

Dynkin 籠に対する例外生成列と安定性条件

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻 大谷 拓己

Takumi Otani

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

概要

Bridgeland 氏により導入された三角圏の安定性条件は、三角圏の幾何学的構造を理解するための重要な概念である。一方で、三角圏の表現論的性質を研究する上で、例外生成列は重要な役割をなす。Macrì は例外生成列に付随する安定性条件の研究を行った。この研究を基に、Dimitrov–Katzarkov は安定性条件 σ に対して σ -例外列の概念を導入した。本講義録では、Dynkin 籠が定める導来圏の場合には、すべての安定性条件 σ が σ -例外生成列を持つことを紹介する。

1 導入

三角圏の安定性条件は Bridgeland により導入された [B1]。これは、代数幾何学における曲線上の slope 安定性、あるいは表現論における加群の King の安定性の一般化として定義される。安定性条件は複素代数幾何・シンプレクティック幾何・表現論・数理論理など様々な分野で現れる数学の対象であり、現在も活発に研究がなされている。その中でも、三角圏 $\mathcal{D}$ の安定性条件全体がなす空間 $\text{Stab}(\mathcal{D})$ は変形理論と関連することが期待されており、 $\text{Stab}(\mathcal{D})$ の（幾何学的）構造を理解することは重要な課題の一つである。

Macrì は、例外生成列を持つ三角圏 $\mathcal{D}$ に対して、安定性条件の空間 $\text{Stab}(\mathcal{D})$ の研究を行った [M]。例外生成列に付随する安定性条件を構成することで、安定性条件の空間 $\text{Stab}(\mathcal{D})$ のホモトピー型を調べた。この研究に基づき、Dimitrov–Katzarkov は安定性条件 σ に付随する σ -例外列の概念を導入した。 σ -例外列とは、 σ -安定対象からなる Ext-例外列であり、フェイズが長さ 1 の区間に収まるようなものである（定義 3.8 参照）。三角圏が例外生成列を持ったとしても、安定性条件 σ の σ -例外生成列が存在するとは限らない。そのため、その存在は非自明な問題である。affine $A_{a,2}^{(1)}$ 籠と ℓ -Kronecker 籠 K_ℓ の場合には、 σ -例外生成列の存在が知られていた [M, DK1]。研究 [O] では、Dynkin 籠 $\vec{\Delta}$ の定める導来圏 $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ の場合に、任意の安定性条件 σ が σ -例外生成列をもつことを証明した：

定理 (定理 3.10). $\vec{\Delta}$ を Dynkin 籠とする。任意の $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ に対して、 σ -例外生成列 $\mathcal{E}$ で $\mathcal{P}((0, 1]) \cong \langle \mathcal{E} \rangle_{\text{ex}}$ をみたすものが存在する。

この定理は、Dimitrov–Katzarkov による予想 [DK2, Conjecture 7.1] を肯定的に解決している。本報告書では、定理 3.10 に関する解説を行う。また、主定理に基づいた、安定性条件の空間 $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ の期待される構造について説明する。

本報告書は次のように構成されている。第 2 節では、三角圏の安定性条件に関する基本事項についての復習を行う。第 3 節では、研究 [O] の主結果を述べる。例外生成列についての復習を行った後に、安定性条件と例外生成列の関係を解説する。第 4 節では、主定理 3.10 に基づき、Dynkin 簾 $\vec{\Delta}$ の導来圏 $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ に対する安定性条件の空間 $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ の期待される幾何学的構造について解説を行う。

記号法. 本稿では、 $\mathbb{C}$ -線型かつ有限型な三角圏 $\mathcal{D}$ を考える。すなわち、任意の対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して、 $\mathbb{C}$ -線形空間 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F)$ が有限次元となる三角圏 $\mathcal{D}$ を考える。

いくつか記号と言葉を用意する。各 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して、

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(E, F) := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}^p(E, F)[-p], \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}}^p(E, F) := \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F[p])$$

とあらわす。 $\mathcal{D}$ の Grothendieck 群を $K_0(\mathcal{D})$ であらわし、 $K_0(\mathcal{D})$ の階数を $\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であらわす。

