

単調正規ファクターをもつ積空間 における正規被覆とその正規性

矢島 幸信 (YUKINOBU YAJIMA)
神奈川大学 (KANAGAWA UNIVERSITY)

1. はじめに

本稿の目的は、積空間 $X \times Y$ において、次の 2 つの結果を述べることである。

- (1) X が単調正規空間であり、 $Y = A$ が順序数空間の部分空間であるとき、積空間 $X \times A$ 上の正規被覆を自然な良い形で特徴付ける。
- (2) X が単調正規空間であり、 $Y = C$ がコンパクト空間であるとき、積空間 $X \times C$ の正規性に関して意外な結果を導く。

以下、すべての空間をハウスドルフ空間とする。

2. 一般の空間上の正規被覆

空間 X の開被覆 $\mathcal{O}$ が正規被覆であるとは、ある開被覆の列 $\{\mathcal{U}_n\}$ が存在して、 $\mathcal{U}_n$ が $\mathcal{U}_{n-1}$ の星型細分（即ち、 $\{\text{St}(U, \mathcal{U}_n) : U \in \mathcal{U}_n\}$ が $\mathcal{U}_{n-1}$ の細分）となっているとき。ただし、 $\mathcal{U}_0 = \mathcal{O}$ とする。

正規被覆の重要性は、次の定理から分かる。

定理 2.1 (Stone [15], 1948). 空間 X がパラコンパクトであるための必要十分条件は、 X の任意の開被覆が正規被覆となることである。

X を空間とする。 X の部分集合 U がコゼロ集合であるとは、ある連続関数 $f : X \rightarrow [0, 1]$ が存在して、 $U = \{x \in X : f(x) > 0\}$ と表されるとき。また、 X の開被覆 $\mathcal{U}$ の各メンバーがコゼロ集合のとき、 $\mathcal{U}$ を X のコゼロ被覆という。一方、 Z が X のゼロ集合であるとは、その補集合 $X \setminus Z$ がコゼロ集合となるとき。

空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、 X の開被覆 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{U}$ の縮小細分であるとは、 $\mathcal{F} = \{F(U) : U \in \mathcal{U}\}$ と表され、各 $F(U)$ が U に含まれるとき。

位相空間の正規被覆は、最初に述べたように星型細分の列により定義されることが多い。しかし、上記の表記を用いた次の特性化定理を、最初の定義の代わりに考えた方が分かりやすいと思われる。

定理 2.2 (Stone-Michael-Morita, 1948–64). X を空間とし、 $\mathcal{O}$ をその開被覆とする。このとき、次は同値。

- (a) $\mathcal{O}$ は正規被覆である。
- (b) $\mathcal{O}$ は σ -局所有限なコゼロ細分をもつ。
- (c) $\mathcal{O}$ は σ -局所疎なコゼロ細分をもつ。
- (d) $\mathcal{O}$ は局所有限なコゼロ細分をもつ。
- (e) $\mathcal{O}$ は局所有限かつ σ -局所疎なコゼロ細分をもつ。
- (f) $\mathcal{O}$ は局所有限かつ σ -局所疎なコゼロ細分で、ゼロ集合からなる縮小細分をもつ。

これはよく知られている定理であるが、例えば論文 [10, 11] にまとめて述べられている。

3. 長方形的積空間

$X \times Y$ を積空間とする。 $X \times Y$ の部分集合で $U \times V$ の形のものを**長方形**という。特に、 U と V がそれぞれ X と Y のコゼロ集合（開集合）のとき、 $U \times V$ を $X \times Y$ の**コゼロ長方形**（**開長方形**）という。また、 $X \times Y$ の被覆 $\mathcal{U}$ の各メンバーが長方形のとき、 $\mathcal{U}$ を**長方形的**という。

定義 ([13]). 積空間 $X \times Y$ が**長方的**であるとは、 $X \times Y$ の任意の有限コゼロ被覆が、ある σ -局所有限な長方的コゼロ細分をもつとき。

この長方形的積空間の概念は、次の次元論における被覆次元の積定理を証明するために導入された。

定理 3.1 (Pasynkov [13], 1975). X, Y を完全正則空間とする。もし積空間 $X \times Y$ が長方形的ならば、不等式 $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$ が成り立つ。

