

Schrödinger 方程式の解の時間無限大での漸近展開

都立大 理教 村田 貴

Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = (-\Delta + V) u & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の解の $t \rightarrow \infty$ での漸近公式を与えるのが本稿の目的である。

仮定 (i) V は $L_2(\mathbb{R}^3)$ における閉作用素であって、次の条件を満たす: $D(V) \supset H^2$, $\text{Im}(Vu, u) \leq 0$ for any $u \in H^2$.
但し H^2 は 2 階のソボレフ空間。

(ii) $m' < 1$ と $s > 3$ が存在して次の条件を満たす:

V and V^* are compact operators in $B(m', s; 0, s+s)$ for any $s \in \mathbb{R}^1$. 但し $B(m', s; 0, s+s)$ は $H^{m', s}$ から $H^{0, s+s}$ の有界線形作用素全体のなす Banach 空間であり,
 $H^{0, s+s} \equiv \{f; \langle x \rangle^s \langle D \rangle^{s+s} f \in L_2(\mathbb{R}^3)\}$, $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

この仮定のもとで $L_2(\mathbb{R}^3)$ における極大消散作用素 $-iA$ は, $-iAu = i(-\Delta + V)u$, $u \in D(A) \equiv H^2$ で定義する。

定理 $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{p}{2} - 1$, $s > 2\sigma - 1$ とする。このとき

$$e^{-itA} = \sum_{\lambda} e^{-it\lambda} P_{\lambda} + \sum_{j=0}^{[\sigma-\frac{1}{2}]} t^{-(j+\frac{1}{2})} C_j + o(t^{-\sigma})$$

as $t \rightarrow \infty$ in $B(0, s; 0, -s)$.

但し $b < 0$ のとき $\sum_{j=0}^b \dots = 0$ とする。ここで λ は A の実固有値, P_{λ} は λ に付随する直交射影作用素, C_j は以下の様にして決められる退化作用素である。

$$C_0 = i(\pi i)^{-\frac{1}{2}} (Q_0 - P_0 V F_1 V P_0)$$

$$Q_0 = \begin{cases} \langle \cdot, \psi_* \rangle \psi, & \text{共鳴状態 } \psi, \psi_* \text{ が存在するとき} \\ 0, & \text{存在しないとき} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi, \psi_* \in \bigcap_{s < -1/2} H^{2,s}, \quad A\psi = A^*\psi_* = 0 \\ \int V\psi \, dx \cdot \overline{\int V^*\psi_* \, dx} = -4\pi i \end{array} \right)$$

$$F_1 g(x) = \frac{i^3}{4\pi 3!} \int |x-y|^2 g(y) \, dy$$

$$C_j = \pi^{-1} (-i)^{j-\frac{1}{2}} \Gamma(j+\frac{1}{2}) B_{2j-1}, \quad j \geq 1$$

$\Gamma(z)$ はガンマ関数, B_{2j-1} は $R(z) \equiv (A-z)^{-1}$ の $z \rightarrow 0$ での形式的級数展開の $z^{j-1/2}$ の係数。

$$R(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \left[-S(z)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{\frac{1}{2}+k} F_k V + \sum_{k=2}^{\infty} z^k G_k V \right) \right]^j \\ \times S(z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{\frac{1}{2}+k} F_k + z^k G_k \right)$$

$$F_k h(x) = \int \frac{i^{2k+1} |x-y|^{2k}}{4\pi (2k+1)!} h(y) dy$$

$$G_k h(x) = \int \frac{i^{2k} |x-y|^{2k-1}}{4\pi (2k)!} h(y) dy$$

$$S(z)^{-1} = z^{-1} P_0 V + z^{-\frac{1}{2}} Q_0 V + K_0$$

$$- \left[1 + z^{\frac{1}{2}} (K_0 F_0 V + Q_0 V G_1 V) + z K_0 G_1 V \right]^{-1}$$

$$\times \left[z^{\frac{1}{2}} (K_0 F_0 V K_0 + Q_0 V G_1 V K_0 + K_0 G_1 V Q_0 V) \right.$$

