

ルール番号 168 の基本セルオートマトンの力学的性質について

大鑄 史男

名古屋工業大学

〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町

E-mail: ohi.fumio@nitech.ac.jp

Abstract

ルール番号 40 の基本セルオートマトンは Wolfram class I に属し, 生成される時空間パターンは死滅するとされていたが [17], ある特定の configurations 全体の上ではカオス性を持ち [12][13], Lyapunov exponent の値にも多様性があることが示されている [12].

本稿では, やはり Wolfram class I に属し, その時空間パターンは死滅するとされているルール番号 168 について, ルール番号 40 と同様にカオス性を持ち, 多様な Lyapunov exponent の値を持ち得ることを示す. その際, ルール番号 40 の議論 [12][13] で用いた方法を用いる.

1. Introductory Preliminaries

基本セルオートマトン (elementary cellular automaton (ECA)) は, $\{0, 1\}$ と $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ との組 $(\{0, 1\}, g)$ であり, 簡単に ECA g と呼ぶ. g は local transition function の呼ばれる.

a local transition function $g: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ によって, $A \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ から A への写像 g を

$$x \in A, \quad (g(x))_i = g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

として定義する. この g を global transition function と呼ぶ.

A 上の距離 d を次のように定義する.

$$d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}, \quad x, y \in A,$$

これによって位相的な力学系 (A, g) が得られる.

A の要素は configuration と呼ばれ, 初期 configuration $x \in A$ の軌道は, 以下に定義される系列 $\{g^t(x)\}_{t=1}^{\infty}$ である.

$$g^0(x) = x, \quad g^{t+1}(x) = g(g^t(x)), \quad t \in \mathbb{N}.$$

ECA g のルール番号 $R(g)$ は

$$R(g) = \sum_{(a,b,c)} g(a, b, c) 2^{a*4+b*2+c}.$$

で定義される. ルール番号 40 と 168 の local transition function g_{40}, g_{168} は次の表によって与えられる.

(a, b, c)	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 1)$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
$g_{40}(a, b, c)$	0	0	1	0	1	0	0	0
$g_{168}(a, b, c)$	1	0	1	0	1	0	0	0

$$S_k = \{ (0, 1, m_i)_{i=-\infty}^{\infty} \mid m_i = 1 \text{ or } 2 \text{ or } \cdots \text{ or } k, \quad i \in \mathbb{Z} \} \subset A, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

としたとき,

$$\forall x \in A \setminus S_2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_{40}^t(x) = 0,$$

$$\forall x \in S_2, \quad g_{40}(x) = \sigma_L(x),$$

であることが [13] で示されている。ここで σ_L は, left-shift transformation である。

本稿では, $\mathcal{A}$ 上での g_{168} の軌道の性質について議論し, それぞれの S_k 上で $g_{168} = \sigma_L$ であり, 従ってカオス的であること, また

$$S_k^+ \equiv \{x_{0,\rightarrow} \mid x \in S_k\}$$

としたとき, この上での $g_{168} = \sigma_L$ の動きをある区間力学系に関係づけ, その不変測度に関するあるパターンの相対頻度が g_{168} による spreading rate に一致することを示す。

Notations

(1) $x \in \mathcal{A}$ に対して,

$$x_{i,j} \equiv (x_i, \dots, x_j) \quad (i \leq j),$$

$$x_{\leftarrow, i} \equiv (\dots, x_{i-1}, x_i),$$

$$x_{j,\rightarrow} \equiv (x_j, x_{j+1}, \dots).$$

(2) $\alpha_i \in \{0, 1\}^{n_i}$, $\beta_i \in \{0, 1\}^{m_i}$, $n_i \geq 1$, $m_i \geq 1$, $i \in \mathbb{Z}$, に対して, 次のように定義する。

$$(\alpha_i, \beta_i)_{i=-\infty}^{+\infty} = (\dots, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_{n_1}^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \beta_{m_1}^{-1}, \alpha_1^0, \dots, \alpha_{n_0}^0, \beta_1^0, \dots, \beta_{m_0}^0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1}^1, \beta_1^1, \dots, \beta_{m_1}^1, \dots),$$