充満部分圏 $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ が**拡大閉** (extension closed) であるとは、 $\mathcal{D}$ 上の完全三角 $E \rightarrow F \rightarrow G$ が $E, G \in \mathcal{A}$ であるとき、 $F \in \mathcal{A}$ となることである。充満部分圏 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ に対して、 $\mathcal{C}$ を含む最小の拡大閉部分圏を $\langle \mathcal{C} \rangle_{\text{ex}}$ であらわす。

2 三角圏の安定性条件

この節では、Bridgeland により導入された三角圏の安定性条件についての復習を行う。詳細については原論文 [B1] を参照されたい。

定義 2.1 ([B1]). 三角圏 $\mathcal{D}$ 上の**安定性条件** (stability condition) とは、群準同型 $Z: K_0(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ と、 $\mathbb{R}$ -次数付けされた充満部分加法圏の族 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ からなる組 $(Z, \mathcal{P})$ で次の公理を満たすものである：

- (i) 零でない対象 $E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して、ある $m(E) \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $Z(E) = m(E)e^{\sqrt{-1}\pi\phi}$ が成立する。
- (ii) 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して、 $\mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ が成立する。
- (iii) $\phi_1 > \phi_2$ であるとき、 $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ に対して、 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A_1, A_2) = 0$ が成立する。
- (iv) (**Harder–Narasimhan 条件**) 零でない対象 $E \in \mathcal{D}$ に対して、実数の列 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_n$ と、三角形の列

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = F_0 & \xrightarrow{\quad} & F_1 & \xrightarrow{\quad} & F_2 & \xrightarrow{\quad} & \cdots \xrightarrow{\quad} F_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & F_n = E \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & A_1 & & A_2 & & & & A_n
 \end{array}$$

で $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ を満たすものが存在する.

(v) (台条件) 定数 $C > 0$ で, 零でない対象 $E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して

$$\|E\| < C|Z(E)|$$

を満たすものが存在する. ただし, $\|\cdot\|$ は $K_0(\mathcal{D}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上のノルムである.

$\mathcal{D}$ 上の安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ に対し, Z を中心電荷 (central charge), $\mathcal{P}$ をスライシング (slicing) とよぶ.

零でない対象 $E \in \mathcal{P}(\phi)$ は, フェイズ ϕ の σ -半安定対象 (σ -semistable object) という. とくに, E が $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象であるときに σ -安定対象 (σ -stable object) という. 安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ に対して, 充満部分圏 $\mathcal{P}((0, 1]) := \langle \mathcal{P}(\phi) \mid 0 < \phi \leq 1 \rangle_{\text{ex}}$ は有界 t -構造の核をなすことが知られており, とくに Abel 圏の構造を持つ.

逆に, 安定性条件は有界 t -構造の核とその上の安定関数の組として記述することができる. 有界 t -構造の核 $\mathcal{A}$ に対し, その Grothendieck 群を $K_0(\mathcal{A})$ であらわす. このとき, $K_0(\mathcal{A}) \cong K_0(\mathcal{D})$ であることに注意する.

定義 2.2 ([B1]). $\mathcal{A}$ を三角圏 $\mathcal{D}$ 上の有界 t -構造の核とする. $\mathcal{A}$ 上の安定関数 (stability function) とは, 群準同型 $Z: K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ で, 零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ に対して $Z(E) \in \mathbb{H}_-$ となるものである. ここで, $\mathbb{H}_- := \{re^{\sqrt{-1}\pi\phi} \in \mathbb{C} \mid r > 0, 0 < \phi \leq 1\}$ である.

