

von Neumann algebra の quotients について

東北大 教養 武元英夫

von Neumann algebra の reduction theory の議論において必要な quotients について話を進めて行こう。quotient algebra が von Neumann algebra になるかどうかという問題に対して、今までに色々な結果が得られている。特に、F. B. Wright [6] 境 [1] に見られる様に finite von Neumann algebra の maximal ideal による quotient algebra は finite factor であることが分っている。更に、その拡張として、最近、竹崎 [4] がある種の結果を得ている。finite case 以外として、即ち、properly infinite von Neumann algebra に対しては、predual が separable の時、quotient algebra が von Neumann algebra になる必要十分条件は ideal が σ -weakly closed であることが [2], [3] で分っている。

残る問題として、finite な von Neumann algebra に対して、どのような条件下で quotient algebra が von Neumann

algebra になるかということが考えられる。この問題の部分的な解答として、最近、Vesterström [5] の結果を見ることが出来る。そこで、本講演は Vesterström [5] の結果を紹介することに中心をおく。

まず、main theorem を述べておく。

定理 1。 J は finite von Neumann algebra $\mathcal{A}$ における uniformly closed two-sided ideal とする。今、 $\mathcal{A}/J$ が von Neumann algebra と仮定すると次の二つの事柄が成立する。

- (1) J は maximal ideals の intersection である。
- (2) $\mathcal{A}/J$ の center が von Neumann algebra である。

定理 2。 $\mathcal{A}$ は center $\mathcal{Z}$ をもつ von Neumann algebra とし、 J は $\mathcal{A}$ における uniformly closed two-sided ideal とする。今、 $\mathcal{A}$, $\mathcal{Z}$, J に対して次の三つの性質が成立しているとする。

- (1) J は maximal ideals の intersection である。
- (2) $\mathcal{A}/J$ の center が von Neumann algebra である。
- (3) $\mathcal{A}/J$ の center が σ -finite である。

その時、 $\mathcal{A}/J$ は von Neumann algebra である。

定理 1 の証明において (2) は明らかである。 (1) の方は、finite

von Neumann algebra と準同型な von Neumann algebra が
finite になること、finite von Neumann algebra は strongly
semi-simple ということから分る。

従って、これから定理2を証明することを目的とする。

Vestershofm は定理2において $\mathcal{A}$ が σ -finite と仮定している
がその条件は本質的でないためここでは、その条件を除いて
述べておき、それを証明する。今後、定理2の仮定の下で話
を進める。

$C(\Omega) \cong \mathcal{Z}$ なる hyperstonean space Ω に対して、finite
von Neumann algebra における maximal ideal は Ω の元
 ω に対して $\mathcal{M}_\omega = \{a \in \mathcal{A} ; (a^*a)^{\wedge}(\omega) = 0\}$ で決定され
ることは分っている。 $\mathcal{M}_\omega$ に対して $\mathcal{N}_\omega = \mathcal{M}_\omega \cap \mathcal{Z}$ を定義
する。 $\mathcal{M}_\omega, \mathcal{N}_\omega$ から次の様な定義をやる。

定義1. $S \subset \Omega$: 部分集合に対して

$$\mathcal{M}_S = \bigcap_{\omega \in S} \mathcal{M}_\omega = \{a \in \mathcal{A} ; (a^*a)^{\wedge} = 0 \text{ on } S\}$$

$$\mathcal{N}_S = \bigcap_{\omega \in S} \mathcal{N}_\omega = \{a \in \mathcal{Z} ; a^{\wedge} = 0 \text{ on } S\}$$

定義1の下で今 $\mathcal{J}$ が maximal ideals の intersection であることより Ω の closed subset S が存在して $\mathcal{J} = \mathcal{M}_S$
となる。すると、 $\mathcal{I} = \mathcal{J} \cap \mathcal{Z}$ とおくと $\mathcal{I} = \mathcal{N}_S$ である。

$\mathcal{A} \ni x$ の $\mathcal{A}/\mathcal{M}_\omega$ の canonical image を $x(\omega)$ とおき、

