

2

距離有界定理, 有限表現定理とスターハイト 1

豊橋技術科学大学 橋口政三郎

はじめに

本稿において, 次の4つの結果について述べる.

(1) 距離関数をもつ有限オートマトンが距離有界である
か否かを決定するアルゴリズムが存在する;

(2) 正規言語 R と正規言語の有限族 $\mathcal{C}$ に対して, R が
 $\mathcal{C}$ の上に有限表現をもつか否かを決定するアルゴリズムが存在
する;

(3) 正規言語 R に対して次の(i)~(iii)を満たす正規表
現 E が存在する: (i) E は R を表わす, (ii) E のスターハイ
トと R のスターハイトは等しい, (iii) E のスターハイト 0 の
任意の部分表現 E_0 に対して,

$$l(E_0) \leq (\#\Sigma)^{18n^4(h(R) \cdot 5n^2 + 2)}$$

が成立する, $n = |l(E_0)|$ は E_0 の長さを表わし, $A = \langle \Sigma, \alpha,$

$M, \{q_0, F\}$ は R を受理する既約オートマトン, Σ は有限ア

ルファベット, $\# \Sigma$ は Σ の元の個数, Q は状態の集合, n は Q の元の個数, $h(R)$ は R のスターハイトである;

(4) 正規言語のスターハイトが1か否かを決定するアルゴリズムが存在する.

本稿において, (1) と (2) の証明の概略を述べる. (3) は別論文 [5] において証明された. (4) は (2) と (3) の系として与えられる.

有限アルファベット Σ に対して, Σ^* は Σ の上のすべての語の集合を表わす. Σ^+ は長さ1以上の語の集合を表わす. ϵ は空語を表わす. ϕ は空集合を表わす. 語 $w \in \Sigma^*$ に対して $l(w)$ は w の長さを表わす. 有限集合 Q に対して, $\#Q$ は Q の元の個数を表わす.

1. 距離関数をもつ有限オートマトン

はじめに距離関数をもつ有限オートマトンの定義をよめる.

定義 1.1. 距離関数をもつ有限オートマトン (略してオートマトン) A は6組, $\langle \Sigma, Q, M, S, F, d \rangle$ で与えられる, 二重で Σ は有限入力アルファベット, Q 状態の有限集合, $M: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ 推移関数, $S, F \subseteq Q$ 初期状態と最終状態の集合, $d: Q \times \Sigma \times Q \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ 距離関数で d は次の条件を満たす: 任意の $(v, a, v') \in Q \times \Sigma \times Q$ に対し, もし $v' \in M(v, a)$ ならば $d(v, a, v') \in \{0, 1\}$ であ

り, $q' \notin M(q, a)$ ならば $d(q, a, q') = \infty$. ∞ は無限大を示す.

M は通常の方法で $2^Q \times \Sigma^*$, $2^Q \times 2^{\Sigma^*}$ へ拡張される (任意の $q \in Q$ に対して $M(q, \lambda) = \{q\}$). $R(A)$ は A によって受理される語の集合を示す, すなわち $R(A) = \{w \in \Sigma^* \mid M(s, w) \cap F \neq \emptyset\}$. d は $Q \times \Sigma^* \times Q \subset 2^Q \times \Sigma^* \times 2^Q$ へ次のように拡張される: (1) 任意の $q, q' \in Q$, $w \in \Sigma^*$ と $a \in \Sigma$ に対して, (1.1) $d(q, \lambda, q) = 0$, (1.2) $q' \notin M(q, w)$ ならば $d(q, w, q') = \infty$, (1.3) $q' \in M(q, wa)$ ならば, $d(q, wa, q') = \min \{d(q, w, q'') + d(q'', a, q') \mid q'' \in M(q, w) \text{ かつ } q' \in M(q'', a)\}$; (2) 任意の $t, t' \subseteq Q$ と $w \in \Sigma^*$ に対して $d(t, w, t') = \min \{d(q, w, q') \mid q \in t, q' \in t'\}$.

定義 1.2. D -オートマトン $A = \langle \Sigma, Q, M, s, F, d \rangle$ に対して, 次の (1) ~ (3) を定義する:

- (1) $D(A) = \sup \{d(s, w, F) \mid w \in R(A)\}$;
- (2) $D(A) < \infty$ のとき A は距離有界であるといわれる;
- (3) M_0 は $2^Q \times \Sigma^*$ から 2^Q への関数で, $t \subseteq Q$ と $w \in \Sigma^*$ に対して, $M_0(t, w) = \{q' \in Q \mid d(t, w, q') = 0\}$.

定義 1.3 全ての $q \in Q$ と $a \in \Sigma$ に対して, $\#M_0(q, a) \leq 1$ が成立するとき, A は 0-決定性であるといわれる.

補題 1.1. 任意の D -オートマトン $A = \langle \Sigma, Q, M, s, F, d \rangle$

が与えられたとき、次の (1) ~ (5) を満たす D -オートマトン $A' = \langle \Sigma, Q', M', S', F', d' \rangle$ を構成できる:

- (1) $\#S' = 1$;
- (2) A' は 0 -決定性である ;
- (3) $R(A') = R(A)$;
- (4) 任意の $w \in R(A)$ に対して, $d(S, w, F) = d(S', w, F')$;
- (5) $D(A') = D(A)$;
- (6) A' は距離有界である $\Leftrightarrow A$ は距離有界である .