ここで, $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{n_i}^i)$, $\beta_i = (\beta_1^i, \dots, \beta_{m_i}^i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

(3) 0 は次の三つのうちのいずれかを意味する。いずれが意味されるかは, 前後の文脈から理解できる。

$$(\dots, 0, 0, 0, \dots), (\dots, 0, 0,) \text{ or } (0, 0, \dots).$$

(4) ブロック $\alpha \in \{0, 1\}^n$ を i 個並べることで得られるブロックを

$$(\alpha)_i \equiv (\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_i)$$

とする。また, α の長さを

$$|\alpha| = n$$

と定める。

2. Spreading Rate and Lyapunov Exponent

Shereshevsky[14] に従い, ECA g の $x \in \mathcal{A}$ における Lyapunov exponent は次のように定義される。
 $s \in \mathbb{Z}$ として

$$\begin{aligned} W_s^+(x) &\equiv \{y \in \mathcal{A} \mid \forall i \geq s, y_i = x_i\}, & W_s^-(x) &\equiv \{y \in \mathcal{A} \mid \forall i \leq s, y_i = x_i\}, \\ \tilde{\Lambda}_t^+(x) &\equiv \min \{s \mid g^t(W_0^+(x)) \subset W_s^+(g^t(x))\}, & \Lambda_t^+(x) &\equiv \max_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \tilde{\Lambda}_t^+(\sigma_L^j x) \right\}, \\ \tilde{\Lambda}_t^-(x) &\equiv \max \{s \mid g^t(W_0^-(x)) \subset W_s^-(g^t(x))\}, & \Lambda_t^-(x) &\equiv \min_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \tilde{\Lambda}_t^-(\sigma_L^j x) \right\}, \end{aligned}$$

とする。ここで, $\sigma_L^j = \sigma_R^{-j}$ for $j < 0$ であり, σ_R は right-shift transformation である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_t^+(x)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_t^-(x)}{t}$$

の極限が存在するとき, それぞれを x における右及び左 Lyapunov exponent と呼ぶ。

$x, y \in \mathcal{A}$ に対して

$$DFR(x, y) \equiv \sup\{i \mid x_i \neq y_i\}, \quad DFL(x, y) \equiv \inf\{i \mid x_i \neq y_i\},$$

とおく. 次の Lemma は, 後に定義する spreading rate と Lyapunov exponent を結びつける.

Lemma 2.1 ECA g において, configuration $x \in \mathcal{A}$ と $t \in \mathbb{N}_+$ に対して, 次の関係が成立する.

- (1) $\max_{y \in W_0^+(x)} DFR(g^t(x), g^t(y)) = \min\{s \mid g^t(W_0^+(x)) \subset W_s^+(g^t(x))\} - 1,$
- (2) $\min_{y \in W_0^-(x)} DFL(g^t(x), g^t(y)) = \max\{s \mid g^t(W_0^-(x)) \subset W_s^-(g^t(x))\} + 1.$

Ilachinski[5] に従い, spreading rate は次のように定義される. まず, $n_j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ($j \in \mathbb{Z}$) を次のように定義する.

$$x \in \mathcal{A}, \quad (n_j(x))_i = \begin{cases} x_i, & i \neq j, \\ \bar{x}_i, & i = j. \end{cases}$$

n_j は, configuration x の j 番目の状態を逆転させる. ECA g に対して,

$$\Gamma_t^+(x) \equiv \max_{j \in \mathbb{Z}} \{DFR(g^t(x), g^t(n_j(x))) - j\}, \quad \Gamma_t^-(x) \equiv \min_{j \in \mathbb{Z}} \{DFL(g^t(x), g^t(n_j(x))) - j\}$$

とし,

$$\gamma^+(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t^+(x)/t, \quad \gamma^-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_t^-(x)/t$$

の極限が存在するとき, それぞれを x における右および左 left spreading rate と呼ぶ.