σ/J の canonical image を $\tilde{\pi}$ とおく。すると、 $\{\sigma/m_\omega\}$ の C^* -sum を $\sum_{\omega \in S} \sigma/m_\omega$ とおくと $\sigma/J \ni \tilde{\pi} \rightarrow \sum_{\omega \in S} \pi(\omega) \in \sum_{\omega \in S} \sigma/m_\omega$ で表わされる対応でもって σ/J と $\sum_{\omega \in S} \sigma/m_\omega$ は $*$ -同型 π となる。従って、 $\|\tilde{\pi}\| = \sup_{\omega \in S} \|\pi(\omega)\|$ になる。

σ/m_ω が finite factor 更に、 σ/m_ω における center valued trace $\hat{\pi}$ は $\pi(\omega)^{\hat{\pi}} = \pi^{\hat{\pi}}(\omega)$ であることとを考えると、 $x \in \sigma$ 且 $\tilde{\pi} = 0$ ならば $\pi^{\hat{\pi}} = 0$ on S である。そこで今

$\# : \sigma/J \rightarrow \mathcal{B}/I \quad \tilde{\pi} \rightarrow \pi^{\hat{\pi}}|_S$ によって定義すると前の事柄より $\#$ は well-defined である。

定理2の証明は、境[1]で見られる証明方法を考えてやて行く。 $\sigma \ni a, x$ に対して $\Phi_a(x) = (ax)^{\hat{\pi}}$ とおくと、 $\Phi_a : \sigma \rightarrow \mathcal{B}$ bounded $\mathcal{B}$ -module homomorphism となる。 $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ を $\{\Phi_a : a \in \sigma\}$ の bounded $\mathcal{B}$ -module homomorphism 全体から Banach space における closure とする。これに対して、次の境[1]の結果を得る。

補題1。 $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \ni \Phi$ に対して次の事柄が挙げられる。

- (1) $x \in m_\omega \Leftrightarrow \Phi(x) \in m_\omega$.
- (2) $\Phi(\omega) : \sigma/m_\omega \ni x(\omega) \rightarrow \Phi(x)^{\hat{\pi}}(\omega)$ は σ/m_ω 上の bounded linear functional である。
- (3) $\|\Phi\| = \sup_{\omega \in S} \|\Phi(\omega)\|$.

(4) $\exists u \in \mathcal{O}$; partial isometry

$$\|\Phi(\omega)\| = \Phi(u)^*(\omega) \quad \text{for } \forall \omega \in \Omega.$$

(5) $\mathcal{J} : \widehat{B}_3 \ni \Phi \rightarrow \Phi(\omega) \in (\mathcal{O}/m_\omega)^*$

$\widehat{\mathcal{J}} : \widehat{B}_3/\ker \mathcal{J} \rightarrow (\mathcal{O}/m_\omega)^*$ とすると $\widehat{\mathcal{J}}$ は isometry である。

ある。

上の境の結果から次の事が簡単に分る。

補題 2. $\widehat{B}_3 \ni \Phi$ に対して次の事柄が挙げられる。

(1) $x \in \mathcal{J} \Rightarrow \Phi(x) \in \mathcal{J}$

(2) induced map $\widehat{\Phi} : \mathcal{O}/\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{I}$ defined by $\widehat{\Phi}(x) = \Phi(x)$ は norm bounded である。

(3) $\|\widehat{\Phi}\| = \sup_{\omega \in \mathcal{J}} \|\Phi(\omega)\|$ 。

(4) $\{\widehat{\Phi} ; \Phi \in \widehat{B}_3\}$ は $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ から $\mathcal{J}/\mathcal{I}$ への bounded linear mappings の closed subset である。

今, $\mathcal{J}/\mathcal{I} \cong C(S)$ ということと, $\mathcal{J}/\mathcal{I}$ が σ -finite であるから S 上 normal faithful measure μ が存在する。 $E = \overline{\{\mu \circ \widehat{\Phi} ; \Phi \in \widehat{B}_3\}} \subset (\mathcal{O}/\mathcal{J})^*$, E の closure を F とおく。この時, 次の事柄が云える。

補題 3. (1) E, F は invariant subspaces である。

5

$$(2) \quad f(\tilde{x}) = 0 \quad \text{for } \forall f \in E \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x} = 0.$$

$$(3) \quad \|\mu \circ \widehat{\Phi}\| = \int_S \|\Phi(u)\| d\mu(u).$$

$$(4) \quad \mu \circ \widehat{\Phi} \in E \quad \text{に對して} \quad \exists \tilde{v} \in \mathcal{O}_J; \quad \|\tilde{v}\| \leq 1 \quad \text{且} \\ \mu \circ \widehat{\Phi}(\tilde{v}) = \|\mu \circ \widehat{\Phi}\|$$

E, F が invariant subspace であることが分った。 E° は $(\mathcal{O}_J)^{**}$ における E の polar であるとして、 E° は $(\mathcal{O}_J)^{**}, (\mathcal{O}_J)^*$ -closed two-sided ideal である。従って、 $(\mathcal{O}_J)^{**}/E^\circ$ は von Neumann algebra であり、その predual は F である。

補題 4.