以下において $A = \langle \Sigma, Q, M, S, F, d \rangle$ を任意の D -オートマトンとする. A が距離有界であるかを決定するためのアルゴリズムを求めよう. 補題 1.1 より A は 0 -決定性であり, かつ $\#S = 1$ と仮定してよい. $S = \{s\}$ とする.

定義 1.4. ある $x, y, z \in \Sigma^*$ に対して, $xyz \in R$ かつ $t = M(s, x)$ のとき, (t, y) を A に関する仕事という. $W(A)$ は A に関するすべての仕事の集合を表わす.

注意. すべての $w \in R(A)$ に対して, $(s, w) \in W(A)$ である. 我々は $d(s, w, F)$ のある上界を求めたい. ニヤを帰納的に行なうために, w を分解して, A に関する仕事 (t, y) のすべてを考えよう.

定義 1.5 任意の $\delta = (t, w) \in W(A)$ に対して, δ 主の (1) ~ (5) を定義する:

$$(1) \quad Z(\delta) = \{q \in t \mid M_0(q, w) \neq \emptyset\};$$

$$(2) \quad \beta(\delta) = \{t' \subseteq Q \mid \text{ある } x, y \in \Sigma^* \text{ に対し } w = xy \text{ かつ } t' = M(t, x) - M_0(Z(\delta), x) \neq \emptyset\};$$

$$(3) \quad I(\delta) = \#Q - \#M_0(Z(\delta), w);$$

$$(4) \quad P(\delta) = \{(q, q') \mid q \in t \text{ かつ } q' \in M(q, w)\};$$

$$(5) \quad e(\delta) = \{w' \in \Sigma^* \mid \text{任意の } q \in t \text{ に対し } M_0(q, w') = M_0(q, w) \text{ かつ } M(q, w') = M(q, w)\}.$$

定義1.6. M^{-1} は $\Sigma^* \times 2^Q$ から 2^Q への写像で, 任意の $w \in \Sigma^*$ と $t \subseteq Q$ に対し $M^{-1}(w, t) = \{q \in Q \mid M(q, w) \cap t \neq \emptyset\}$.

補題1.2. 任意の $\delta = (t, w) \in W(A)$ に対し,

$$(1) \quad 0 \leq I(\delta) \leq \#Q;$$

$$(2) \quad \text{任意の } (q, q') \in t \times M(t, w) - P(\delta) \text{ に対し } d(q, w, q') = \infty;$$

$$(3) \quad \text{任意の } w' \in e(\delta) \text{ に対し } I(\delta) = I(t, w').$$

任意の $w \in R(A)$ に対し, $d(S, w, F)$ の上界を求めるために, 上で定義した $I(\delta)$ に関する帰納法を用いる.

補題1.3. $\delta \in W(A)$ に対し, もし $I(\delta) = \min \{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ ならば, $\beta(\delta) = \{\emptyset\}$ である.

証明. $\delta = (t, w)$ とする. $I(\delta) = \min \{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ かつ $\beta(\delta) \neq \{\emptyset\}$ が成立すると仮定する. ある $x, y \in \Sigma^*$ に対し, $w = xy$ かつ $M(t, x) - M_0(Z(\delta), x) \neq \emptyset$ が成立する

$\delta' = (M(t, x), \lambda)$ とおく. 二のとき $\delta' \in W(A)$, $z(\delta) = M(t, x)$ かつ $I(\delta') = \#Q - \#M_0(z(\delta'), \lambda) = \#Q - \#M(t, x) < \#Q - \#M_0(z(\delta), x) \leq \#Q - \#M_0(z(\delta), w) = I(\delta)$.

したがって $I(\delta') < I(\delta)$ であり矛盾. (証明終)

次の補題は $I(\delta)$ に関する帰納法においてベースの役割をはたす.

補題 1.4. $\beta(\delta) = \{\phi\}$ を満たす $\delta = (t, w) \in W(A)$ と $(\varphi, \varphi') \in p(\delta)$ に対し, $d(\varphi, w, \varphi') \leq \#t - 1$.

証明 $\delta = (t, w)$ とし $\beta(\delta) = \{\phi\}$ とする. あるいは $(\varphi, \varphi') \in p(\delta)$ に対し $d(\varphi, w, \varphi') \geq \#t$ が成立すると仮定する. あるいは $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \in \Sigma^+$ と $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \in Q$ が存在して, $d(\varphi, w, \varphi') = m+1 \geq \#t$, $w = x_1 x_2 \dots x_{m+1}$, $d(\varphi, x_1, \varphi_1) = d(\varphi_1, x_2, \varphi_2) = \dots = d(\varphi_m, x_{m+1}, \varphi') = 1$ が成立する. 各 $i = 0, 1, \dots, m+1$ に対し, $\varphi(i)$ を次のように定義する: $\varphi(0) = \varphi$, といふ $i = 1, \dots, m+1$ に対しは, $\varphi(i) \in t$ は $M_0(\varphi(i), x_1 x_2 \dots x_i) = \varphi_i$ を満たす. $m+1 \geq \#t$ であるからある i, j ($0 \leq i < j \leq m+1$) に対し, $\varphi(i) = \varphi(j)$ が成立する. 二のとき A が 0-決定性なので, $d(\varphi_i, x_{i+1} \dots x_j, \varphi_j) = 0$ である. すると $d(\varphi, w, \varphi') < m+1$ となって矛盾 (証明終)