$$\left. + z K_0 G_1 V K_0 \right]$$

$$\begin{cases} (1 + G_0 V) K_0 + F_0 V Q_0 V + G_1 V P_0 V = 1 \\ K_0 (1 + G_0 V) + Q_0 V F_0 V + P_0 V G_1 V = 1 \end{cases}$$

$$\text{in } H^{2,-s}, \quad \frac{5}{2} < s < \rho - \frac{5}{2}.$$

証明の概略

(1) $\rho > 5$ のとき。

(I) $R(z)$ の $\text{Im } z \geq 0$, $z \rightarrow 0$ での $B(0, s; 2, -s)$ にあ

ける漸近公式を以下の手順で求める。

$$(1) \quad R_0(z) \equiv (-\Delta - z)^{-1} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (z^{\frac{1}{2}+k} F_k + z^k G_k)$$

$$(2) \quad 1 + R_0(z)V = 1 + G_0V + z^{\frac{1}{2}}F_0V + zG_1V + o(z) \\ \equiv S(z) + \tilde{R}_0(z)$$

と分解して, $S(z)^{-1}$ を求める。その際, 評価

$$\|R(z)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 1/\operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

が基本的級定として用いられる。

$$(3) \quad (1 + R_0(z)V)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[-S(z)^{-1} \tilde{R}_0(z)V \right]^j S(z)^{-1}.$$

$S(z)^{-1} = O(z^{-1})$ 故に級数は収束する。

$$(4) \quad R(z) = (1 + R_0(z)V)^{-1} R_0(z).$$

(II) $\mathbb{R}^1 \setminus (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, z の $R(\lambda + i0)$ の性質を調べる。

$$(III) \quad e^{-itA} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-it\lambda} R(\lambda + i0) d\lambda.$$

(IV) $J \leq 5$ のとき。

$$N \gg 1 \text{ として, } A_N = A_0 + \chi_N V \chi_N,$$

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq N+1 \\ 0, & |x| \leq N \end{cases}$$

と置く。 $(A_N - z)^{-1}$ の $z \rightarrow 0$ での漸近公式を $R_0(z)$

と類似の形で求め, これを (1) における $R_0(z)$ とみなして (1) と同じ計算をする。最後に得られた公式のなかの助変数 $N \rightarrow \infty$ とする。

注意

1° e^{-itA} が t について R^1 で可積分になるための必要かつ十分条件は, $P_0 = Q_0 = 0$ である。

2° $L_2(R^n)$, $n \neq 3$, における作用素 $A = -\Delta + V$ に対しては

$$e^{-itA} = \begin{cases} t^{2-\frac{n}{2}} C + \dots, & n \geq 5 \\ t^{-\frac{1}{2}} C + \dots, & n = 1 \\ (\log t)^{-1} C + \dots, & n = 2, 4. \end{cases}$$

3° m 階楕円型作用素 $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha = p(D) + \sum_{|\alpha| \leq m} q_\alpha(x) D^\alpha$ に対しては, (1)~(4) のもとで類似公式が成立。

(1) $q_\alpha(x)$ に対する $|x| \rightarrow \infty$ での減衰条件。

(2) $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ は Hamiltonian とする古典軌道に対する nontrapping 条件。

(4) $\det [\partial_j \partial_k p(z)] \neq 0$ on $\{z; \nabla p(z) = 0\}$ 。

4° ここで使われた方法で放物型, 双曲型方程式も扱える。

参考文献

- S. Steinberg, Local time decay for solutions of the Schrödinger equation and the wave equation, Arch. Rational Mech. Analysis, 54 (1974).
- M. Murata, Rate of decay of local energy and spectral properties of elliptic operators, Japanese J. Math., 6 (1980).
- A. Jensen & T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, Duke Math. J., 46 (1979).
- A. Jensen, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions. Results in $L_2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 5$; Results in $L_2(\mathbb{R}^4)$, Duke Math. J., 47 (1980); to appear.
- M. Murata, Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations, to appear.
- (本稿はこの論文にもとづいている.)