

$B^{(B)}$ -valued extensions for B -valued structures

早大 理工 田嶋 信一

Boolean ultrapowers については [1], [2], [3] など
で研究されており、その拡張は (4), (5) などに見られる。本
稿は、Boolean algebra の Boolean ultrapowers を考
えることにより、Boolean valued structure M に対し
 $M^{(B)}$ を構成した。すなわち、complete Boolean algebra
 B' と B -valued structure M に対し

$$M^{(B)} = \{ f: M \rightarrow B \mid \forall n, m \in M (n \neq m \rightarrow \bigvee_{m \in M} f(m) = 0) \text{ \& } \bigvee_{m \in M} f(m) = 1 \}$$

次に、文の値を Boolean ultrapowers $B^{(B)}$ で考えた。
この $B^{(B)}$ は次の operation により Boolean algebra となる。
 $u, v \in B^{(B)}$ に対し、

$$(1) (u \vee v)(a) = \bigvee_{a_1, a_2 = a} u(a_1) \wedge v(a_2)$$

$$(2) (\neg u)(a) = u(\neg a)$$

また、 $\exists$ に対する operation として、 $\bigvee_{i \in I} u_i$ を定義

$$(3) (\bigvee_{i \in I} u_i)(a) = \bigvee_{\bigvee_{i \in I} a_i = a} \bigwedge_{i \in I} u_i(a_i)$$

した。ところが、無条件では $\bigvee_{i \in I} u_i \in B^{(B')}$ とならない。そこで、 B' が common refinement を持つ という条件をつけた。以下これを条件 (1) と呼ぶ。条件 (1) は便宜的な条件であり、もっと弱い条件があることを予想していたが、予稿を送った後に、高田君 が、条件 (1) は $\bigvee_{i \in I} u_i \in B^{(B')}$ となるための必要十分条件であり、しかも B' が power set algebra と同型となってしまうことを証明してくれた。つまり、私の方法では、 B' としては power set しかとれないことがわかった。このことにより、すべては意味を失った。したがって、以下述べることは、単なる計算でしかない。

Prop. 1 complete Boolean algebra B と power set algebra B' に対し、 $B^{(B')}$ は (1), (2), (3) の operation のもとで complete Boolean algebra となる。

証明は、次の lemma より明らか。

lemma

$u, v \in B^{(B')}$ に対し、

$$u \leq v \quad \text{iff} \quad \forall a \in B \quad u(a) \leq \bigvee_{a \leq b} v(b)$$

次に、atomic formula $R(x_1, \dots, x_n)$ に対し、

$$\|R(f_1, \dots, f_n)\|(b) = \bigvee_{\|R(m_1, \dots, m_n)\| = b} \bigwedge_{j=1}^n f_j(m_j) \quad \text{と定義し。}$$

構成に関する帰納法により、任意の formula θ に対し、

$$\|\theta(f_1, \dots, f_k)\|(b) = \bigvee_{\|\theta(m_1, \dots, m_k)\|=b} \bigwedge_{j=1}^k f_j(m_j) \quad \text{を得る。}$$

この系としては、

Cor 1

M が maximum principle を満足すれば、 $M^{(B)}$ も満足する。

Cor 2

M が "separated" ならば $M^{(B)}$ も separated などがある。

また、2-valued structure N に対しては、

$$(N^{(B)})^{(B)} \cong N^{(B^B)} \quad \text{を得る。}$$

REFERENCES

- [1] R.Mansfield, The theory of Boolean ultrapowers, Ann.Math.Logic 2 (1971) 297-323
- [2] K.Potthoff, Boolean ultrapowers, Arch, Math, Logic 16(1974) 37-48
- [3] B.Koppelberg and S.Koppelberg, A Boolean ultrapower which is not an ultrapower, J.S.L. 41(1976) 245-249
- [4] D.P.Ellerman, Sheaves of structures and generalized ultraproducts Ann.Math.Logic 7 (1974) 163-195
- [5] A.Urquhart, Boolean model theory I and II (preprint, Toronto)