零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ に対し, 実数 $\phi(E) := (1/\pi) \arg Z(E) \in (0, 1]$ を E のフェイズとよぶ. 零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ が, 零でない部分対象 $A \subset E$ に対して $\phi(A) \leq \phi(E)$ をみたすとき, E は半安定であるという. また, $\phi(A) < \phi(E)$ をみたすときに, E は安定であるという. 安定関数 $Z: K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ が, 零でない対象 $E \in \mathcal{A}$ に対して, フィルトレーション $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = E$ で F_i/F_{i-1} が半安定であり $\phi(F_1/F_0) > \phi(F_2/F_1) > \cdots > \phi(F_n/F_{n-1})$ を満たすものが存在するときに, Harder–Narasimhan 条件をみたすという. また, ある定数 $C > 0$ が存在して $\|E\| < C|Z(E)|$ がすべての $E \in \mathcal{A}$ で成立するとき, 安定関数 Z は台条件をみたすという.

命題 2.3 ([B1]). $\mathcal{D}$ 上の安定性条件を与えることは, 有界 t -構造の核とその上の安定関数で Harder–Narasimhan 条件及び台条件を満たすものを与えることと同値である. $\square$

三角圏 $\mathcal{D}$ 上の安定性条件全体のなす空間を $\text{Stab}(\mathcal{D})$ であらわす. $\text{Stab}(\mathcal{D})$ 上には, (一般化された) 距離が誘導する位相が存在する.

定理 2.4 ([B1]). 自然な忘却写像

$$\mathcal{Z}: \text{Stab}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{D}), \mathbb{C}), \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto Z,$$

は, 局所同相写像となる. とくに, $\text{Stab}(\mathcal{D})$ は複素多様体となる. $\square$

一般に、三角圏の安定性条件が存在するかどうかは非自明である．代数的な条件下では、安定性条件が比較的容易に構成される．有界 t -構造の核 $\mathcal{A}$ がアルティンのかつネーター的であるとき、 $\mathcal{A}$ は長さ有限 (of finite length) であるという． $\mathcal{A}$ が長さ有限で単純対象が有限個しか持たないとき、任意の安定関数は Harder–Narasimhan 条件及び台条件をみたすことが知られている．したがって、次の命題が成立する．

命題 2.5 ([B2]). $\mathcal{A}$ を有界 t -構造の核で、長さ有限であり単純対象が $S_1, \dots, S_\mu$ で与えられるとする．このとき、次の同型が存在する：

$$\{(Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{P}((0, 1]) \cong \mathcal{A}\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}_+^\mu, \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto (Z(S_1), \dots, Z(S_\mu)).$$

□

複素多様体 $\text{Stab}(\mathcal{D})$ 上の“幾何学的構造”は、様々な種類の変形理論と関連することが期待されている．しかしながら、その全体的な構造を調べることは困難である．節 4 では、Dynkin 簾の導来圏 $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ の場合に、 $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ の代数的な記述に関する予想について述べる．

3 例外生成列と安定性条件

この節では、例外生成列とそれに付随する安定性条件についての復習を行った後に、主結果について述べる．まずは例外生成列を定義する．

定義 3.1. (i) 対象 $E \in \mathcal{D}$ が

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}^p(E, E) \cong \begin{cases} \mathbb{C}, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0, \end{cases}$$

をみたすとき、 E を $\mathcal{D}$ の**例外対象** (exceptional object) と呼ぶ．

(ii) 例外対象からなる順序集合 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ が、 $i > j$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}^p(E_i, E_j) \cong 0$$

をみたすとき、 $\mathcal{E}$ を**例外列** (exceptional collection) という．

(iii) 例外列 $\mathcal{E}$ を含む最小の充満部分三角圏が $\mathcal{D}$ と同値になるとき、 $\mathcal{E}$ は**例外生成列** (full exceptional collection) であるという．

例外列が与えられたとき、新たな例外列を構成する方法に変異 (mutation) がある．

定義 3.2. (E, F) を例外列とする．対象 $\mathcal{R}_F E$ と $\mathcal{L}_E F$ を、次の完全三角により定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_F E &\longrightarrow E \xrightarrow{\text{ev}^*} \text{Hom}_{\mathcal{D}}^\bullet(E, F)^* \otimes F, \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}^\bullet(E, F) \otimes E &\xrightarrow{\text{ev}} F \longrightarrow \mathcal{L}_E F, \end{aligned}$$

ここで, $(-)^*$ は双対 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \mathbb{C})$ をあらわしている. $\mathcal{R}_F E$ を E の F に沿った**右変異** (right mutation), $\mathcal{L}_E F$ を F の E に沿った**左変異** (left mutation) という. このとき, $(F, \mathcal{R}_F E)$ と $(\mathcal{L}_E F, E)$ は例外列をなす.