Theorem 2.2 ECA g において, $x \in \mathcal{A}$ と $t \in \mathbb{N}_+$ に対して次の関係が成立する.

- (1) $\Lambda_t^+(x) = \max_{j \in \mathbb{Z}} \max_{y \in W_j^+(x)} \{DFR(g^t(x), g^t(y)) - j\} + 1, \quad \Gamma_t^+(x) \leq \Lambda_t^+(x).$
- (2) $\Lambda_t^-(x) = \min_{j \in \mathbb{Z}} \min_{y \in W_j^-(x)} \{DFL(g^t(x), g^t(y)) - j\} - 1, \quad \Lambda_t^-(x) \leq \Gamma_t^-(x).$

一般的に spreading rate と Lyapunov exponent は一致しないが, ECA が left most permutive または right most permutive であれば一致する [12].

3. $\mathcal{A}$ 上での g_{168} の軌道の性質

g_{168} の対応表から, 次の二つの Lemma は容易である.

Lemma 3.1 $x \in \mathcal{A}$, $x_i = x_{i+1} = 0$ であるとき,

$$(g_{168}(x))_{i,i+1} = (0, 0)$$

である. configuration 中の $(0, 0)$ ブロックは, 時間発展に於いて壁のような働きをする. つまり, 時刻 t に於ける configuration $g_{168}^t(x)$ について次のことが成立する.

$$g_{168}^t(x) = \left((g_{168}^t(x_{\leftarrow, i-1}, 0))_{\leftarrow, i-1}, \overset{\downarrow}{0}, \overset{\uparrow}{0}, (g_{168}^t(0, x_{i+2, \rightarrow}))_{i+2, \rightarrow} \right)$$

Lemma 3.2 (1) $x = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, \dots)$ とする. $(0, 0)$ の site 番号がそれぞれ -1 番, 0 番とされているが, 一般性は失われない. このとき,

$$\begin{aligned} g_{168}^{m_1}(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, \dots), \\ g_{168}^{m_1+\dots+m_n}(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 1_{m_{n+1}}, \dots). \end{aligned}$$

(2) $x = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0)$ に対して,

$$\begin{aligned} g_{168}^{m_1}(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0), \\ g_{168}^{m_1+\dots+m_n}(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 0), \\ (g_{168}^t(x))_{-1, \rightarrow} &= 0, \quad \forall t \geq m_1 + \dots + m_n. \end{aligned}$$

(3) $x = (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0, 1)$ に対して,

$$\begin{aligned} g_{168}^{m_1}(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, 0, 1_{m_2}, \dots, 0, 1_{m_n}, 0, 1), \\ g_{168}^{m_1+\dots+m_n}(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 0, 1), \\ (g_{168}^t(x))_{-1, \rightarrow} &= (0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1), \quad \forall t \geq m_1 + \dots + m_n. \end{aligned}$$

(4) $x = (\dots, \underbrace{\overset{0}{0}, 0, \dots, 0}_{\geq 2}, \overset{1}{0}, \dots)$ に対して,

$$\begin{aligned} g(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, \overset{0}{0}, 0, \dots, 0, \overset{1}{0}, \dots) \\ g^t(x) &= (\dots, \overset{-1}{0}, 0, \dots, 0, \overset{0}{0}, 0, \dots, 0, \overset{1}{0}, \dots), \quad \forall t \geq 1. \end{aligned}$$

これらの Lemmas と, g_{168} の対応表から次の定理は容易である.

Theorem 3.3 (1) $x \in \mathcal{S}_k$ ($k \in \mathbb{N}$), $g_{168}(x) = \sigma_L(x)$.

