

Decomposable な algebraic 3-knot の存在

東大理 佐伯 修 (Osamu Saeki)

§1. Introduction

f を $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点 $\vec{0}$ の近傍で定義された正則関数で、次の性質 (*1) ~ (*3) を満たすものとする。

(*1) $f(\vec{0}) = 0$

(*2) f は $\vec{0}$ を isolated critical point に持つ

(*3) $n=1$ の時は、 f は $\vec{0}$ で locally irreducible

この時、 $K_f := f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ は S_ε^{2n+1} の smooth closed connected $(2n-1)$ -submanifold になる ([11])。ここで、 $S_\varepsilon^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \|z\| = \varepsilon\}$ であり、 $\varepsilon > 0$ は十分小さいものとする。

この時、 K_f の S_ε^{2n+1} での isotopy class を f に付随した algebraic knot という。特に K_f の次元を明記したい時には、algebraic $(2n-1)$ -knot と呼ぶ。

一般に、 S_ε^{2n+1} の smooth closed connected $(2n-1)$ -submanifold の isotopy class を $(2n-1)$ -knot と呼ぶ。knot が decomposable (分解可能) とは、2つの non-trivial knots の

connected sum に isotopic の時をいう。ここで trivial knot とは、 S^{2n+1} に standard に embed された S^{2n-1} の isotopy class のこととする。また、decomposable でない knot のことを prime という。

S^3 内の knot の場合 (すなわち $n=1$ の時) は、algebraic knot は常に prime であることが古くから知られている。そこで次のような問題が考えられる。

問題 ([3],[4]) algebraic knot は prime か?

この問題に対する答は、 $n \geq 3$ の時は No であることがわかっている。実際、次が成り立つ。

定理 1 ([10]) g を $\mathbb{C}^2$ の $\bar{0}$ の近傍で定義された正則関数で、(*1) ~ (*3) を満たし、かつ $g=0$ の Puiseux 展開は特性対を 2 つ以上持つものとする。さらに h を $\mathbb{C}^{n-1}$ の $\bar{0}$ の近傍で定義された、(*1), (*2) を満たす正則関数とする。この時 $n \geq 3$ ならば、 $f(z_1, \dots, z_{n+1}) = g(z_1, z_2) + h(z_3, \dots, z_{n+1})$ により定義される正則関数 f に付随した algebraic $(2n-1)$ -knot は decomposable である。

(Puisseux 展開については、たとえば [1] 参照。)

例 1 $g_0(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$ とする。

$g_0 = 0$ を Puisseux 展開すると、 $y = x^{3/2} + x^{7/4}$ となり、その特性対の数は 2 となる。よって g_0 は定理 1 の仮定を満たし、実際に decomposable な algebraic $(2n-1)$ -knot ($n \geq 3$) が存在することがわかる。

今回の我々の結果は、 $n=2$ の時にも同様のことが成り立つことを主張するものである。

定理 2 g を定理 1 の仮定を満たす正則関数とし、

$f(x, y, z) = g(x, y) + z^r$ (r は 2 以上の整数) で正則関数 f を定義する。この時もし、 f に付随した algebraic 3-knot (S^5, K_f) において、 K_f が $\mathbb{Z}$ -homology 3-sphere ならば、 (S^5, K_f) は decomposable である。

例 2 例 1 における g_0 を考えると、 $\text{g.c.d.}(r, 78) = 1$

ならば、 K_f が homology 3-sphere となることがわかる。したがって、実際に decomposable algebraic 3-knot が存在することがわかる。

(注) $n=2$ の時は、Neumann [13] により、3-manifold K_f が irreducible なことが知られている。

定理2の証明は、本質的には $n \geq 3$ の時と同様の手法で行なわれる。一般に algebraic knot は Milnor [11] により、simple fibered knot ([14]) と呼ばれるものになるが、 $n \geq 3$ の時はそれらは Seifert matrix (定義は §2 参照) で完全に分類される。そしてその分類結果を使うことにより、decomposable な algebraic knot の存在が示せる。ところが $n=2$ の時はこの分類は成立しない ([14])。しかし、(必ずしも fibered とは限らない) simple 3-knots を考えると、埋め込まれた3次元多様体が homology 3-sphere の時は、Seifert matrix による分類が可能になる。§2 ではその分類定理を述べ、§3 でその分類定理を使って定理2を証明する。§4 では、algebraic 3-knot の fibered knot への分解を考える。