補題 1.5 A が距離有界ならば, $t = M(t, w)$ である $\delta =$

$(t, w) \in W(A)$ に対し $z(\delta) \neq \phi$ である。

証明. A が距離有界であり, $\delta = (t, w) \in W(A)$, $t = M(t, w)$ かつ $z(\delta) = \phi$ であると仮定する. 任意の $(v, v') \in P(\delta)$ に対し, $d(v, w, v') > 0$ であり, かつある $x, y \in \Sigma^*$ に対し $t = M(v, x)$ かつ $xwy \in P$ が成立する. $h = D(A) + 1$ とおき, $w' = xw^h y$ とおく. このとき $w' \in P(A)$ かつ $d(v, w', F) \geq h > D(A)$, これは矛盾. (証明終)

定義 1.7. $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対し, $o(i)$ を次のように帰納的に定義する, $n = \#Q$ である:

$$(1) \quad o(0) = n - 1;$$

$$(2) \quad i > 0 \text{ ならば } o(i) = (o(i-1) + n + 1)(n + 1)^{n+1} \cdot 2^{6n^2+1}$$

補題 1.6. $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対し

$$o(i) \leq n((n+1)^{3n} \cdot 2^{6n^2+1})^i.$$

2. 距離有界定理

距離有界定理 D -オートマトン $A = (\Sigma, Q, M, \{0\}, F)$, δ が距離有界であるための必要十分条件は,

$$D(A) \leq o(n) = n((n+1)^{3n} \cdot 2^{6n^2+1})^n$$

が成立する ことである, $n = \#Q$. A は D -決定性であり $n = \#Q$.

この定理は次のプロゴリズムから得られる.

定義 2.1. A を定理の D -オートマトンとする. $v, v' \in Q$ に対し, $R_0(v, v') = \{w \in \Sigma^* \mid d(v, w, v') = 0\}$ とおく.

$L(A)$ を次のように定義する:

$$L(A) = \{ w \in P \mid \text{ある } q \in F \text{ に対して } R_1 = R_0(\rho, q) \} \\ \cup \{ w \in P_1 \{a_1\} \cdot P_2 \{a_2\} \cdots \{a_m\} \cdot P_{m+1} \mid (1) m \leq O(n) \\ , (2) a_i \in \Sigma \ (i=1, \dots, m), (3) \text{ ある } q_{j1}, q_{j2} \in Q \ (j=1, \dots, \\ m+1) \text{ に対して, } q_{11} = \rho, q_{m+1,2} \in F, R_j = R_0(q_{j1}, \\ q_{j2} \ (j=1, \dots, m+1), \text{ かつ } (4) \ i=1, \dots, m \text{ に対して } d(\\ q_{i2}, a_i, q_{i+1,1}) = 2 \}.$$

注意. A が与えられたとき, 我々は $L(A)$ を求め, $R(A) = L(A)$ であるか決定できる. すなわち次のアルゴリズムを得る.

アルゴリズム 1. A を定理の D-オートマトンとする. とき A が距離有界であるための必要十分条件は, $R(A) = L(A)$ が成立することである.

距離有界定理を証明するために, 次の主補題を必要とする.

主補題. もし A が距離有界ならば, 任意の $\delta = (t, w) \in W(A)$ と整数 $k > O(n)$ に対して ある $w' \in e(\delta)$ と $p \in P(\delta)$ が存在して次の (1)~(3) が成立する:

$$(1) \ z(t, w') = 2(\delta);$$

$$(2) \text{ 任意の } (v, q') \in p \text{ に対して, } d(v, w, q'), \\ d(v, w', q') \leq O(I(\delta));$$

$$(3) \text{ 任意の } (v, q') \in P(\delta) - p \text{ に対して}$$

$$d(v, w', q') \geq k.$$

主補題を使って, 定理を次のように証明できる. 条件の十分性は明らかである. 必要性. A が距離有界であり, k と n を $k > D(A)$ かつ $k > O(n)$ を満たす整数とする. 任意の $w \in P(A)$ を考える. $\delta = (t, w) \in W(A)$ であり, 主補題によってある $w' \in e(\delta)$ と $p \leq p(\delta)$ が存在して, 主補題の (1) ~ (3) が成立する. $w' \in P(A)$ かつ $k > D(A)$ であるから, ある $(\tau, \tau') \in P$ に対して $\tau = t$, $\tau' \in F$, $d(\tau, w, \tau')$, $d(\tau, w', \tau') \leq O(I(\delta)) \leq O(n)$. 故に $D(A) \leq O(n)$ であり定理が成立する.

以下の二の節において, 主補題の証明の概略を述べる. 証明は $\tau \in \{I(\delta) \mid \delta \in W(A)\}$ に関する帰納法による.

定義 2.2. 任意の $w \in \Sigma^*$ に対して, $\text{Pre}(w)$ は w の prefixes の集合, すなわち $\text{Pre}(w) = \{x \in \Sigma^* \mid \text{ある } y \in \Sigma^* \text{ に対して } w = xy\}$. $\text{Suf}(w)$ は w の suffixes の集合, すなわち $\text{Suf}(w) = \{y \in \Sigma^* \mid \text{ある } x \in \Sigma^* \text{ に対して } w = xy\}$.