(2) $x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{S}_\infty$ に対して,

(2-i) x 中の 0-state site が孤立し, $\exists i \in \mathbb{Z}$, $x_{i, \rightarrow} = 1$ ならば,

$$\forall t \geq 1, g_{168}^t(x) \neq 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_{168}^t(x) = 1.$$

(2-ii) $x = 1$ ならば $g_{168}^t(1) = 1$ であり, 従って

$$\forall t \geq 1, g_{168}^t(1) = 1.$$

(2-iii) $\exists i \in \mathbb{Z}$, $x_{i, \rightarrow} = 1$, $\exists j \in \mathbb{Z}$, $(x_j, x_{j+1}) = (0, 0)$ (the right most 00 block in x) ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{168}^t(x) = \begin{pmatrix} j+1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

(2-iv) これら以外の x に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_{168}^t(x) = 0.$$

(g_{168}, S_k) は (g_{168}, A) の a sub-dynamical system であり, a left-shift dynamical system である. これについて次の定理が成立する. 証明は, ルール 40 が S_2 上で Devanay chaos であることの証明 [14] と同様である.

Theorem 3.4 任意の $k \geq 2$ に対して, (g_{168}, S_k) は Devanay chaos である.

周期点に関する次の定理は明らかである.

Theorem 3.5 (1) (g_{168}, S_2) は, 不動点, 素周期 4, 6, 以外の任意の素周期点を持つ.

(2) (g_{168}, S_3) は, 不動点, 素周期 4, 以外の素周期点を持つ.

(3) (g_{168}, S_k) ($k \geq 4$) は, 不動点以外の素周期点を持つ.

(4) ($k \geq 4$) の任意の k に対して, $(g_{168}, S_k \cup \{0\})$ 及び $(g_{168}, S_k \cup \{0\})$ は全ての周期点を持つ.

Remark (1) ルール 168 と双対である 224 について, 同様のことが双対的に成立する.

(2) (g_{168}, S_2) は (g_{40}, S_2) である.

4. Spreading Rate of Rule 168

$x \in S_\infty$ について

$$x = (\dots, \overset{0}{1}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots)$$

としても以下の議論の一般性は失われない.

$$n_0(x) = (\dots, \overset{0}{0}, 0, 1_{m_1}, 0, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots)$$

とし, x と $n_0(x)$ との right most different site number の時間推移を調べる.

$$\begin{aligned} g^{m_1}(x) &= (\dots, 1, 0, \overset{1}{1_{m_1}}, \overset{2}{0}, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \\ g^{m_1+1}(x) &= (\dots, 1, 0, \overset{0}{1_{m_1}}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, 1_{m_2-1}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \\ g^{m_1}(n_0(x)) &= (\dots, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, 1_{m_2}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \\ g^{m_1+1}(n_0(x)) &= (\dots, \overset{0}{0}, \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, 1_{m_2-1}, 0, 1_{m_3}, 0, \dots), \end{aligned}$$

であり, よって

$$\begin{aligned} 1 \leq t \leq m_1, & \quad Diff(g^t(x), g^t(n_0(x))) = 1, \\ m_1 + 1 \leq t \leq m_1 + m_2, & \quad Diff(g^t(x), g^t(n_0(x))) = 2, \\ m_1 + m_2 + 1 \leq t \leq m_1 + m_2 + m_3, & \quad Diff(g^t(x), g^t(n_0(x))) = 3, \end{aligned}$$

従って, 帰納的に

$$m_1 + \dots + m_n + 1 \leq t \leq m_1 + \dots + m_n + m_{n+1} \quad Diff(g^t(x), g^t(n_0(x))) = n,$$

であり, よって

$$m_1 + \cdots + m_n + 1 \leq t \leq m_1 + \cdots + m_n + m_{n+1}, \quad \frac{\text{Diff}(g^t(x), g^t(n_0(x)))}{t} = \frac{n}{t}.$$

このことから, $n \rightarrow \infty$ としたときの

$$\frac{n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

の極限が存在すれば, それが right spreading rate である. 従って, $x_{0,\rightarrow}$ に於ける $(0, 1_k, 0)$ の頻度によって right spreading rate が決まる. $(0, 1_k, 0)(x_{0,j})$ を $x_{0,j}$ に含まれる $(0, 1_k, 0)$ の個数 とすると,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (0, 1_n, 0)(x_{0,j})}$$

の極限が right spreading rate である.