長方的積空間はいくつかの典型的な積空間を含むため、この定理はそれまでの多くの次元論の積定理を統一した意味において、画期的な結果であるといえる。しかし、ここでは長方的積空間を次元論の立場でなく、積空間の被覆性の立場から議論

することにする。そのために、先ずは簡単に示すことができる積空間の長方形性と同値な条件を述べておく。

命題 3.2. 積空間 $X \times Y$ に対して、次は同値。

- (a) $X \times Y$ は長方形的である。
- (b) $X \times Y$ の任意の 2 つのコゼロ集合からなる被覆は、ある σ -局所有限な長方形的コゼロ細分をもつ。
- (c) $X \times Y$ の任意の正規被覆は、ある σ -局所有限な長方形的コゼロ細分をもつ。
- (d) $X \times Y$ の任意のコゼロ集合は、コゼロ長方形からなる σ -局所有限な族の和として表すことができる。

定理 2.2 と命題 3.2 から次の問題が自然に生じる。

問題. どのような積空間に対して、その正規被覆を定理 2.2 と同類の形で特徴付けできるか？

4. 順序数空間をファクターにもつ積空間上の正規被覆

順序数 λ に対して、集合 $\lambda = [0, \lambda)$ に通常順序位相を導入して、 λ を空間と見なすことができる。これを順序数空間という。ここでは、上記の問題を順序数空間の部分空間をファクターにもつ積空間について考察する。

先ずは、他方のファクター X がパラコンパクトの場合を考えると、次の結果を得る。証明はそれほど難しくはない。

定理 4.1. X をパラコンパクト空間とし、 A を順序数空間の部分空間とする。 $\mathcal{O}$ をその積空間 $X \times A$ の長方形的な開被覆とする。このとき、次は同値。

- (a) $\mathcal{O}$ は正規被覆である。
- (b) 任意の $x \in X$ に対して、 $\mathcal{O} \upharpoonright \{x\} \times A$ は $\{x\} \times A$ の正規被覆である。
- (c) 任意の $x \in X$ に対して、 $\mathcal{O} \upharpoonright \{x\} \times A$ はある点有限な開細分をもつ。
- (d) $\mathcal{O}$ はある局所有限な長方形の開細分をもつ。
- (e) $\mathcal{O}$ はある局所有限かつ σ -疎な長方形の開細分をもち、さらにそれは長方形的縮小細分をもつ。

次に、順序数空間の部分空間による積空間の場合を考える。

定理 4.2 (家本-矢島 [7], 2007). A, B を順序数空間の任意の部分空間とする。このとき、積空間 $A \times B$ が長方形的であるための必要十分条件は、それが可算パラコンパクトになることである。

この結果は、このタイプの積空間 $A \times B$ の正規被覆を考察する価値があることを示唆している。実際、この種の正規被覆は次のようにかなり具体的に表現されることが分かる。

定理 4.3. A, B をある順序数空間の任意の部分空間とする。 $\mathcal{O}$ を積空間 $A \times B$ の長方形の開被覆とする。このとき、次は同値。

- (a) $\mathcal{O}$ は正規被覆である。
- (b) $\mathcal{O}$ はある点有限な開細分をもつ。
- (c) $\mathcal{O}$ はある疎な長方的開（かつ閉）細分をもつ。

注意 4.4. 一般に「族正規空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ がある点有限開被覆をもつならば、 $\mathcal{U}$ は正規被覆となる」が成り立つ ([9, 12] を参照)。

5. 単調正規空間と順序数空間による積空間上の正規被覆

定理 4.2 と定理 4.3 から分かるように、積空間においてそのファクターが順序数空間の部分空間である場合は、かなり特殊な状況を呈するとも言える。そこで、順序数空間の部分空間のクラスを含むもっと一般的な空間のクラスを考えよう。

定義 ([2]). 空間 X が**単調正規**であるとは、任意の素である閉集合の組 (F, K) に対して、ある開集合 $G(F, K)$ が対応しており、次の条件を満たす：