§2. Simple な homology 3-sphere knot の分類

Σ を $(\mathbb{Z}-)$ homology 3-sphere とする。3-knot (S^3, K) で $K \cong \Sigma$ なるもののことを Σ -knot と呼ぶことにする。 Σ -knot (S^3, K) が simple とは、 $\pi_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z}$ の時をいう。simple Σ -knot は次のように特徴づけられる。

命題 3 ([8]) Σ -knot (S^5, K) が simple

$\Leftrightarrow K$ は Seifert surface (i.e. S^5 の oriented 4-submanifold で、 K を bound するもの) として 1-connected なものを持つ。

F^+ を Σ -knot (S^5, K) の Seifert surface とする。この時 bilinear map $\Gamma: H_2(F; \mathbb{Z}) \times H_2(F; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\Gamma(\alpha, \beta) = \text{lk}(\alpha, i_*\beta)$ で定義する。ここで lk は S^5 における linking number を表わし、 $i: F \rightarrow S^5 - F$ は positive normal 方向への平行移動である。この Γ のことを Seifert form と呼ぶ。また、 Γ を matrix で表わしたものを Seifert matrix と呼ぶ。

次に、 L, L' を integral square matrices とする。ある integral unimodular matrix P があって $L' = PL$ となる時、 L と L' は congruent であるという。また、

$$L_1 = \left(\begin{array}{c|cc} L & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad L_2 = \left(\begin{array}{c|cc} L & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} (a \text{ は横ベクトル}) \\ (b \text{ は縦ベクトル}) \end{array}$$

なる形の matrix を L の elementary enlargement といい、逆に L は L_1, L_2 の elementary reduction という。そして、congruence, elementary enlargement, elementary reduction によって生成される、integral square matrices の間の同値関係を S -equivalence と呼ぶ。

以上の定義のもとで、simple Σ -knots は次のように分類される。

定理 4 ([15]) 任意の homology 3-sphere Σ に対し、
各 Σ -knot に Seifert matrix を対応させる写像

$$\Phi_{\Sigma} : \left\{ \begin{array}{l} \text{simple } \Sigma\text{-knots} \\ \text{in } S^5 \text{ の} \\ \text{isotopy classes} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{integral square matrix } L \text{ s.t.} \\ \det(L + {}^tL) = \pm 1 \\ \text{sign}(L + {}^tL) \equiv 8\mu(\Sigma) \pmod{16} \\ \text{の } S\text{-equivalence classes} \end{array} \right\}$$

は well-defined で bijective。ここで $\mu(\Sigma) \in \{0, 1\}$ は Σ の Rohlin invariant を表わす。

(証明の outline)

① well-defined なこと [9, §§3-9] とま、たく同様に証明できる。

② surjectivity L を integral square matrix で、
 $\det(L + {}^tL) = \pm 1$, $\text{sign}(L + {}^tL) \equiv 8\mu(\Sigma) \pmod{16}$ なるものとする。[5] より、 Σ はある compact smooth 1-connected spin 4-manifold M を bound する。必要なら M に K3 surface (またはその orientation を逆にしたもの) を connected sum することにより、 $\text{sign}(L + {}^tL) = \text{sign}(M)$ とできる。次に L を S -equivalence の範囲で変え、 M に $S^+ \times S^+$ を connected

sumして、 M の intersection matrix が $L + {}^tL$ となるようにできる。しかも M として、special handle 分解 (i.e. 1つの 0-handle にいくつかの 2-handles を同時に attach してできる handle 分解) を持つものかとれる。すると、Kervaire の議論 [6, pp 255-257] で、

$$\exists \varphi: M \rightarrow S^5 \quad \text{embedding}$$

$$\text{s.t. } \varphi(M) \text{ の Seifert matrix } = L$$

なるものが作れる。 $(S^5, \varphi(M))$ が求めるものである。

③ injectivity $(S^5, K_1), (S^5, K_2)$ を、それらの Seifert matrix L_1, L_2 が congruent または片方がもう一方の elementary enlargement である simple Σ -knots とする。 F_i ($i=1, 2$) を (S^5, K_i) の 1-connected な Seifert surface とする (cf. 命題 3)。 $\text{sign}(F_i) = \text{sign}(L_i + {}^tL_i)$ だから、 $\text{sign}(F_1) = \text{sign}(F_2)$ 。よって [14, §4] より、 $F_1 \# k_1(S^2 \times S^2) \cong F_2 \# k_2(S^2 \times S^2)$ (k_1, k_2 は十分大)。しかもこれらは special handle 分解を持つとして良い。Seifert surface に $S^2 \times S^2$ を connected sum することは S^5 内で実現できるので、初めから $F_1 \cong F_2$ として良い。しかも、うまく connected sum することにより、新しい Seifert matrices L'_1, L'_2 は congruent にできる (cf. [9, §13])。この時、[18] より