分母分子に於ける無限和を見かけ上のものであり, $x_{0,j}$ が有限個の項のみからなるため, 和は有限和である.

$x \in S_k$ ($k \geq 2$) の場合を考える

right spreading rate は,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k (0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{\sum_{n=1}^k n \cdot (0, 1_n, 0)(x_{0,j})} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k \frac{(0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{j}}{\sum_{n=1}^k n \cdot \frac{(0, 1_n, 0)(x_{0,j})}{j}}$$

の極限として定まる. つまり, $x_{0,\rightarrow}$ に於ける $(0, 1_n, 0)$ の相対頻度が求まれば, right spreading rate が求まる.

$x \in S_k$ に対して, $x_{0,\rightarrow}$ を問題にすればよい. そこで

$$S_k^+ \equiv \{ x_{0,\rightarrow} \mid x \in S_k \}$$

とし, (S_k^+, σ_L) の力学系を考える. この dynamical system は, 区間力学系 $([0, 1], f)$ と位相同型であり, f はそのグラフが図のように与えられるものである.

位相同型写像 $\Psi: [0, 1] \rightarrow S_k^+$ は次のように定義される.

$$x \in [0, 1], \quad (\Psi(x))_i = \begin{cases} 0, & f^i(x) \in \bar{0}, \\ 1, & f^i(x) \in \bar{1}, \end{cases}$$

で与えられる.

$[0, 1]$ 上のルベーグ測度 l は, $([0, 1], f)$ の不変測度であり, フォルクローレ定理より ergodic である. このルベーグ測度 l の Ψ による induce は, (S_k^+, σ_L) の ergodic 測度である. この ergodic 測度による相対頻度は, $([0, 1], f, l)$ において次のようにして求められる相対頻度である.

$(0, 1_n, 0)$ の記号を流用して, $n+2$ 変数の関数として, 次のように約束する.

$$(0, 1_n, 0)(a_0, a_1, \dots, a_i, a_{n+1}) = \begin{cases} 1, & a_0 = 0, a_1 = \cdots = a_i = 1, a_{n+1} = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

次の極限を求めればよい.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k \frac{\sum_{i=0}^j (0, 1_n, 0)(f^i(x), f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n+1}(x))}{j}}{\sum_{n=1}^k n \cdot \frac{\sum_{i=0}^j (0, 1_n, 0)(f^i(x), f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n+1}(x))}{j}}$$

Ergodic 定理より,

$$\frac{\sum_{i=0}^j (0, 1_n, 0)(f^i(x), f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n+1}(x))}{j} \rightarrow E[(0, 1_n, 0)(\cdot, f^1(\cdot), \dots, f^{n+1}(\cdot))], \quad l - a.s.$$

である.

$$E[(0, 1_n, 0)(\cdot, f^1(\cdot), \dots, f^{n+1}(\cdot))] = \alpha_{k-n}$$

であるから, よって, 求める right spreading rate は, 次のようである.