- (1) $F \subset G(F, K) \subset \overline{G(F, K)} \subset X \setminus K$,
- (2) もし (F', K') がほかの素である閉集合の組で $F \subset F'$ かつ $K \supset K'$ となるならば、 $G(F, K) \subset G(F', K')$ が成り立つ。

単調正規空間は、 M_3 -空間の性質の一部を取り出して、その一般化として導入された概念であるが、さらに次のような関係にもなっている。

順序数の部分空間 $\implies$ GO-空間 $\implies$ 単調正規 $\implies$ 族正規 $\implies$ 正規

単調正規空間の研究は、次の画期的な結果によって一気に進歩したと言える。

定理 5.1 (Balogh-Rudin [1], 1992). X を単調正規空間とする。このとき、 X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、 $\mathcal{U}$ のある σ -素な開集合による部分的細分 $\mathcal{V}$ と、ある疎な閉集合による族 $\mathcal{D}$ で、次の条件を満たすものが存在する；

- (i) 各 $D \in \mathcal{D}$ は、ある正則非可算基数 κ_D の定常部分集合と同相であり、
- (ii) $X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{D}$.

定理 4.3 と定理 5.1 を利用して、我々は前半の目的とする次の定理を証明することができる。ここまで至る証明は、定理 4.3 の証明も含めるとかなり長い。これが積空間の正規被覆に関する定理 2.2 の類似と呼べる結果である。

定理 5.2. X を単調正規空間とし、 A をある順序数空間の部分空間とする。 $\mathcal{O}$ を積空間 $X \times A$ の長形的開被覆とする。このとき、次は同値。

- (a) $\mathcal{O}$ は正規被覆である。
- (b) $\mathcal{O}$ はある点有限な開細分をもつ。
- (c) $\mathcal{O}$ はある点有限な長形的開細分をもつ。
- (d) $\mathcal{O}$ はある局所有限な長形的コゼロ細分をもつ。
- (e) $\mathcal{O}$ はある局所有限かつ σ -疎な長形的開細分をもち、さらにそれは長形的縮小細分をもつ。

6. 空間の被覆性の積空間による特徴付け

完全正則空間 X に対して、 βX は Stone-Čech のコンパクト化を表す。

空間の被覆性として最も代表的なパラコンパクト性を、積空間の正規性で特徴付けた次の玉野の定理はよく知られている。

定理 6.1 (玉野 [16], 1960). 完全正則空間 X に対して、次は同値。

- (a) X はパラコンパクトである。
- (b) 積空間 $X \times \beta X$ は正規である。
- (c) X のあるコンパクト化 αX に対して、積空間 $X \times \alpha X$ は正規である。

κ を無限基数とする。基数は順序数だから、 $\kappa + 1 = [0, \kappa]$ を順序数空間とみなすとき、コンパクト空間となる。 2^κ は 2 点疎空間 $\{0, 1\}$ の κ 個からなるコピーによる積空間を表す。

その後、これらを用いて玉野の定理の類似の結果として、次の定理が得られた。

定理 6.2 (森田 [10], Kunen [8], 1962). 空間 X に対して, 次は同値。ただし, $\kappa = L(X)$ とする。

- (a) X はパラコンパクトである。
- (b) 積空間 $X \times (\kappa + 1)$ は正規である。
- (c) 積空間 $X \times 2^\kappa$ は正規である。

一般パラコンパクト空間として, いくつかの重要な空間のクラスがあるが, ここではあまり範囲を広げずにメタコンパクト性のみに言及する。

空間 X がメタコンパクトとは, X の任意の開被覆が点有限な開細分をもつとき。空間 X がオーソコンパクトとは, X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ がある開細分 $\mathcal{V}$ で, 任意の $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ に対して, $\bigcap \mathcal{W}$ が開集合になるものをもつとき。

これらの性質の関係は, 次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} \text{パラコンパクト} & \implies & \text{正規} \\ \downarrow & & \\ \text{メタコンパクト} & \implies & \text{オーソコンパクト} \end{array}$$

メタコンパクト性とオーソコンパクト性が, パラコンパクト性と正規性にそれぞれ対応して, 玉野の定理の類似がメタコンパクト性についても成り立つことが, Junnila によって証明された。