定義 2.3. $\delta = (t, w) \in W(A)$ とする. 任意の $x, z \in \Sigma^*$ と $y_1, \dots, y_\ell \in \Sigma^+$ に対して, $xy_1y_2 \dots y_\ell \in \text{Pre}(w)$, $\ell = 4(\#A)^2$ かつ次の (1) ~ (5) が成立するとき, δ は $(x, y_1, \dots, y_\ell, z)$ において複雑であるといわれる:

(1) 任意の $\tau \in t$ に対して, $M_0(\tau, x) = M_0(\tau, xy_1) = \dots = M_0(\tau, xy_1 \dots y_\ell)$, かつ $M(\tau, x) = M(\tau, xy_1) = \dots = M(\tau, xy_1 \dots y_\ell)$;

- (2) 任意の $g \in M(t, xz)$ に対して, $M^-(z, g) = M^-(y_1 z, g)$
 $= \dots = M^-(y_1 \dots y_\ell z, g)$;
 (3) $\# M_0(z(\delta), w) = \# M_0(z(\delta), x)$;
 (4) $M(t, x) - M_0(z(\delta), x) \neq \phi$;
 (5) 任意の $g, g' \in M(t, x) - M_0(z(\delta), x)$ と $i = 1, \dots, \ell$
 に対して, $d(g, y_i, g') > 0$.

δ はある $x, z \in \Sigma^*$ と $y_1, \dots, y_\ell \in \Sigma^+$ に対して, $(x, y_1, \dots, y_\ell, z)$ において複雑であるとき, 複雑であるといわれる。
 δ はどのような $x, z \in \Sigma^*$ と $y_1, \dots, y_\ell \in \Sigma^+$ に対しても複雑でないとき, 複雑でないといわれる。

補題 2.1. $\delta = (t, w) \in W(A)$, $v_0, x, y_1, \dots, y_\ell, z, v_1 \in \Sigma^*$,
 $v_0 x y_1 \dots y_\ell z v_1 \in \text{Pre}(w)$, k として $\ell = 4(\#A)^{\#A}$ とする。
 $\delta' = (M(t, v_0), x y_1 \dots y_\ell z v_1)$ とする。もし $I(\delta') = I(\delta)$ かつ
 δ' が $(x, y_1, \dots, y_\ell, z)$ で複雑ならば, δ は $(v_0 x, y_1, \dots, y_\ell, z)$ で複雑である。

定義 2.4. 任意の $\delta = (t, w) \in W(A)$ に対して, $V_0(\delta)$ と $V(\delta)$ を次のように定義する:

- (1) $V_0(\delta) = \{ (M_0(v_1, x), M(v_1, x), M_0(v_2, x), M(v_2, x), \dots, M_0(v_\ell, x), M(v_\ell, x), M^-(y, v_1'), M^-(y, v_2'), \dots, M^-(y, v_m')) \mid x, y \in \Sigma^*, w = xy, t = \{v_1, \dots, v_\ell\} \text{ かつ } M(t, w) = \{v_1', \dots, v_m'\} \}$;

(2) $V(\delta) = \{ (M(\varphi_1, x), M(\varphi_2, x), \dots, M(\varphi_\ell, x), M^{-1}(\varphi, \varphi'_1), \dots, M^{-1}(\varphi, \varphi'_m)) \mid x, \varphi \in \Sigma^*, w = x\varphi, t = \{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}, \text{ かつ } M(t, w) = \{\varphi'_1, \dots, \varphi'_m\} \}$.

補題 2.2. 任意の $\delta \in W(A)$ に対し, 次の (1), (2) が成立する, 二つとも $n = \#Q$:

$$(1) \#V_0(\delta) \leq (n+1)^n 4^{n^2};$$

$$(2) \#V(\delta) \leq 4n^2.$$

主補題の $i \in \{I(\delta) \mid \delta \in W(A)\}$ に関する帰納法による証明の概略を述べよう. $\delta = (t, w) \in W(A)$ とする.

ベース. $I(\delta) = \min \{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ とする. 補題 1.3 によつて $\beta(\delta) = \{\phi\}$ である. 二つとも $w' = w$, $p = p(\delta)$ とおく. 補題 1.4 より, 主補題の主張が成立することは明らかである.

帰納的段階. $I(\delta) > \min \{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ とする. 4つの場合を考へる. 以下において $n = \#Q$ とする.

場合 (1) $\beta(\delta) = \{\phi\}$, 二つとも主張はベースの場合と同様にして成立する.

場合 (2) $\beta(\delta) \neq \{\phi\}$ かつ $2(\delta) = \phi$. 二つとも $I(\delta) = n$ であり, $w \neq \lambda$ である. ある $t_1, \dots, t_\ell \subset Q$, $2 \leq \ell \leq 2^n - 1$, $x_i \in \Sigma^*$ ($i=1, \dots, \ell$) と $a_j \in \Sigma$ ($j=1, \dots, \ell-1$) が存在して, $t_1 = t$, $w = x_1 a_1 \dots a_{\ell-1} x_\ell$, $t_i = M(t_{i-1}, x_i)$ ($i=1, \dots, \ell$) かつ t_{j+1}

