G = 2p$ 重可移 on $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. $p \nmid |G_1|, 2, \dots, 2p|$, $p^2 \nmid |G_1, 2, \dots, p|$
 $\Rightarrow$ 矛盾.

これは先の宮本君の結果を合わせることにより, $2p$ 重可移群で $2p$ 点の stabilizer の order が p で割れないような群の分類が完成する.