

INVERSE PROBLEMS FOR STOCHASTIC TRANSPORT EQUATIONS

信州大学・理学部 乙部巖己*

Yoshiki Otobe

Department of Mathematical Sciences,
Shinshu University

本稿では線形：

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t) + (q(x) + \dot{w})u(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (1)$$

および線形非斉次：

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_x u(t, x) + q(x)u(t, x) + \dot{w}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (2)$$

の輸送方程式に対する、初期値 φ と観測データ $f(t) := u(t, a)$ を既知量としたときに未知関数 q を求める問題を考察する。

1 動機

数理物理学の第一段階では、方程式を立て、その解の挙動を調べて、それが実際の現象をモデル化したものとして相当かどうかを議論する。例えば

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t) + q(x)u(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (3)$$

は密度が q で表される媒質を伝播する波動現象を記述する。一方第二段階では、例えば波動現象が (3) で記述されることは既知として、そのある点 $x = a$ での観測データ $f_a(t) \equiv f(t) := u(a, t)$ から媒質 $q(x)$ を追求することがある。例えば人体／ピラミッ

*Dan Crisan (Imperial College London) および Symon Peszat (Polish Academy of Sciences) との共同研究

ドの外から電磁波をあてて内部の様子を探る、海面上の船から超音波を照射して海中の様子を探るなどがその例である。これらは非破壊検査と呼ばれ、最も典型的な逆問題である。

一方で容易に分かるように、(3) 自身は線形方程式であるがその逆問題 $f \mapsto q$ はきわめて非線形度の高い問題であり、解は一意に存在するが、Hadamard の意味では適切ではない。すなわち、観測値 f に対して q は連続に変化せず、非適切 (ill-posed) な問題である [2]。そして、実用上の問題としては、観測誤差は避けられない前提であるから、この種の非適切性は深刻な問題であり、連続性の議論は中心課題の一つになっている。そこで、本稿においては観測誤差は本来の現象に伴うものとして方程式そのものに雑音項を組み込んだ、いわゆる確率偏微分方程式を考え、それに対する逆問題を考察する。

言うまでもなく考える方程式としては波動方程式が自然であるが、ここでは問題の数学的構造を明快なものとするため、輸送型の方程式、すなわち一階の方程式 (1) と (2) に限定して議論を行う。

2 順問題

方程式 (1) と (2) において、雑音項 $\dot{w}$ は時間に依存する場合 $\dot{w}(t)$ と空間に依存する場合 $\dot{w}(x)$ の 2 種類を考え、それぞれガウス型白色雑音とする。その数学的な定式化としては、 $\dot{w}(t)$ の場合には $w(t)$ をブラウン運動としてその伊藤微分を考えればよい。 $\dot{w}(x)$ の場合もほぼ同様に理解しても差し支えないが、 $x \in \mathbb{R}$ で考えるために簡単に次のように定めておく： γ_n を独立な標準正規分布に従う確率変数、 e_n を $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基（エルミート関数系）として $\dot{w}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n(x)$ と定める。おおざっぱに言って $\gamma_n = O(1)$ であるから $L^2(\mathbb{R})$ では収束しないが、例えば $H^{-1}(\mathbb{R})$ の元として理解する。

時空間の白色雑音 ($\gamma_n(t)$ が独立な標準ブラウン運動で $\dot{\gamma}_n(t)$ をその伊藤微分としたときの $\sum_{n=1}^{\infty} \dot{\gamma}_n(t) e_n(x)$) の場合には一階方程式では解が関数の空間には存在しなくなってしまうので、本稿では考えないことにする。

我々の目的は逆問題であるが、知る限りにおいて (1) に対する順問題の解の表示に関して適切な文献が見当たらなかったため、まずそれらの解の定義を与え、その解について議論するところから始める。

まず、この種の確率偏微分方程式においては、初期値が十分によいものであったとしても、一般には解は $L^2(\mathbb{R})$ には属さないから、次のような関数空間を設定して議論を行う： $\rho(x) := (1 + |x|^2)^{-1}$ と定めて $L^2_\rho \equiv L^2_\rho(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}, \rho(x) dx)$ とおく。ノルム $\|\cdot\|_{2,\rho}$ や内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,\rho}$ は適切に定めておく。

さらに可積分または上から有界な可測関数 q によって作用素の族 $S(t)$ を

$$[S(t)v](x) := v(x+t) \exp \left\{ \int_0^t q(x+s) ds \right\}, \quad t \geq 0$$

と定める。

補題 1. もし q が可積分または上から有界であれば $S(t)$ は L^2_ρ 上の有界作用素の半群であり、 q が上から有界であれば強連続である。

なお、以下では記述を簡単にするため、本来であれば確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_t\})$ と組 (u, w) を解と呼ぶべきところを単に $u(x, t)$ が解であると呼ぶことにし、 $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合性に関する（暗黙の）条件は明示しない。また、 $dw(s)$ に関する積分はすべて伊藤積分として理解する。