$= M(t_j, a_j) \ (j=1, \dots, l-1)$ が成立する. $i=1, \dots, l$ に対し, $\delta_i = (t_i, x_i)$ とおく. $\delta_i \in W(A)$ であり, 補題 1.5 より $Z(\delta_i) \neq \emptyset$. 従って $I(\delta_i) < I(\delta) = n$. 帰納法の仮定によってある $w_i \in \Sigma^*$ と $P \subseteq P(\delta_i)$ が存在して, 主補題の (1) ~ (3) が成立する. $w' = w_1' a_1 w_2' a_2 \dots a_{l-1} w_l'$, かつ $P = \{(\sigma, \sigma') \in P(\delta) \mid \text{ある } (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}) \in P_i \ (i=1, \dots, l) \text{ に対し (i) } \sigma_{i1} = \sigma, \text{ (ii) } \sigma_{i2} = \sigma' \text{ かつ (iii) } \sigma_{j+1} \in M(\sigma_{j2}, a_j) \ (j=1, \dots, l-1) \}$ とおく. $\sigma \in P \subseteq P(\delta), w' \in e(\delta)$ として $Z(t, w') = Z(\delta)$ である. さらに次の (1), (ii) が成立する:

- (i) 任意の $(\sigma, \sigma') \in P(\delta) - P$ に対して $d(\sigma, w', \sigma') \geq 2$;
- (ii) 任意の $(\sigma, \sigma') \in P$ に対して, $d(\sigma, w, \sigma'), d(\sigma, w', \sigma') \leq (o(m-1)+1) \cdot l \leq (o(m-1)+1)(2^n-1) \leq o(n)$.

場合 (3) $\beta(\delta) \neq \{\emptyset\}$, $Z(\delta) \neq \emptyset$ かつ δ は複雑でない.

$\beta(\delta) \neq \{\emptyset\}$ であるから $w \neq \lambda$. 次の (3.1), (3.2) が成立するような w の分解, $w = x_1 x_2 \dots x_l$ を考える:

$$(3.1) \ x_i \in \Sigma^+ \ (i=1, \dots, l);$$

$$(3.2) \ i=1, \dots, l \text{ に対し } M(t, x_1 \dots x_i) = M_0(Z(\delta), x_1 \dots x_i) \neq \emptyset \text{ かつ任意の } x_i' \in \text{Pre}(x_i) - \{\lambda, x_i\} \text{ に対し, } M(t, x_1 \dots x_{i-1} x_i') = M_0(Z(\delta), x_1 \dots x_{i-1} x_i').$$

次に, 次の (3.3), (3.4) を満たす w の分解, $w = y_1 v_1 y_2 v_2$

$\dots y_m v_m$, を考える.

(3.3) m 個の整数 $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq \ell$ が存在して,
 $j=1, \dots, m$ に対して, $y_j = x_{i_j} x_{i_{j+1}} \dots x_{i_{j+1}-2}$, $v_j = x_{i_{j+1}-1}$,
 $\therefore v_m = x_\ell$;

(3.4) $i=1, \dots, m$ に対して, $I(\tau_i) < I(\delta)$, $j=1, \dots, m-1$
 に対して $I(\delta_j) = I(\delta)$, $\therefore I(\delta_m) \leq I(\delta)$, $\therefore \tau_1 = (t, y_1)$,
 $\delta_1 = (t, y_1, v_1)$, $\tau_i = (M(t, y_1, v_1, \dots, y_{i-1}, v_{i-1}), y_i)$
 かつ $i=2, \dots, m$ に対して $\delta_i = (M(t, y_1, v_1, \dots, y_{i-1}, v_{i-1}), y_i, v_i)$.

帰納法の仮定と補題1.4 によって, 任意の $i=1, \dots, m$ に対
 して, ある $w_i' \in e(\delta_i)$ と $p_i \subset p(\delta)$ が存在して, 主補題の (1)
 $\sim$ (3) が成立し, かつ次の事が成立する ことがわかる: 任意
 の $(\gamma, \gamma') \in p_i$ に対して, $d(\gamma, y_i, v_i, \gamma')$, $d(\gamma, w_i', \gamma')$
 $\leq O(I(\delta)-1) + n+1$. δ は複雑でないから $m \leq 4n^2 (\# V_0(\delta))$
 $\leq (n+1)^n \cdot 2^{4n^2}$.

場合 (2) と同様にして, ある $w' \in e(\delta)$ と $p \subset p(\delta)$ が存在
 して主補題の (1) $\sim$ (3) と次の事が成立する ことがわかる: 任
 意の $(\gamma, \gamma') \in p$ に対して, $d(\gamma, w, \gamma')$, $d(\gamma, w', \gamma') \leq (O(I(\delta)-1) + n+1) \cdot m \leq (O(I(\delta)-1) + n+1) (n+1)^n \cdot 2^{4n^2} \leq O(I(\delta))$.

場合 (4) $\beta(\delta) \neq \{\phi\}$, $z(\delta) \neq \phi$, かつ δ は複雑である.