$\exists \psi : F_1 \rightarrow F_2$ diffeomorphism s.t.

$$(\star) \quad L_1(\alpha, \beta) = L_2(\psi_* \alpha, \psi_* \beta) \quad (\forall \alpha, \forall \beta \in H_2(F; \mathbb{Z}))$$

がある。さて、 F_1 は special handle 分解を持っていた。
(handle 分解は ψ と compatible にとる。) そこで次に F_2 を handle ごとに F_1 に isotopy で動かしてゆくが、この時の algebraic obstruction は $(\star)$ により消えている。あとは Whitney の trick などを使って実際に isotopy で動かせることがわかる (cf. [9, §20])。 //

§3. Algebraic 3-knot の decomposability の判定

この節では algebraic 3-knot (S^5, K_f) で、 K_f が homology 3-sphere のもののみを考える。[11] より、 (S^5, K_f) は simple になる。しかも、algebraic knot は fibered knot になるが、この時 Seifert surface として 1 つの fiber をとると、それから作った Seifert matrix は unimodular になる。以後、algebraic knot の Seifert matrix としては、この unimodular な matrix のみを考える。

命題 5 (S^5, K_f) を algebraic 3-knot で、 K_f が homology 3-sphere であるものとする。また、その Seifert matrix を L とする。この時、次が成り立つ。

- (1) $\mu(K_f) = 0 \Rightarrow (S^5, K_f)$ は decomposable
 (2) $\mu(K_f) \neq 0$ の時、 L が $L_1 \oplus L_2$ の形の matrix
 に congruent ならば、 (S^5, K_f) は decomposable。

(証明)

$$(1) \det(L + {}^tL) = \pm 1, \text{ sign}(L + {}^tL) \equiv 0 \pmod{16}$$

だから、定理4より Seifert matrix として L (と S -equivalent なもの) を持つ simple S^3 -knot (S^5, K_1) が存在する。

f が $\vec{0}$ を critical point に持つことから、 L が zero matrix と S -equivalent でないことがわかる。したがって、 (S^5, K_1) は non-trivial である。一方、zero matrix と S -equivalent な matrix を Seifert matrix として持つ Σ -knot (S^5, K_2) あり ($\Sigma \cong K_f$)。[12] より、 $\Sigma \neq S^3$ なので、 (S^5, K_2) も non-trivial になる。定理4より $(S^5, K_f) = (S^5, K_1) \# (S^5, K_2)$ となるから、 (S^5, K_f) は decomposable である。

(2) Seifert matrix として L_1, L_2 (と S -equivalent なもの) を持つ knots を考えれば、(1) と同様に示せる。 //

(定理2の証明)

g に付随した algebraic knot を (S^3, K_g) とする。 g

は Puiseux 特性対を 2 つ以上持つので、(torus knot ではなく) 本当の cable knot になる ([17])。したがって

$(\mathcal{S}^5, K_g)$ の Seifert matrix L_g は、 $L_g = L'_g \oplus L''_g$

のように直和の形となる ([10], [17])。一方、

$f(x, y, z) = g(x, y) + z^r$ だったから、 $(\mathcal{S}^5, K_f)$ の Seifert matrix を L とおくと、[16] より、

$$L = L_g \otimes A = (L'_g \otimes A) \oplus (L''_g \otimes A)$$

(A はある $(r-1) \times (r-1)$ matrix)

となる。したがって命題 5 より、 $(\mathcal{S}^5, K_f)$ は decomposable となる。 //

§4. Fibered knot への分解

一般に、simple fibered Σ -knot が、(knot として) decomposable であっても、2 つの fibered knots の connected sum に分解するとは限らない。実際にそのような例がある。