命題 3.3 (cf. [BP]). Br_{μ} を $\mu-1$ 個の生成元からなる *Artin* 組紐群とする. このとき, 群 $\text{Br}_{\mu} \ltimes \mathbb{Z}^{\mu}$ は, 例外生成列の同値類の集合に次のように作用する:

$$\begin{aligned} b_i \cdot (E_1, \dots, E_{\mu}) &:= (E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \mathcal{R}_{E_{i+1}} E_i, E_{i+2}, \dots, E_{\mu}), \\ b_i^{-1} \cdot (E_1, \dots, E_{\mu}) &:= (E_1, \dots, E_{i-1}, \mathcal{L}_{E_i} E_{i+1}, E_i, E_{i+2}, \dots, E_{\mu}), \\ e_i \cdot (E_1, \dots, E_{\mu}) &:= (E_1, \dots, E_{i-1}, E_i[1], E_{i+1}, \dots, E_{\mu}), \end{aligned}$$

ここで, e_i は $\mathbb{Z}^{\mu}$ の i 番目の生成元である. □

Abel 圏 $\mathcal{A}$ が与えられたとき, その導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ において

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(E, F) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}^p(E, F), \quad E, F \in \mathcal{A},$$

が成立する. この意味で, Ext のみが残っている例外列を導入する. この概念は, 安定性条件と例外生成列に関連させる上で非常に重要となる.

定義 3.4. 例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_{\mu})$ が **Ext** であるとは,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}^p(E_i, E_j) \cong 0 \quad \text{for } p \leq 0$$

をみたすことをいう.

$\mathcal{D}$ は有限型な三角圏であるので, 任意の例外生成列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_{\mu})$ に対し, 適当に $p = (p_1, \dots, p_{\mu}) \in \mathbb{Z}^{\mu}$ をとることで $\mathcal{E}[p] := (E_1[p_1], \dots, E_{\mu}[p_{\mu}])$ は Ext -例外生成列となるようにすることができる.

例 3.5. Q を非輪状態とし, 頂点の集合を $Q_0 = \{1, \dots, \mu\}$ とあらわす. $i > j$ のときに, $j \in Q_0$ から $i \in Q_0$ への矢はないものとする. このとき, 各頂点 $i \in Q_0$ に対応する単純対象 $S_i \in \text{mod}(\mathbb{C}Q)$ は

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_{\mathbb{C}Q}^1(S_i, S_j) = \#\{i \rightarrow j \in Q_1\}$$

を満たし, $(S_1, \dots, S_{\mu})$ は Ext -例外生成列をなす. □

命題 3.6 ([M]). $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_{\mu})$ を $\mathcal{D}$ 上の Ext -例外生成列とする. このとき, $\langle \mathcal{E} \rangle_{\text{ex}}$ は有界 t -構造の核をなす. さらに, $\langle \mathcal{E} \rangle_{\text{ex}}$ は長さ有限であり, 単純対象は $E_1, \dots, E_{\mu}$ で与えられる. □

命題 2.5 と命題 3.6 を組み合わせることで, 次が得られる.

系 3.7. $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_{\mu})$ を $\mathcal{D}$ 上の例外生成列とする. このとき, $E_1, \dots, E_{\mu}$ が σ -安定となるような, $\mathcal{D}$ 上の安定性条件 σ が存在する. □

Macriの研究 [M] に基づき, Dimitrov–Katzarkov は安定性条件 σ に対する σ -例外列の概念を導入した.

定義 3.8 ([DK1]). $\sigma \in \text{Stab}(\mathcal{D})$ を安定性条件とする. 例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_\mu)$ が, 次の 3 条件をみたすとき, $\mathcal{E}$ を σ -例外列という:

- (i) $E_1, \dots, E_\mu$ は σ -半安定対象である.
- (ii) $\mathcal{E}$ は Ext-例外列である.
- (iii) ある $r \in \mathbb{R}$ が存在して, 各 E_i は $r < \phi(E_i) \leq r+1$ を満たす.