$x, y_1, \dots, y_\ell, z \in \Sigma^+$ を, $\lambda, \tau \in \Sigma^*$, $\ell = 4n^2$, $y_i \in \Sigma^+ (i=1, \dots, \ell)$,
 $x, y_1, \dots, y_\ell, z \in \text{Pre}(w)$, かつ δ が $(x, y_1, \dots, y_\ell, z)$ で複雑で

であるような, 最小の長さの語とする. $\delta_{10} = (t, x)$, $\delta_{11} = (M(t, x), y_1)$, $\delta_{ic} = (M(t, x, y_1, \dots, y_{i-1}), y_i)$ ($i=2, \dots, l$),
 として $\delta_{1, l+1} = (M(t, x, y_1, \dots, y_l), z)$ とおく. このとき $I(\delta_{ic}) < I(\delta)$ または $I(\delta_{ic}) = I(\delta)$ から δ_{ic} は複雑でないかの
 いづれかが成立する ($i=0, 1, \dots, l+1$). 帰納法の仮定と場合
 (1)~(3) によって, ある $w'_{ic} \in e(\delta_{ic})$ と $p_{ic} \subseteq p(\delta_{ic})$ が存在し
 て, 主張の (1)~(3) が成立し, また次の事が成立する: 任意
 の $(\vartheta, \vartheta') \in p_{ic}$ に対して, $d(\vartheta, w'_{ic}, \vartheta')$, $d(\vartheta, w'_{ic}, \vartheta') \leq$
 $(0(I(\delta)-1) + n+1)(n+1)^n \cdot 2^{4n^2}$, $\equiv \equiv \equiv w'_{10} = x$, $w'_{ic} = y_i$
 ($i=1, \dots, l$) として $w'_{1, l+1} = z$.

$t' = M(t, x, y_1, \dots, y_l, z)$ とおく. t, t' と w'_{ic} ($i=0, 1, \dots, l+1$) より,
 n の関数 $P^+ : t \times \{0, 1, \dots, l\} \rightarrow 2^\theta$ と $P^- :$
 $\{1, \dots, l+1\} \times t' \rightarrow 2^\theta$ を次のように定義する:

(4.1) 任意の $\vartheta \in t$ と $i \in \{0, 1, \dots, l\}$ に対して, $P^+(\vartheta, i) =$
 $\{\vartheta' \in \theta \mid d(\vartheta, w'_{10} w'_{11} \dots w'_{ic}, \vartheta') < \frac{1}{2}\}$;

(4.2) 任意の $\vartheta' \in t'$ と $i \in \{1, \dots, l+1\}$ に対して, $P^-(i, \vartheta') =$
 $\{\vartheta \in \theta \mid d(\vartheta, w'_{ic} w'_{i, i+1} \dots w'_{1, l+1}, \vartheta') < \frac{1}{2}\}$.

$l = 4n^2 \geq \#V(\delta)$ なるので, ある $i, j \in \{0, 1, \dots, l\}$ が存
 在して ($i < j$), 任意の $\vartheta \in t$ と $\vartheta' \in t'$ に対して, $P^-(\vartheta, i) = P^+$
 (ϑ, j) , から $P^-(i, t') = P^-(j, t')$ が成立する. $w'_{10} = w'_{10}$
 $w'_{11} \dots w'_{ic} (w'_{i, i+1} \dots w'_{ij})^{\frac{1}{2}} w'_{ij+1} \dots w'_{1, l+1}$ とおく. $\equiv \equiv \equiv$

$d(\varphi, w_1', \varphi') < \varepsilon$ であるような $(\varphi, \varphi') \in t \times t'$ を考へる。
 定義より任意の $\varphi_0, \varphi_1 \in M(t, X) - M_0(2(\delta), X)$ に対し
 ε , $d(\varphi_0, \gamma_\mu, \varphi_1) > 0$ ($\mu=1, \dots, l$) であり, 二れから
 $d(\varphi_0, w_{i\mu}', \varphi_1) > 0$ ($\mu=1, \dots, l$). A は 0-決定性なので,
 ε , 二れから任意の $(\varphi_0, \varphi_1) \in M(t, X) - M_0(2(\delta), X)$ に対し
 ε , $d(\varphi_0, w_{i1}', \dots, w_{il}', \varphi_1) > 0$. 二れらの事より, $d(\varphi, w_1', \varphi') < \varepsilon$ ならばある $\varphi_{01} \in M_0(2(\delta), X)$ に対し

$$d(\varphi, w_1', \varphi') \leq d(\varphi, w_{i0}', w_{i1}' \dots w_{il}', \varphi_{01}) + d(\varphi_{01}, w_{ij+1}' \dots w_{il+1}', \varphi') \leq (o(I(\delta)-1) + n+1) \cdot 2^{6n^2} (n+1)^n$$

が成立する。 w_1' の構成から, $d(\varphi, xy_1 \dots y_l z, \varphi') \leq (o(I(\delta)-1) + n+1) 2^{6n^2} (n+1)^n$ も成立する。