例 3 $f(x, y, z) = x^2 + y^7 + z^{13}$ とおく。この時 K_f は Brieskorn manifold $\Sigma(2, 7, 13)$ であり、これは homology 3-sphere になる。[7, §4] より、 $\Sigma(2, 7, 13)$ は intersection form が E_{16} と同型な 1-connected compact 4-manifold (これも E_{16} と書くことにする。) を

bound する。特に $\mu(K_f) = 0$ 。よって命題5より、
 (S^5, K_f) は decomposable である。

— オ、 (S^5, K_f) の Alexander polynomial $\Delta(t)$ は、円分多項式 $\phi_{182}(t)$ で、これは特に irreducible。 (S^5, K_f) の Seifert matrix を L とおくと、 $\Delta(t) = \det(tL + {}^tL)$ だから、 L は2つの matrix の直和 になれないことがわかる。したがって、もし $(S^5, K_f) = (S^5, K_1) \# (S^5, K_2)$ ((S^5, K_i) は non-trivial) とすると、 (S^5, K_1) は zero matrix と S -equivalent な Seifert matrix を持つとして良い。 $K_f \cong \Sigma(2, 7, 13)$ は irreducible だから、 $K_1 \cong \Sigma(2, 7, 13)$ でなければならぬ。

そこで、もし (S^5, K_1) が fibered とすると、その Seifert matrix は zero matrix だから、fiber M は compact contractible 4-manifold になる。すると、boundary を同一視してできる smooth closed 4-manifold $V = E_{16} \cup M$ は 1-connected で、その intersection form は negative definite だから standard form ではない。これは Donaldson の定理 ([2]) に反する。したがって、 (S^5, K_f) は fibered knots の connected sum には分解しない。

例3のように、decomposable な algebraic 3-knot は fibered knots の connected sum に分解するとは限らない。しかし、fibered knots の connected sum に分解する algebraic 3-knot も存在する。

定理6 ([14]) $g_0(x, y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$,
 $f_r(x, y, z) = g_0(x, y) + z^r$ とおく。この時も
 $r \equiv 5 \pmod{7}$ ($r \geq 2$) ならば、 f_r に付随した algebraic 3-knot は、2つの non-trivial fibered knots の connected sum に、(knot として) 分解する。

証明は長くなるので省略する。くわしくは [14] 参照。

(注) ① $n \geq 3$ の時は、 S^{2n+1} 内の simple fibered knot が decomposable ならば、その各 factor knot は必然的に fibered knot になる。

② 上の定理6の例では、2つの fibered knots の connected sum に knot として分解するけれども、fibering structure まで込めて分解するかどうかはわからない。

References

- [1] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Invent. Math.* 20 (1973), 147-169.
- [2] S. Donaldson, An application of gauge theory to 4-dimensional topology, *J. Diff. Geom.* 18 (1983), 279-315.
- [3] A. Durfee, Knot invariants of singularities, *Proc. Symp. Pure Math. Vol. 29*, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, 441-448.
- [4] ———, The low dimensional topology of singularities, *Proc. Symp. Pure Math. Vol. 40 - Part 1*, Amer. Math. Soc., Providence, 1983, 321-326.
- [5] S. Kaplan, Constructing framed 4-manifolds with given almost framed boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.* 254 (1979), 237-263.
- [6] M. Kervaire, Les nœuds de dimension supérieures, *Bull. Soc. Math. France* 93 (1965), 225-271.
- [7] R. Kirby, A calculus for framed links in S^3 , *Invent. Math.* 45 (1978), 35-56.
- [8] J. Levine, Unknotting spheres in codimension two,

Topology 4 (1965), 9-16.

- [9] —, An algebraic classification of some knots of codimension two, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 185-198.
- [10] F. Michel and C. Weber, Noeuds algébriques décomposables, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 294 (1982), 493-496.
- [11] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud. No. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1968.
- [12] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. I.H.E.S. 9 (1961), 5-22.
- [13] W. Neumann, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 299-344.
- [14] O. Saeki, On simple fibered knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots, to appear in Comment. Math. Helv. .
- [15] —, Knotted homology 3-spheres in S^5 , preprint.
- [16] K. Sakamoto, The Seifert matrices of Milnor

fiberings defined by holomorphic functions, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 714-721.

- [17] Y. Shinohara, On the signature of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 273-285.
- [18] C.T.C. Wall, Diffeomorphisms of 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39 (1964), 131-140.