

有限体上のユニタリー群の既約指標

阪大 理 川中 宣明

有限体上のユニタリー群の複素既約指標についての筆者の結果 [1] を §1 で, G. Lusztig [3] と B. Srinivasan [4] の結果を §2 で述べる.

§1. K を標数 $p > 0$ の代数的閉体, k をその有限部分体とする. 任意の自然数 m に対し $k_m (\subset K)$ を k の m 次拡大体とする. $G = GL_n(K)$ の抽象群としての自己同形 σ を

$$x^\sigma = (x_{ji}^q)^{-1} \quad (x = (x_{ij}) \in G, \quad q = |k|)$$

により定義する. 自然数 m に対して

$$G_{\sigma^m} = \{ x \in G \mid x^{\sigma^m} = x \}$$

と置くと,

$$G_{\sigma^m} = \begin{cases} GL_n(k_m) & , m \text{ が偶数のとき,} \\ U_n(k_{2m}) & , m \text{ が奇数のとき,} \end{cases}$$

となる. 以下, m を 2 と一固定し, $G = G_{\sigma^m}$, $G_\sigma =$

$Q_\sigma = \mathbb{T}_n(\mathbb{R}_2)$ と置く. A を $\sigma|G$ により生成される m 次巡回群とする. 以下, 簡単のため, $\sigma|G$ を単に σ と記す.

AG を A と G との半直積とする. 即ち AG は集合としては A と G との直積であって, 積法則は $x^\sigma = \sigma^{-1}x\sigma$ ($x \in G$, $\sigma \in A$) により定められているものとする. G の元 x に対して, $N(x) = (Gx)^m = x^{\sigma^{m-1}}x^{\sigma^{m-2}} \cdots x^\sigma x$ と置く.

補題 1. (a) x を G の元とする. $N(x)$ の G における共役類 $K_G(N(x))$ は G_σ の元を含む. さらに $K_G(N(x)) \cap G_\sigma$ は, G_σ のひとつの共役類をなす.

(b) x, y を G の元とし, σ と σy が AG の元として共役であるとする. このとき, $K_G(N(x)) \cap G_\sigma = K_G(N(y)) \cap G_\sigma$.

(c) $\sigma|G$ の AG -共役類の全体から G_σ の共役類への対応 $\mathcal{N}$ を

$$\mathcal{N}(K_{AG}(\sigma x)) = K_G(N(x)) \cap G_\sigma$$

で定義すると, $\mathcal{N}$ は全単射である.

(d) G の任意の元 x に対して,

$$|K_{AG}(\sigma x)| |G|^{-1} = |K_G(N(x)) \cap G_\sigma| |G_\sigma|^{-1}.$$

補題 2. H を有限群, A を H の自己同形 σ で生成される有限巡回群とする. H の既約指標 χ が σ で固定される (即

す、 $\chi(x) = \chi(x^\sigma) \quad (\forall x \in H)$ とする。このとき、半直積 AH の既約指標 $\tilde{\chi}$ で、 $\tilde{\chi}|_H = \chi$ となるようなものが存在する。

定理. $(m, p) = 1$ と仮定する。 χ を G の σ で固定される既約指標、 $\tilde{\chi}$ をその AG への拡張 (補題 2 参照) とする。このとき、 χ のみによって決まる、 G_σ の既約指標 ψ_χ で次式を満たすものが一意的に存在する。

$$\tilde{\chi}(\sigma x) = \pm \zeta^a \psi_\chi(\pi(x))$$

$$(x \in G, \pi(x) \in K_G(N(x)) \cap G_\sigma).$$

ここに、 $\zeta = \exp(2\pi i/m)$, $a \in \mathbb{Z}$. さらに、 G の σ で固定される既約指標の全体から G_σ の既約指標全体への写像 $\chi \rightarrow \psi_\chi$ は、全単射である。特に、 $m=2$ の場合を考えると $U_n(k_2)$ ($\text{char}(k) \neq 2$) のすべての既約指標は、 $GL_n(k_2)$ の σ で固定される既約指標から上の方法により構成されることがわかる。

上の定理と Green [5] の結果を組み合わせることにより、 $U_n(k_2)$ の既約指標と共役類とが互に双対な形にパラメトライズされることがわかる ([17])。

§2. G を有限体 k 上で定義された連結かつ *reductive* な線形代数群, σ をその Frobenius 準同形とする. $\mathcal{P}$ を G の放物型部分群, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{P}$ の Levi 部分群とし, $\mathcal{L}$ は σ で固定されると仮定する. (しかし, $\mathcal{P}$ については何も仮定しない.) π を $\mathcal{L}_\sigma = \{x \in \mathcal{L} \mid x = x^\sigma\}$ の一般指標とする. Deligne-Lusztig [2] の結果と方法を用いて, Lusztig [3] は, G_σ の一般指標 $R_{\mathcal{L}, \mathcal{P}}^G(\pi)$ を定義した. 対応 $\pi \mapsto R_{\mathcal{L}, \mathcal{P}}^G(\pi)$ は, 次の性質を持つ.

- 定理. (a) $R_{\mathcal{L}, \mathcal{P}}^G(\pi)$ は π に関し $\mathbb{Z}$ -linear.
- (b) $\mathcal{P}$ も σ で固定される時は, $R_{\mathcal{L}, \mathcal{P}}^G(\pi)$ は, π を $\mathcal{P}_\sigma$ の指標と考えて G_σ に誘導したものと一致する.
- (c) J を, σ で固定される極大トーラス, $\mathcal{B}$ を J を含むような G の Borel 部分群とすると, $R_{J, \mathcal{B}}^G(\ell)$ (ℓ は J_σ の指標) は, [2] で導入された $R_J^G(\ell)$ と一致する.
- (d) $J \subset \mathcal{L}$ とすると, $R_{\mathcal{L}, \mathcal{P}}^G(R_J^{\mathcal{L}}(\ell)) = R_J^G(\ell)$.

以下, 簡単のため $G = GL_n$ とする. この時, G_σ は $GL_n(k)$ か $GL_n(k_2)$ ($k_2 = k$ の 2 次拡大体) である. 上の定理から, 次が従う.

系. ℓ を $\mathcal{L}_\sigma$ の一次元指標とすると,

$$|\mathcal{L}|^{-1} \sum_{J \subset \mathcal{L}} |J_\sigma| R_J^G(\ell|J_\sigma)$$

は, G_σ の一般指標である. ただし, 左辺の G_σ は, σ で固定される極大トーラス全体の上をわたる.

$G_\sigma = GL_n(k_2)$ の時は, σ で構成された一般指標は, Green [5] の記号で I_n^* [2] と書かれているものである. $G_\sigma = GL_n(k_2)$ のすべての既約指標を $R G_\sigma(\sigma)$ の具体的に一次結合で書き表わすには, Green の方法をまねるだけでよい.

文 献

- [1] N. Kawanaka, On the irreducible characters of the finite unitary groups, to appear.
- [2] P. Deligne and G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, Ann. Math., 103 (1976), 103-161.
- [3] G. Lusztig, On the finiteness of the number of unipotent classes, to appear.
- [4] B. Srinivasan, The decomposition of some Lusztig-Deligne representations of finite classical groups, to appear.
- [5] J.A. Green, The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., 80 (1955), 402-447.