さて $w = xy_1 \dots y_l z w_2$ とし, $\delta_1 = (M(t, X \varepsilon), w_2)$ とおく。
 δ_1 が複雑であれば上と同様な手続きを適用する。二れを
 続け, w の分解 $w = w_1 w_2 \dots w_\mu w_0$ を得る。二二で $w_1 = xy_1 \dots y_l z$, 等々。二の事と上の事より, w の分解 $w = v_1 v_2 \dots v_{\mu+1}$, と $\varphi_{0i} \in M_0(2(\delta), v_1 v_2 \dots v_i)$ ($i=1, \dots, \mu$) と $v_j' \in \Sigma^*$ ($j=1, \dots, \mu+1$) が存在して, $d(\varphi, v_1' \dots v_{\mu+1}', \varphi') < \varepsilon$ を満たす任意の $(\varphi, \varphi') \in P(\delta)$ に対し, 次の (43) ~ (45) が成立する:

$$(43) \quad \varphi_{0i+1} \in M(\varphi_{0i}, v_{i+1}') \cap M(\varphi_{0i}, v_{i+1}') \quad (i=0, \dots, \mu+1), \quad \text{二二で } \varphi_{00} = \varphi \text{ かつ } \varphi_{0\mu+1} = \varphi';$$

$$(4.4) \quad v_1' v_2' \dots v_{n+1}' \in e(\delta) ;$$

$$(4.5) \quad d(v, v_1' v_2' \dots v_{n+1}', \delta'), d(v, v_1' v_2' \dots v_{n+1}', \delta') \\ \leq n \cdot 2 \cdot (O(I(\delta) - 1) + n + 1)(n + 1)^n \cdot 2^{6n^2} \leq O(I(\delta)).$$

$k = 2$ $w' = v_1' v_2' \dots v_{n+1}'$ かつ $p = \{(\delta, \delta') \in P(\delta) \mid d(v, w', \delta') < k\}$ とおけば, 主張の (1) ~ (3) が成立する.

これで主補題の略証を終える.

3. 有限表現定理

この節を通して, R を正規言語, $\mathcal{C}$ を正規言語の有限族とする. $\mathcal{C} = \{R_i \subseteq \Sigma^* \mid i = 1, \dots, m\}$ とする. $A = \langle \Sigma, Q, M, \{q_i\}, F \rangle$ を R を受理する既約オートマトン, $A_i = \langle \Sigma, Q_i, M_i, \{q_i\}, F_i \rangle$ を R_i を受理する既約オートマトンとする.

定義 3.1. $\mathcal{C}^*(\cdot, \cup)$ は次の (1) ~ (3) を満たす正規言語の最小の族である: (1) $\{\lambda\} \in \mathcal{C}^*(\cdot, \cup)$, (2) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*(\cdot, \cup)$, かつ (3) $\mathcal{C}^*(\cdot, \cup)$ はコンкатネーション ($\cdot$) と $\cup = \cup$ ($\cup$) の演算に関して閉じている.

例 3.1. $\mathcal{C} = \{\{a\} \mid a \in \Sigma\}$ ならば, $\mathcal{C}^*(\cdot, \cup) = \{F \subseteq \Sigma^* \mid F \text{ は有限集合}\}$ である.

定義 3.2. $R \in \mathcal{C}^*(\cdot, \cup)$ が成立すると主, R は $\mathcal{C}$ の上に有限表現を持つといわれる.

以下において, R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現を持つかを決定するアルゴリズムについて述べる. この問題を D-オートマ

トンの距離有界性の問題に帰着させる。

注意. ある正規言語 R_0 に対し, $\mathcal{C} = \{R_0\}$, $R = R_0^*$ のとき, $R \in \mathcal{C}$ であるかを決定する問題が可解であるかを問う問題を J.A. Brzozowski は 1967 年に提起した. この問題は Limitedness problem と呼ばれ, 1978 年に I. Simon と筆者により, 独立に肯定的に解かれた [6, 7].

R と $\mathcal{C}$ より次の D-オートマトン β を定義する.

定義 3.3. $\Delta = \{b_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ は新しい有限アルファベットであり, $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$ である. $W \in \Delta^+$ に対し, $\|W\|$ は言語 $R_{i_1} R_{i_2} \cdots R_{i_p} \subseteq \Sigma^*$ を表わす, 二で $W = b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_p}$ であり $i_j \in \{1, \dots, m\}$ ($j=1, \dots, p$). Λ は Δ の上の空語であり, $\|\Lambda\| = \{\Lambda\} \subseteq \Sigma^*$. $Z \subseteq \Delta^*$ に対し, $\|Z\| = \{w \in \Sigma^* \mid w \in \|W\| \text{ for some } W \in Z\}$.

定義 3.4. $\beta = \langle \Sigma, P, M^+, S, \{f\}, d \rangle$ は次の (1) ~ (4) を満たす D-オートマトンである:

(1) $P = \{f\} \cup \{(t, \vartheta) \mid \text{ある } W \in \Delta^* \text{ に対し, } t = M(\Lambda, \|W\|), \text{ かつ } \vartheta \in \Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_m\}$, 二で f は新しい記号で $f \notin 2^\Theta \times (\Theta_1 \cup \dots \cup \Theta_m)$;

(2) $\lambda \notin R$ のとき $S = \{(\{\Lambda\}, \rho_i) \mid i=1, \dots, m\}$, $\lambda \in R$ のとき $S = \{f\} \cup \{(\{\Lambda\}, \rho_i) \mid i=1, \dots, m\}$;

(3) 任意の $(t, \vartheta) \in P$ ($\vartheta \in \Theta_i$, $1 \leq i \leq m$) と $a \in \Sigma$ に対し