安定性条件 σ に対して σ -例外生成列の存在するとは限らない. ℓ -Kronecker 筋 K_ℓ とアフィン $A_{1,2}^{(1)}$ 筋の場合に, σ -例外生成列の存在が研究されている:



図 1 ℓ -Kronecker 筋 K_ℓ とアフィン $A_{1,2}^{(1)}$ 筋.

命題 3.9 ([M] for $Q = K_\ell$, [DK1, Theorem 1.1] for $Q = A_{1,2}^{(1)}$). Q を ℓ -Kronecker 筋 K_ℓ あるいはアフィン $A_{1,2}^{(1)}$ 筋とする. このとき, 任意の $\mathcal{D}^b(Q)$ 上の安定性条件 σ に対し, σ -例外生成列が存在する. □

研究 [O] では, Dynkin 筋 $\vec{\Delta}$ の導来圏の場合に, σ -例外生成列の存在を示した.

定理 3.10 ([O]). $\vec{\Delta}$ を Dynkin 筋とする. 任意の $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ に対して, σ -例外生成列 $\mathcal{E}$ で $\mathcal{P}((0, 1]) \cong \langle \mathcal{E} \rangle_{\text{ex}}$ をみたすものが存在する.

定理 3.10 は, Dimitrov–Katzarkov による予想 [DK2, Conjecture 7.1] を肯定的に解決している.

証明の概略. 安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ に対して $\mathcal{P}((0, 1])$ は有界 t -構造の核をなすのであった. [KV] により, $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の有界 t -構造の核は, 標準的な核 $\text{mod}(\mathbb{C}\vec{\Delta})$ から simple tilting を繰り返すことで得られることが証明されている.

例 3.5 から, 標準的な核 $\text{mod}(\mathbb{C}\vec{\Delta})$ の場合には, Ext-例外生成列の存在が直ちに得られる. [KQ] によって simple tilting された核の単純対象が明示的に与えられている. そのため, simple tilting された核の単純対象が Ext-例外生成列となるように並べ替えられることを, 帰納法を用いて証明する. □

4 Dynkin 簾の導来圏の安定性条件の空間

この節では、Dynkin 簾の導来圏 $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ に対する安定性条件の空間 $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ について考察する。Dynkin 簾の代数的構造と ADE 特異点の幾何学的構造の対応に基づいた $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ についての予想を述べる。

4.1 安定性条件の空間とルート系

Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ 上には、Euler 形式とよばれる $\mathbb{Z}$ -双線型形式

$$\chi: K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \times K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \chi(E, F) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F[p]),$$

が定義される。Euler 形式の対称化を $I := \chi + \chi^T: K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \times K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \longrightarrow \mathbb{Z}$ であらわし、**Cartan 形式**とよぶ。また、部分集合 $\Delta_{\text{re}} \subset K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ を

$$\Delta_{\text{re}} := \{[E] \in K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \mid E \in \mathcal{D}^b(\vec{\Delta}) \text{ は例外対象} \}$$

と定義する。導来圏 $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ には、Serre 関手 $\mathcal{S} \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ の存在が知られている。Serre 関手を用いて、自己同型 $\mathbf{c} \in \text{Aut}(K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})), I)$ を $\mathbf{c} := -[\mathcal{S}]$ と定める。この自己同型 $\mathbf{c}$ は **Coxeter 変換** (Coxeter transformation) と呼ばれる。

命題 4.1 ([C-B, R, STW]). 組 $R = (K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})), I, \Delta_{\text{re}}, \mathbf{c})$ は一般化ルート系 (*generalized root system*) をなす。 $\square$

ルート系 $R = (K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})), I, \Delta_{\text{re}})$ に対して、集合 Δ_{re} の元を**実ルート** (real root) と呼ぶ。各実ルート $\alpha \in \Delta_{\text{re}}$ に対して、**鏡映** (reflection) $r_{\alpha} \in \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(L, I)$ を

$$r_{\alpha}(\lambda) := \lambda - I(\alpha, \lambda)\alpha, \quad \lambda \in L,$$