2.1 線型方程式

まず (1) において $\dot{w} \equiv \dot{w}(t)$ の場合を述べる。

定義 1. 関数 $u(x, t)$ が (1) の解であるとは、

$$u(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t \partial_x u(x, s) ds + \int_0^t q(x) u(x, s) ds + \int_0^t u(x, s) dw(s) \quad (4)$$

を満たすことをいう。

補題 2. 方程式 (4) の解は

$$u(x, t) = \varphi(x+t) \exp \left\{ \int_{x+t}^x q(\xi) d\xi \right\} \exp \left\{ w(t) - \frac{1}{2}t \right\} \quad (5)$$

で与えられ、道ごとに一意的である。

次に $\dot{w} \equiv \dot{w}(x)$ の場合を述べる。

定義 2. 関数 $u(x, t)$ が (1) の解であるとは、

$$\langle u(t), \phi \rangle = \langle \varphi, \phi \rangle + \int_0^t \langle u(s), -\phi' + q\phi \rangle ds + \int_0^t \langle u(s)\phi, \dot{w} \rangle ds \quad (6)$$

を各 $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ に対してほとんど確実に満たすことをいう。ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は通常の内積であり、 $u(t) := u(\cdot, t)$ と定める。

補題 3. 方程式 (6) の解は

$$u(x, t) = \varphi(x+t) \exp \left\{ - \int_0^t q(x+\xi) d\xi \right\} \exp \{ \langle 1_{[x, x+t]}, \dot{w} \rangle \} \quad (7)$$

で与えられ、一意的である。

ただし最終項については次のように理解する。まず $a \geq 0$ として

$$B_a(t) := \langle 1_{[-a,t]}, \dot{w} \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} 1_{[-a,t]}(x) \dot{w}(x) dx$$

とおくと $\{B_a(t)\}_{t \geq 0}$ がブラウン運動であることが簡単に分かる。従って $\langle 1_{[s,t]}, \dot{w} \rangle$ は問題なく定義された確率変数であり、さらに $\langle 1_{[s,t]}, \dot{w} \rangle = B_a(t) - B_a(s)$ は $a \geq 0$ の選び方によらない。

補題 2 と補題 3 を比較すると、おおざっぱには指数関数の中の $-\frac{1}{2}t$ だけずれが生じている。これは $\dot{w}(t)$ のときには増大情報系を基にして伊藤積分を考えているのに対して、 $\dot{w}(x)$ のときには空間方向へは増大情報系を考えていないことから来る差異である。

2.2 非斉次方程式

次に (2) を考えるが、この場合の順問題の解は一般論 [1] によって容易に取り扱うことができる。

まずは $\dot{w} \equiv \dot{w}(t)$ の場合、方程式を L^2_ρ で考えることにして、もし q が上から有界であれば

$$\begin{aligned} u(t, x) &= S(t)\varphi(x) + \int_0^t S(t-s)1(x) dw(s) \\ &= \varphi(x+t) \exp \left\{ \int_0^t q(x+r) dr \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_0^{t-s} q(x+r) dr \right\} dw(s) \end{aligned}$$

が一意的な強解である。ただし $1(x)$ は定数関数 $1 \in L^2_\rho$ を表す。

$\dot{w} \equiv \dot{w}(x)$ の場合には線型の場合と同じく解は弱形式で考えることにして、

$$u(t) = S(t)\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \int_0^t S(t-s)e_k ds,$$

が一意的な解を与える。この和は $L^2(\Omega, P)$ で収束する。しかも、

補題 4. q を上から有界とする。 $x=0$ での観測値 $f(t) := u(0, t)$ を考えると、 $\dot{w} \equiv \dot{w}(x)$ の場合と $\dot{w} \equiv \dot{w}(t)$ の場合は同分布である。

以上を総合して、いずれの場合にも考える物理系 (方程式) を固定したもとの、我々はある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で $(\phi, q, w(\omega)) \mapsto u(\omega)$ を構成できることになる。

3 逆問題

我々は (1) と (2) で与えられる方程式の順問題がある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で解 $(\phi, q, w(\omega)) \mapsto u(\omega)$ を持つという前提で、観測値 $f(a, t; \omega) := u(a, t; \omega)$ が与えられたと仮定する。

本稿における**逆問題**とは、写像 $(\phi, f(\omega)) \mapsto q$ が構成できるかという問題として定義する。

注意 1. 確率空間は、方程式が与えられた下で、その**順問題**の解を定める $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を固定して考える。従って我々の逆問題の定式化においては、順問題の考察が常にあるものとして理解する。

注意 2. 我々はある観測値 $f(a, t; \omega)$ が 1 つ与えられたときに、 q を決定する問題を考える。 q は決定論的な関数であって、 ω には依存しない。

3.1 線型の場合

ここでは方程式の初期値は常にすべての $x \in \mathbb{R}$ で $\varphi(x) > 0$ を満たすと仮定する。まず $\dot{w} \equiv \dot{w}(t)$ の場合について述べる。

命題 5. $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が周期 1 の周期的関数と仮定する。

$$\int_s^t q(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log \frac{f_a(t+k)}{\varphi(a+t+k)} - \log \frac{f_a(s+k)}{\varphi(a+t+k)} + \frac{1}{2}(t-s).$$