$$\frac{\sum_{n=1}^k \alpha_n}{\sum_{n=1}^k (k-n+1) \cdot \alpha_n}.$$

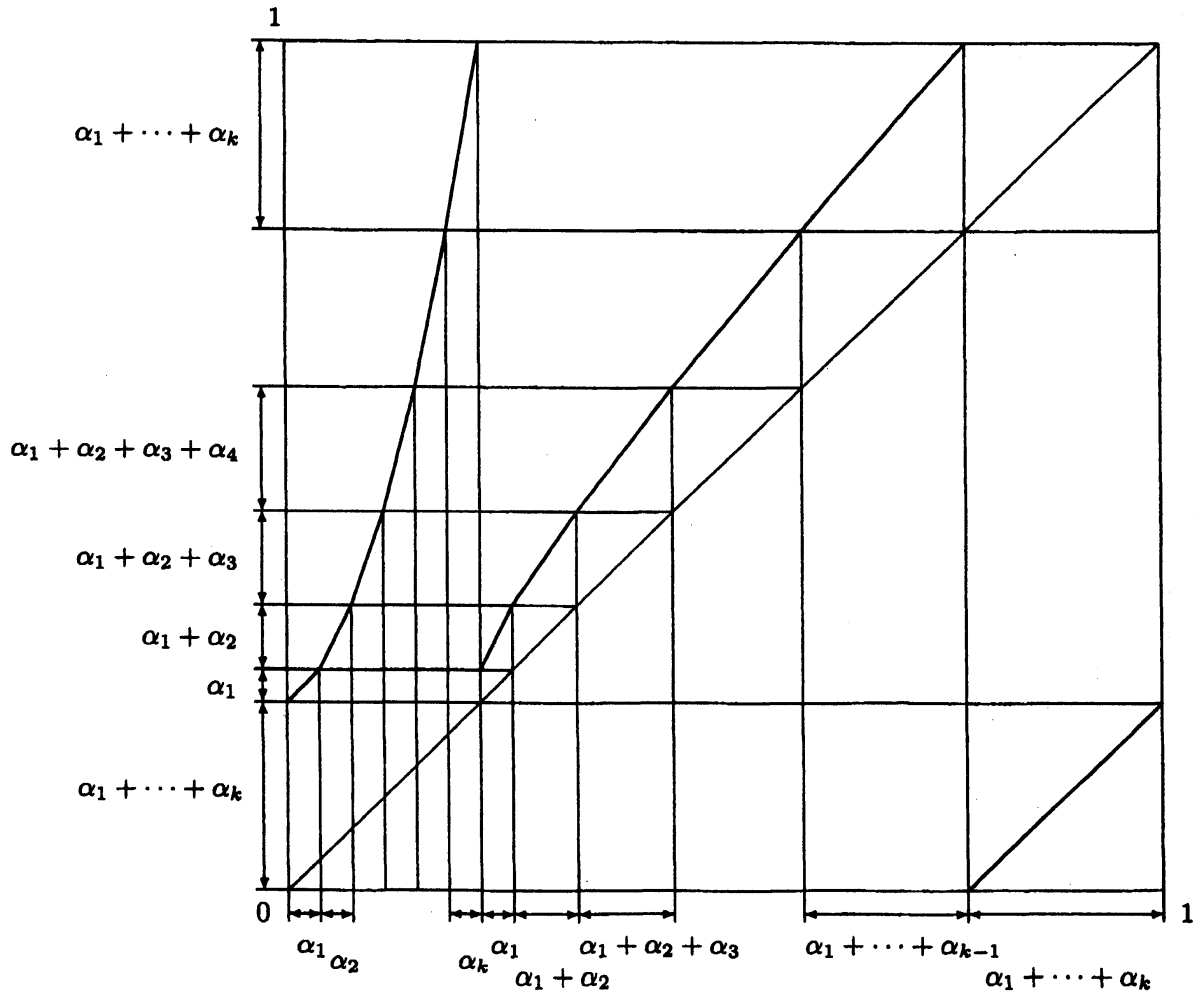
α_n は, 次の条件を満たす.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \alpha_j + \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

次の等号と不等号は条件より容易に確認できる.

$$\frac{1}{k} < \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i}{\sum_{i=1}^k (k-i+1) \cdot \alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i}{1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i} \leq 1.$$

従って, spreading rate について次の定理が成立する.



定理 4.1 ルール番号 168 の基本セルオートマトンにおいて, 0 以上 1 以下の任意の数を right spreading rate とする configuration が存在する.