で定義し、これらが生成する群 $W = \langle r_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta_{\text{re}} \rangle$ を **Weyl 群** という。また、 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ を

$$\mathfrak{h} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{h}^* := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

と定義する。このとき、自然なペアリング $\langle -, - \rangle: \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在するため、 $\mathfrak{h}$ 上の W -作用が

$$\langle \lambda, w(x) \rangle = \langle w^{-1}(\lambda), x \rangle, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad x \in \mathfrak{h}, \quad w \in W,$$

により定められる。

命題 4.2 (Chevalley の定理). $\mathfrak{h}/W$ を代数多様体 $\text{Spec } \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ に付随する複素解析空間とする。このとき、複素解析空間の同型 $\mathfrak{h}/W \cong \mathbb{C}^{\mu}$ が存在する。とくに、 $\mathfrak{h}/W$ は複素多様体の構造を持つ。 $\square$

Dynkin 簾は, ADE 型特異点を通して幾何学と密接に関連している. 命題 4.1 の一般化ルート系は, ADE 型特異点に付随する一般化ルート系と同型になることが知られている. 複素多様体 $\mathfrak{h}/W$ は ADE 型特異点の普遍開折 (変形) 空間と同型であり, さらに, 三角圏 (導来深谷圏) での同値が存在することも知られている. これらの背景に基づき, 次の予想が期待されている.

予想 4.3 (cf. [T]). 複素多様体の同型 $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \cong \mathfrak{h}/W$ が存在する.

この予想 4.3 はいくつかの場合に証明されている. A_2 型の場合には Bridgeland–Qiu–Surtherland [BQS] により示されており, 一般の A_μ 型の場合には Haiden–Katzarkov–Kontsevich [HKK] により示されている. さらに, アフィン $A_{p,q}^{(1)}$ 型の場合にも同様の結果が [HKK] により証明されている.

これらの場合には, 同型写像 $\text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \cong \mathfrak{h}/W$ の下で, 忘却写像 $\mathcal{Z}: \text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})), \mathbb{C})$ は **原始形式の指数周期** (exponential period mapping associated to a primitive form) $\Pi_{\zeta}: \mathfrak{h}/W \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})), \mathbb{C})$ と同一視されることが示されている:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) & \xrightarrow{\cong} & \mathfrak{h}/W \\
 \searrow \mathcal{Z} & \circlearrowright & \swarrow \Pi_{\zeta} \\
 & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})), \mathbb{C}) &
 \end{array}$$

注意 4.4. ℓ -Kronecker 簾の場合にも, 予想 4.3 と同様の結果が, [DK3, IOST] により証明されている. しかしながら, 原始形式の指数周期との関係については未解決である.

4.2 例外生成列と周期写像

主定理 3.10 を用いて, 予想 4.3 の写像の構成についての考察を行う.

命題 4.5 ([KST, OT]). 次を満たす安定性条件 $\sigma_0 = (Z_0, P_0) \in \text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ が存在する:

- (i) 中心電荷 Z_0 は, 原点 $0 \in \mathfrak{h}/W$ における原始形式の指数周期 $\Pi_{\zeta}(0)$ に一致する.
- (ii) $P_0((0, 1]) \cong \text{mod}(\mathbb{C}\vec{\Delta}_{\text{principal}})$ が成立する. ただし, $\vec{\Delta}_{\text{principal}}$ は *principal* な向き付けをもつ Dynkin 簾である. □

例 3.5 により, 安定性条件 $\sigma_0 = (Z_0, P_0) \in \text{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ には, σ -例外生成列 $\mathcal{E}_0$ で $\langle \mathcal{E}_0 \rangle_{\text{ex}} \cong P_0((0, 1])$ を満たすものが存在する. 命題 3.3 と主定理 3.10 に基づき, 次が期待される.