- (1) $(\mathcal{O}_J)^{**}/E^\circ$ は finite, normal faithful trace をもつ。
- (2) Composition $\mathcal{O}_J \rightarrow (\mathcal{O}_J)^{**} \rightarrow (\mathcal{O}_J)^{**}/E^\circ$ は $\mathcal{O}_J$ を C^* -algebra として $(\mathcal{O}_J)^{**}/E^\circ$ に induce する。

補題 4 の (1) は trace として $\tilde{x} \rightarrow \mu(\tilde{x}^*)$ をとって来ると補題 3.(2) が faithful であることが分り、求めるものとなる。(2) の方は、補題 3.(2) から分る。

補題 4 を考えると $\mathcal{O}_J$ と $(\mathcal{O}_J)^{**}/E^\circ$ が一致することを示せば十分である。それを示すにあたって境 [1] で次の事が示さ

れている。

補題5. $\mathcal{A}$ を faithful normal functional φ を von Neumann algebra とし, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の C^* -subalgebra とする。もし $\mathcal{A}_* \ni \varphi$ に対して $\mathcal{B}$ の元 $b, \|b\| \leq 1$ が存在して $\varphi(b) = \|\varphi\|$ になる時 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ となる。

上の境の結果をその方法を使うと次の事柄が示される。

定理3. $\mathcal{A}$ を finite von Neumann algebra, $\mathcal{Z}$ を $\mathcal{A}$ の center とする。今 $\mathcal{Z}$ の spectrum Ω の元 ω に対して $\pi_\omega \in \mathcal{A}$ から $\mathcal{A}/m_\omega$ への canonical mapping とする。更に $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の C^* -subalgebra で $\mathcal{B} \supset \mathcal{Z}$ であるものとし, $\mathcal{B}(\omega) = \pi_\omega(\mathcal{B})$ とおく。その時, 次の事は同値である。

- (1) $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の von Neumann subalgebra である。
- (2) $\forall a \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{B} \ni v, \|v\| \leq 1$ が存在して次を満たす $\|\pi_a(\omega)\|_{\mathcal{B}(\omega)} = \pi_a(v)^{\wedge}(\omega)$ for $\forall \omega \in \Omega$ 。

上の二つの事柄から求める事の議論を省いていく。

補題6. $\forall f \in F$ に対して, 次の (1)-(4) を満たす $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}_f$ と $\{\pi(\omega)\}_{\omega \in S}$ が存在する。

- (1) $\mu \circ \pi_n \rightarrow f$ 。

- (2) $\Phi_n(\omega) \rightarrow \Phi(\omega)$ for μ -a.e. ω .
- (3) $x \in \mathcal{O}$ に対して, $\omega \rightarrow \Phi(\omega)(x(\omega))$ は μ -integrable であり
 且 $f(\tilde{x}) = \int_S \Phi(\omega)(x(\omega)) d\mu(\omega)$ である.
- (4) $\omega \rightarrow \|\Phi(\omega)\|$ は μ -integrable 且 $\|f\| = \int_S \|\Phi(\omega)\| d\mu(\omega)$.

補題 6 は E, F の定義を考えて, Riesz-Fischer theorem の証明と同じ様になる。

補題 7. $\forall \varepsilon > 0, \forall f \in F$ に対して, $\beta/2$ の projection $\tilde{\pi}$ と $\tilde{B}_\beta$ の元 Φ が存在して次の事が成立する。

$$(1) \mu(1 - \tilde{\pi}) < \varepsilon \quad (2) f(\tilde{\pi} \tilde{x}) = \mu \circ \Phi(\tilde{x}) \text{ for } \forall x \in \mathcal{O}.$$