定理 6.3 (Junnila [3]), 1979). 完全正則空間 X に対して, 次は同値。

- (a) X はメタコンパクトである。
- (b) 積空間 $X \times \beta X$ はオーソコンパクトである。
- (c) X のあるコンパクト化 αX に対して, 積空間 $X \times \alpha X$ はオーソコンパクトである。

その後しばらくして, メタコンパクト性に関する定理 6.2 の類似も成り立つことが証明された。

定理 6.4 (Junnila-矢島 [4], Scott [15], 1998). 空間 X に対して, 次は同値。ただし, $\kappa = L(X)$ とする。

- (a) X はメタコンパクトである。
- (b) 積空間 $X \times (\kappa + 1)$ はオーソコンパクトである。

(c) 積空間 $X \times 2^\kappa$ はオーソコンパクトである。

空間 X に対して、 βX , $\kappa+1$, 2^κ などには十分に大きいコンパクト空間と考えることができる。そうすると上の関係図から、次のようなことが自然に予想できる。

予想. 空間 X と十分大きなコンパクト空間 C に対して、その積空間 $X \times C$ が正規ならば、それはオーソコンパクトなりそうである。

7. 予想外の結果

順序数の部分空間による積空間における正規性とオーソコンパクト性は、次で分かるように強弱関係はなくなってしまう。

定理 7.1 (家本-矢島 [5]). A と B を順序数空間の任意の部分空間とする。このとき、積空間 $A \times B$ が正規であるための必要十分条件は、それがオーソコンパクトとなることである。

ところが、パラコンパクト空間と順序数の部分空間による積空間くらいになると、さらに状況は一変する。すなわち、次のようにこの積空間のもとでは、正規性とオーソコンパクト性の立場は逆転するのである。

定理 7.2 (家本-矢島 [6, 7]). X をパラコンパクト空間、 A を順序数空間の任意の部分空間とする。もし積空間 $X \times A$ がオーソコンパクトならば、それは正規となる。

以上の2つの結果から、順序数空間の部分空間をファクターにもつ積空間は、上記の予想の立場から見てもかなり特殊な世界であるという印象を与える。

我々は上の「予想」の状況から見たとき、次の予想外の結果を得た。つまり、これは定理 7.2 は特異な状況ではなく、むしろ通常の状態であることを示している。なぜなら、積空間における一方のファクターである単調正規空間は比較的広い空間のクラスであり、他方のファクターであるコンパクト空間にはいかなる条件もついていないからである。

定理 7.3. X を単調正規空間、 C をコンパクト空間とする。もし積空間 $X \times C$ がオーソコンパクトならば、それは正規となる。

この証明においても、定理 5.1 は大きな役割を担うことになる。

REFERENCES

- [1] Z. Balogh and M. E. Rudin, *Monotone Normality*, Topology and Appl. **47** (1992), 115–127.
- [2] R. W. Heath, D. Lutzer and P. Zenor, *Monotonically normal spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 481–493.
- [3] H. J. K. Junnila, *Metacompactness, paracompactness and interior-preserving open covers*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 373–385.
- [4] H. J. K. Junnila and Y. Yajima, *Characterizations of submetacompactness*, Topology and Appl. **82** (1998), 227–238.
- [5] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness in products*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 407–422.
- [6] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness and normality of products with a cardinal factor*, Topology Appl. **49** (1993), 141–148.
- [7] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Topology Appl. **154** (2007), 758–770.
- [8] K. Kunen, unpublished paper.
- [9] E. Michael, *Point-finite and locally finite covers*, Canad. J. Math. **7** (1955), 275–279.
- [10] K. Morita, *Paracompactness and product spaces*, Fund. Math. **50** (1962), 223–236.
- [11] K. Morita, *Products of normal spaces with metric spaces*, Math. Ann. **154** (1964), 365–382.
- [12] K. Nagami, *Paracompactness and strong screenability*, Nagoya. Math. J. **8** (1955), 83–88.
- [13] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.
- [14] B. M. Scott, *Toward a product theory of orthocompactness*, Studies in Topology (N.M.Stavrakas and K.R.Allen eds) Academic Press, New York 517–537 (1975).
- [15] A. H. Stone, *paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977–982.
- [16] H. Tamano, *On paracompactness*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1043–1047.