2, 次の (a) ~ (d) が成立する:

$$(a) M_i(t, a) = \phi \text{ ならば } M^+(t, t, a) = \phi;$$

$$(b) M_i(t, a) \neq \phi \text{ かつ } M_i(t, a) \notin F_i \text{ ならば, } M^+(t, t, a) = \{(t, M_i(t, a))\}, \text{ 且 } d((t, t), a, (t, M_i(t, a))) = 0;$$

$$(c) M_i(t, a) \in F_i \text{ から } M(t, F_i) - F \neq \phi \text{ ならば, } M^+(t, t, a) = \{(M(t, F_i), \sigma_j) \mid j=1, \dots, m\} \cup \{(t, M_i(t, a))\}, d((t, t), a, (M(t, F_i), \sigma_j)) = 1 (j=1, \dots, m), \text{ かつ } d((t, t), a, (t, M_i(t, a))) = 0;$$

$$(d) M_i(t, a) \in F_i \text{ から } M(t, F_i) \subset F \text{ ならば, } M^+(t, t, a) = \{f\} \cup \{(t, M_i(t, a))\} \cup \{(M(t, F_i), \sigma_j) \mid j=1, \dots, m\}, d((t, t), a, (t, M_i(t, a))) = 0, \text{ 且 } d((t, t), a, f) = d((t, t), a, (M(t, F_i), \sigma_j)) = 1 (j=1, \dots, m).$$

$$(4) \text{ 任意の } a \in \Sigma \text{ に対し, } M^+(f, a) = \phi.$$

補題 3.1. $R(\beta) \subset R$.

定理 3.1. R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現をもつための必要十分条件は, $R = R(\beta)$ でありかつ β が距離有界であることである.

証明. R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現をもつと仮定する. ある $w_i \in \Delta^* (i=1, \dots, l)$ に対し, $R = \|w_1\| \cup \dots \cup \|w_l\|$. この事から $D(\beta) \leq \max\{l(w_i) \mid i=1, \dots, l\}$. よって β は距離有界である. 又補題 3.1 と上の事から $R(\beta) = R$. 逆に $R(\beta) = R$ かつ β が距離有界であるとす. 任意の $w \in R$ に対し, ある $W \in \Delta^*$ が存在して, $\|w\| \subset R, l(w) \leq D(\beta)$ かつ $w \in$

$\|W\|$. $D(\beta) < \infty$ であるから, ある $w_i \in \Delta^*$ ($i=1, \dots, l$) に対し $R = \|w_1\| \cup \dots \cup \|w_l\|$. よって R は $\mathcal{C}$ の上に有限表現をもつ.

$R = R(\beta)$ と β の距離有界性を決定できるので, 定理 3.1 は R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現を持つが否かを決定するアルゴリズムを与える.

つぎの定理は距離有界定理と定理 3.1 より明らかである.

有限表現定理. R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現を持つための必要十分条件は, 長さ l 以下のある $w_1, w_2, \dots, w_l \in \Delta^*$ が存在して, $R = \|w_1\| \cup \dots \cup \|w_l\|$ が成立する ことである, 二二で $l = \mu(\mu+1)^{3\mu^2} \cdot 2^{\mu(6\mu^2+1)}$, $\mu = 2^n$, として $n = 2^{\#Q} (\#Q_1 + \dots + \#Q_m)$.

4. スターハイト $\perp$ の正規言語

定義 4.1. 正規言語 E に対し, $d_0(E)$ は E のスターハイト $\perp$ の部分表現の最大の長さを表わす.

定理 4.1. 正規言語 R に対し, ある正規表現 E が存在して, 次の (1)~(3) が成立する: (1) E は R を表わす, (2) E のスターハイトと R のスターハイトは等しい, (3) $d_0(E) \leq \# \Sigma^{18(n^2+3)^6} R(R)$, 二二で $A = \langle \Sigma, Q, M, S, F \rangle$ は R を受理する既約オートマトンで $n = \#Q$.

定義 4.2. R を正規言語, $A = \langle \Sigma, Q, M, S, F \rangle$ を R を受

理する既約オートマトンとする。また E を R を表わす正規表現とする。 $o(R) = 18(n^2 + 3)^6 h(E)$ とおく。 $n = \#Q$, $h(E)$ は E のスターハイトである。 $\mathcal{C}_R$ を次のように定義する: $\mathcal{C}_R = \{ \{w\} \mid w \in \Sigma^*, l(w) \leq o(R) \} \cup \{ (w_1 \cup \dots \cup w_p)^* \mid w_i \in \Sigma^*, l(w_i) \leq o(R) (i=1, \dots, p) \}$.

次の定理は定理 4.1 より明らかである。

定理 4.2. 正規言語 R のスターハイトが 1 であるための必要十分条件は R が $\mathcal{C}_R$ の上に有限表現をもつことである。

この定理と定理 3.1 によって, 正規言語のスターハイトが 1 かどうか決定可能である。

文 献

1. L.C. Eggan, Transition graphs and the star height of regular events, Michigan Math. J. 10 (1963) 385-397.
2. R.S. Cohen, Star height of certain families of regular events, J. Comput. System Sci 4 (1970) 281-297.
3. K. Hashiguchi and N. Honda, The star height of reset-free events and strictly locally testable events, Information and Control 40 (1979) 267-284.
4. K. Hashiguchi, Representation theorems on regular events, 未発表稿中.
5. K. Hashiguchi, Regular expressions with length-

bounded subexpressions of star height zero, 投稿中

6. I. Simon, Limited subsets of a free monoid, Proc. 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1978, 143-150.

7. K. Hashiguchi, A decision procedure for the order of regular events, Theoretical Computer Science 8 (1979) 69-72.