補題 7 の証明は補題 6 と measure theory における Lusin の定理の手法を考える事によって示される。

補題 8. $f \in F, \tilde{x}_i \in (\beta/2)_p, \Phi_i \in \tilde{B}_\beta (i=1, 2)$ に対して
 $f(\tilde{x} \tilde{x}_i) = \mu \circ \Phi_i(\tilde{x})$ for $x \in \mathcal{O}, i=1, 2$, が成立している
 時, $\tilde{B}_\beta$ の元 Φ が存在して $f(\tilde{x} \tilde{z}) = \mu \circ \Phi(\tilde{x})$ where $\tilde{z} = \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2$ が成立する。

これは $\Phi = \tilde{x}_1 \Phi_1 + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_2) \Phi_2$ とおくと良い。

補題 9. $\forall f \in F$ に対して, $\{\tilde{\Phi}_n\} \subset \tilde{B}_3$ と $\{\tilde{z}_n\} \subset \tilde{B}_p$ orthogonal が存在して,

$$f(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu \circ \tilde{\Phi}_n(\tilde{x} \tilde{z}_n) f \quad x \in \sigma \text{ が成立する.}$$

これは補題 7, 8 から明らかである。

定理 4. $\forall f \in F$ に対して,

$$\exists \tilde{v} \in \sigma/f, \quad \|\tilde{v}\| \leq 1, \quad f(\tilde{v}) = \|f\|.$$

証明. 補題 9 における $\{\tilde{z}_n\}, \{\tilde{\Phi}_n\}$ をとると, $\|f\| \leq \sum \|\mu \circ \tilde{\Phi}_n\|$ である。一方, 補題 3.4) を $\mu \circ \tilde{\Phi}_n$ に適用すると,

$\exists v_n \in \sigma; \text{ partial isometry.}$

$$\mu \circ \tilde{\Phi}_n(\tilde{z}_n v_n) = \|\mu \circ \tilde{\Phi}_n\|$$

今 $v = \sum \tilde{z}_n v_n$ とおくと, $v \in \sigma$ 且 $\|v\| \leq 1, \quad \tilde{v} \tilde{z}_n = \tilde{v}_n \tilde{z}_n$ である。

$$\begin{aligned} \text{従って, } f(\tilde{v}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \circ \tilde{\Phi}_n(\tilde{v} \tilde{z}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu \circ \tilde{\Phi}_n(\tilde{v}_n \tilde{z}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu \circ \tilde{\Phi}_n\| \end{aligned}$$

$$\text{従って, } f(\tilde{v}) = \|f\|$$

q. e. d.

以上の事から定理 2 が証明される。

以上によつて finite von Neumann algebra の quotient algebra がどのような条件下で von Neumann algebra になるかということが分った。しかし、定理2における条件(ii)を見ると、abelian case において別に考えなければいけないということになる。しかし、abelian case においてはどのような条件下で quotient algebra になるかどうかということも分からないのでここでは quotient algebra が von Neumann algebra になる時とならない時の例を挙げて終りとする。

定理5。次のどの場合においても $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$ への相異なる kernel を持つ non-normal $*$ -homomorphism が可付番存在する。

- (1) $\mathfrak{A}_1 = \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\mathfrak{A}_2 = \ell^\infty(\mathbb{N})$
- (2) $\mathfrak{A}_1 = L^\infty(0,1)$, $\mathfrak{A}_2 = \ell^\infty(\mathbb{N})$
- (3) $\mathfrak{A}_1 = L^\infty(0,1)$, $\mathfrak{A}_2 = L^\infty(0,1)$

定理6。 $\mathfrak{A}$ を $L^\infty(0,1)$ 又は $\ell^\infty(\mathbb{N})$ とした時、image が von Neumann algebra でなく、且互いに相異なる kernel を持つ $*$ -homomorphism が可付番個存在する。

References

- [1] S. Sakai ; The theory of W^* -algebras, Lecture Note, 1962.
- [2] H. Takemoto ; On the homomorphism of von Neumann algebra, Tôhoku Math. J., 21 (1969), 152-157.
- [3] H. Takemoto ; Complement to "On the homomorphism of von Neumann algebra", Tôhoku Math. J., 22 (1970), 210-211.
- [4] M. Takesaki ; The quotient algebra of a finite von Neumann algebra, Pacific J., (1971).
- [5] J. Vesterstrøm ; Quotients of finite W^* -algebras, (Preprint).
- [6] F. B. Wright ; A reduction theory for algebras of finite type, Ann. Math., 60 (1954), 560-570.