予想 4.6. 各 $s \in \mathbb{C}^{\mu} \cong \mathfrak{h}/W$ に対し, ある $g_s \in \text{Br}_{\mu} \times \mathbb{Z}^{\mu}$ が存在して次の条件を満たす:

- (i) 例外生成列 $\mathcal{E}_s := g_s \cdot \mathcal{E}_0$ は, *Ext*-例外生成列である.
- (ii) 中心電荷 $Z_s: K_0(\langle \mathcal{E}_s \rangle_{\text{ex}}) \rightarrow \mathbb{C}$ は, 原始形式の指数周期 $\Pi_{\zeta}(s)$ に一致する.

とくに, 命題 2.5 により, $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ 上の安定性条件 (Z_s, P_s) が存在する.

A 型の場合には, [HKK] の結果からこの予想が従う.

予想 4.6 の解決には, ADE 型特異点の消滅サイクルと Ext-例外生成列の対応に関する研究が重要になると考えられる. 幾何学的な対応及び安定性条件の空間の幾何学的構造の理解が, 今後の課題である.

参考文献

- [BP] A. Bondal and A. Polishchuk, *Homological Properties of Associative Algebras: The Method of Helices*, Izv. RAN. Ser. Mat., 1993, Volume 57, Issue 2, 3-50 (Mi izv877).
- [B1] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2), **166** (2) : 317-345, 2007.
- [B2] T. Bridgeland, *Spaces of stability conditions*, Algebraic geometry-Seattle 2005. Part 1, 1-21, Proc. Sympos. Pure Math., **80**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [BQS] T. Bridgeland, Y. Qiu and T. Sutherland, *Stability conditions and A_2 -quiver*, Advances in Mathematics, Volume **365**, 13 May 2020, 107049.
- [C-B] W. Crawley-Boevey, *Exceptional sequences of representations of quivers*, Representations of algebras (Ottawa, ON, 1992), 117-124, CMS Conf. Proc., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [DK1] G. Dimitrov and L. Katzarkov, *Non-semistable exceptional objects in hereditary categories*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. **20**, 6293-6377.
- [DK2] G. Dimitrov and L. Katzarkov, *Non-semistable exceptional objects in hereditary categories: some remarks and conjectures*, Stacks and categories in geometry, topology, and algebra, 263-287, Contemp. Math., **643**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [DK3] G. Dimitrov and L. Katzarkov, *Bridgeland stability conditions on wild Kronecker quivers*, Adv. Math. **352** (2019), 27-55.
- [HKK] F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich, *Flat surfaces and stability structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **126** (2017), 247-318.
- [IOST] A. Ikeda, T. Otani, Y. Shiraishi and A. Takahashi, *A Frobenius manifold for ℓ -Kronecker quiver*, Lett. Math. Phys. **112** (2022), no. 1, Paper No. 14, 24 pp.
- [KST] H. Kajiura, K. Saito and A. Takahashi, *Matrix factorization and representations of quivers. II. Type ADE case*, Adv. Math. **211** (2007), no. 1, 327-362.
- [KV] B. Keller and D. Vossieck, *Aisles in derived categories*, Bull. Soc. Math. Belg. **40** (1988), 239-253.
- [KQ] A. King and Y. Qiu, *Exchange graphs and Ext quivers*, Adv. Math. **285** (2015), 1106-1154.
- [M] E. Macrì, *Stability conditions on curves*, Math. Res. Lett. **14** (2007), no. 4, 657-672.
- [O] T. Otani, *Full exceptional collections and stability conditions for Dynkin quivers*, arXiv:2210.08479.
- [OT] T. Otani and A. Takahashi, *Gamma integral structure for an invertible polynomial of chain type*, Adv. Math. **409** (2022) 108681.
- [R] C. Ringel, *The canonical algebras*, Banach Center Publ., **26**, Part 1, Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 407-432, PWN, Warsaw, 1990.
- [STW] Y. Shiraishi, A. Takahashi, K. Wada, *On Weyl groups and Artin groups associated to orbifold projective lines*, J. Algebra **453** (2016), 249-290.
- [T] A. Takahashi, *Matrix Factorizations and Representations of Quivers I*, arXiv:math/0506347.