が成立する。

また $\dot{w} \equiv \dot{w}(x)$ の場合も同様の手法で次を導くことができる。

定理 6. $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が周期 1 の周期的関数と仮定する。また $f(t) \equiv f_0(t)$ とすると

$$\int_0^t q(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \log \frac{f(k)\varphi(k+t)}{f(k+t)\varphi(k)}. \quad (8)$$

が成立する。

関数 q が周期的という条件は、知りたい物体を十分たくさん並べることができるという仮定である。特に $\dot{w} \equiv \dot{w}(x)$ の場合には、媒質が一様に不純物で擾乱されている場合に対応しており、問題設定として自然である。すなわち、非破壊検査を行いたい大量の不純物が混入した物質を非常に多く用意すれば、一度の検査によってその媒質の様子を知ることができる。

3.2 非斉次の場合

順問題においては、線型の方程式（情報的雑音）よりもむしろ非斉次問題（加法的雑音）の方が容易に扱うことができる。ところが、逆問題の考察においては非斉次問題の方が困難を伴う点がある。その直観的な理由としては、雑音が解とは無関係に混

入しているために、雑音部の解析からは解や係数に関する情報が抜き出せないということが挙げられる。

例えば最も簡単な 1 次元の確率微分方程式

$$dX(t) = aX(t) dt + dB(t), \quad X(0) = 0$$

を考える。この解 $X_a(t) \equiv X(t)$ は固定した有限区間 $[0, T]$ 上で $B(t)$ と互いに絶対連続な分布を持つ。従っておおざっぱに言えば、 $X_a(\cdot; \omega)$ として観測されうる観測値は $B(\cdot; \omega)$ としても観測しうるから、 $X_a(\cdot; \omega)$ から a を復元することは困難を伴う。もちろん $T \rightarrow \infty$ とすると絶対連続ではないから、その場合には a を復元できる可能性がある。有限時間でそれを実行したければ、SDE の解のスケール不変性を利用すればよい。

我々の逆問題もそのような考えに従って係数 $q(x)$ を復元しようとするが、現状においては q には大きな制限をつけざるを得ない。そこで、方程式の係数 $q(x)$ は $aq(x)$ の形であり、 $q(x)$ は既知（しかも以下では特別な条件を要請する）と仮定し、逆問題としては a を推定する問題として定式化する。これは関数 $q(x)$ 自身を推定することと比べればはるかに易しい。また、観測値は常に $x = 0$ のものとする。こうすることで $\dot{w}(t)$ の場合と $\dot{w}(x)$ の場合を区別せずに記述することができる。

まず、 q が周期的関数かつ $\int_0^1 q(x) dx = 0$ の場合を扱う。さて、

$$g(x) := \int_0^1 e^{2x \int_0^s q(r) dr} ds$$

とおくと、これは連続微分可能であって

$$g'(x) = 2 \int_0^1 e^{2x \int_0^s q(r) dr} \int_0^s q(r) dr ds.$$

である。以下では $g'(x)$ は符号を変えないと仮定する。例えば $q(x) = \sin 2\pi x$ はこれらすべての仮定を満たす。

命題 7. 関数 q は上の仮定を満たすとする。 F_N を

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} ([f(k+1) - f(k)] - [\varphi(k+1) - \varphi(k)])^2. \quad (9)$$

で定め、さらに

$$G_N := \begin{cases} g^{-1}(F_N), & F_N \in \text{Range}(g), \\ 1, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

と定める。すると、ほとんど確実に

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N = a \quad (10)$$

が成り立つ。さらに、任意の $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ に対して、ほとんど確実に

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{2}-\varepsilon} |G_N - a| < \infty \quad (11)$$

となる。すなわち、誤差 $|g^{-1}(G_N) - a|$ は漸近的に $o(N^{-(\frac{1}{2}-\varepsilon)})$ の程度である。

次に、 $q(x) = 1_{[0,b]}(x)$ なる場合を考える。

$$h(x) := \begin{cases} [(b - \frac{1}{x}) e^{2bx} + \frac{1}{x} (2e^{bx} - 1)], & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

とおく。

命題 8. $\varphi(x) \equiv 0$ とする。 F_N を

$$F_N := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [f((2k+2)b) - f((2k+1)b)]^2. \quad (12)$$

と定め、 $F_N \in \text{Range}(h)$ のときには $H_N := h^{-1}(F_N)$ とし、そうでないときには $H_N = 1$ とおくと、ほとんど確実に

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_N = a$$

が成り立つ。さらにすべての $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ に対してほとんど確実に

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{2}-\varepsilon} |H_N - a| < \infty \quad (13)$$

が成り立つ。つまり誤差 $|h^{-1}(F_N) - a|$ は漸近的に $o(N^{-(\frac{1}{2}-\varepsilon)})$ の程度である。

現在のところ、非斉次方程式に対する逆問題の解の表示が得られているのは上記の2つの場合のみである。

参考文献

- [1] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge, 1992.
- [2] V. G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, VNU Science Press, 1987.