5 Concluding Remarks

ルール番号 168 のセルオートマトンで定義される right spreading rate(Lyapunov exponent) が, 区間力学系である特定のパターンの相対頻度の期待値に等しいことがわかる. このことは, ルール番号 40 の場合と同様であり, 共に Wolfram class I に属する. ルール 40 のみであれば, 例外的な場合と考えることも出来るが, さらにルール 168 の例があることから, Lyapunov exponent が, セルオートマトンが生成する時空間パターンの複雑さを必ずしも反映しないことが分かる.

セルオートマトンが生成する時空間パターンの複雑さを捉えるためには, どのような量が有効であるのだろうか.

一方, ルール番号 40 と 168 については, 区間力学系と明確な対応がつく. このことがどの程度の一般性を持つかは今後の課題であるが, エントロピー等の量がどのような関係にあるのか興味ある問題が残されている.

References

- [1] G.Braga, G.Cattaneo, P.Flocchini and C.Quaranta Vogliotti, Pattern growth in elementary cellular automata, Theoretical Computer Science, **145**(1995), 1-26.
- [2] G. Cattaneo and L. Margara, Generalized sub-shifts in elementary cellular automata: the "strange case" of chaotic rule 180, Theoretical Computer Science, **201**(1998), 171-187.
- [3] G. Cattaneo, E.Formenti and L.Margara, Topological Definitions of Deterministic Chao, in Cellular Automata, eds. M Delorme and J. Mazoyer, Kluwer Academic Publishers(1999), 213-259.
- [4] M.Gardner, Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", Scientific American, **223**(1970), 120-123.
- [5] A. Ilachinski, Cellular Automata - A Discrete Universe, World Scientific, (2001).
- [6] C. G. Langton, STUDYING ARTIFICIAL LIFE WITH CELLULAR AUTOMATA, Physica **22D**(1986), 120-149.
- [7] C. G. Langton, Life at the Edge of Chaos, ARTIFICIAL LIFE II, PROCEEDINGS OF THE WORKSHOP ON ARTIFICIAL LIFE HELD FEBRUARY, 1990 IN SANTAFE, NEW MEXICO, edited by Christopher G.Langton, Charles Taylor, J.Doyne Farmer and Steen Rasmussen, Addison-Wesley Publishing Company, 41-91.
- [8] J. von Neumann, Theory of Self - Reproducing Automata, University of Illinois Press, Urbana and Chicago, (1966).
- [9] F. Ohi and Y. Takamatsu, Time-Space Pattern and Periodic Property of Elementary Cellular Automata - Sierpinski Gasket and Partially Sierpinski Gasket -, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **18**(2001), 59-73.
- [10] 大鏑 史男, 基本セルオートマトンが生成する時空間パターン - Sierpinski Gasket -, 京都大学数理解析研究所講義録 1306「不確実性の下での意志決定の数理」, 2003.2, 142-151.
- [11] F. Ohi and K. Mabuchi, Time-Space Pattern and Dynamics Determined by Elementary Cellular Automata, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **21**(2004), 1-23.
- [12] 大鏑史男, ルール番号 40 の基本セルオートマトンと確率測度, 数理解析研究所講義録 1559「RIMS 共同研究, 最適化問題における確率モデルの展開と応用」, 2007.6, pp122-130.

- [13] Fumio Ohi Chaotic Property of Elementary Cellular Automaton of Rule 40 in Wolfram Class I, Complex Systems, Vol.17(2007),295-308.
- [14] M. A. Shereshevsky, Lyapunov exponents for one-dimensional cellular Automata, J.Nonlinear Sci. **2**(1992), 1-8.
- [15] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Review of Modern Physics, **55**(1983), 601-644.
- [16] S. Wolfram, UNIVERSALITY AND COMPLEXITY IN CELLULAR AUTOMATA, Physica **10D**(1984),1-35.
- [17] S. Wolfram, A NEW KINDS OF SCIENCE, Wolfram Media, Inc., (2002).