

シュール函数とアフィンリー環

北大・理 山田 裕史

(Hiro-Fumi YAMADA)

§0 前口上

私の話と次の森田君の講演は本研究集会のメインテーマからは、はずれており所詮“色物”である。それならば、ということと今回の講演に際し髪の色も変えてきた、といったことと講演の最初に（日本語で）申し上げたところ、最後列の某氏から「聞こえない」とお叱りを受けたのでここに再録した。タイトルはすいぶん大まかだが、ここで扱うのは最も簡単なアフィンリー環である $A_1^{(1)}$ 型と呼ばれるものである。このリー環の“基本表現”を多項式環上に実現したときのウェイトベクトルがシュール函数を用いて表わされる、というストーリーである。“色物”にもかかわらず60分もの講演時間と下り、また何人かの友人に再会する機会と与えて下さった研究代表者には深く感謝する。帰りの飛行機の都合で研究集会の最後まで出席できなかったのは残念であった。

§ 1 Virasoro 代数.

我々の舞台は無限変数の多項式環

$$V = V(x) = \mathbb{C}[x_j ; j \geq 1, \text{ odd}]$$

である。 $\deg x_j = j$ と勘定して $V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} V_d$ と奇次元成分に分
解しておく。 V_d の次元は d の奇数による分割の個数に等し
い。 V に作用する Virasoro 代数の話から始めよう。奇数 $j \geq 1$
に対して $a_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $a_{-j} = jx_j$ とおいて

$$L_k := \frac{1}{4} \sum_{j: \text{odd}} :a_{-j} a_{j+2k}: + \frac{1}{16} \delta_{k,0} \mathbb{1} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

と定義する。ここで

($\mathbb{1} = \text{identity}$)

$$:a_i a_j: = \begin{cases} a_i a_j & (i \leq j) \\ a_j a_i & (i > j) \end{cases}$$

は物理で正規積と呼ばれるものである。このとき次の関係式
の計算により示される:

$$L_k L_m - L_m L_k = (k-m) L_{k+m} + \frac{1}{12} (k^3 - k) \delta_{k+m,0} \mathbb{1}$$

つまり $\{L_k\}$ は Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ の central charge = 1 の表現と
与えている。この“フック表現”は既約ではない。既約分
解のためには各既約成分の最高ウェイトベクトルを具体的に
見つけねばよいのだが、これは次の微分方程式を解くことに
他ならない: $L_k \varphi = 0 \quad (\forall k \geq 1)$. このような

これは“特異ベクトル”と呼ばれる。次のような事実が知られてゐる [W]。

$$\{\text{奇数次特異ベクトル}\} = \{S_{\Delta_r}(x) \ ; \ r \geq 0\}.$$

ここで $S_{\Delta_r}(x)$ は階段形分割 $\Delta_r = (r, r-1, \dots, 2, 1)$ に対するシューアの S -函数, いわゆる“シューア函数”である。定義は以下のとおり。 λ を自然数 n の分割とする。マス目の個数が $|\lambda| = n$ のヤング図形と言つてもよい。このとき,

$$S_{\lambda}(x) := \sum_{\rho} \chi_{\rho}^{\lambda} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots}{v_1! v_2! \dots}$$

ここで和は n の分割 $\rho = (1^{v_1} 2^{v_2} \dots)$ に渡る。 χ_{ρ}^{λ} は対称群 S_n の λ に対応する既約表現の共役類 ρ における指標の値 ($\in \mathbb{Z}$) である。一般に $S_{\lambda}(x) \in \mathbb{C}[x_j; j \geq 1]$ であるが、 Δ_r は“2-core”であるため $S_{\Delta_r}(x) \in V$ となつてゐる。上の事実より Virasoro 代数のフロッグ表現の既約分解がわかる:

$$V \cong \bigoplus_{r=0}^{\infty} M\left(\left(\frac{2r+1}{4}\right)^2, 1\right).$$

ここで一般に $M(h, c)$ は 最高ウェイト $= h$, central charge $= c$ の Verma 加群である。(右辺の各 Verma 加群は既約である。)

疑問 この描象の“Jack 版”はあるだろうか?

(cf [MY])

§2 $A_1^{(1)}$ 型アフィンリ-環

$A_1^{(1)}$ (型アフィンリ-環) とは, 3次元のベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}\alpha_0^\vee \oplus \mathbb{C}\alpha_1^\vee \oplus \mathbb{C}d_0$ と, e_0, e_1, f_0, f_1 で生成される無限次元のリ-環である。 $\mathfrak{g}$ の双対空間を $\mathfrak{g}^* = \mathbb{C}\alpha_0 \oplus \mathbb{C}\alpha_1 \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$ とすると, dual pairing は次で与えられる: $\langle d_0, \Lambda_0 \rangle = 0$, $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_0 \rangle = \delta_{i0}$, $\langle d_0, \alpha_j \rangle = \pm 1$.

$A_1^{(1)}$ の "基本表現" $L(\Lambda_0)$ は $\Lambda_0 \in \mathfrak{g}^*$ と最高ウェイトにもつ既約表現として定義される。一般に $\Lambda \in \mathfrak{g}^*$ が $L(\Lambda_0)$ の "ウェイト" であるとはウェイト空間

$L(\Lambda_0)_\Lambda := \{v \in L(\Lambda_0) ; h v = \langle \Lambda, h \rangle v, \forall h \in \mathfrak{g}\}$ が $\{0\}$ でないこととして定義される。このとき次が知られてゐる [K]:

$$\{L(\Lambda_0) \text{ のウェイト} \} = \{ \Lambda_0 - p\delta + q\alpha_1 ; p, q \in \mathbb{Z}, p \geq q^2 \}$$

ただし $\delta := \alpha_0 + \alpha_1$ は "基本虚ルート" と呼ばれるものである。 $L(\Lambda_0)$ のウェイト Λ が "極大" であるとは $\Lambda + \delta$ がもうウェイトでないこととして定義される。丁度, 放物線 $p = q^2$ の上にあるウェイトのことである。極大ウェイトの全体は, 最高ウェイト Λ_0 を通るワイル群の軌道になっている。

さて Lepowsky - Wilson による $L(\Lambda_0)$ の実現を紹介しよう。

不定元 p に対し,

$$Y(p) := -\frac{1}{2} \left\{ e^{2\xi(x,p)} e^{-2\xi(\tilde{\alpha}, p^{-1})} - 1 \right\}$$

とあて、 $Y(p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Y_k p^{-k}$ により奇次成分 Y_k と定義する。

ここで

$$\xi(x, p) = \sum_{j \geq 1, \text{ odd}} x_j p^j, \quad \xi(\tilde{\alpha}, p^{-1}) = \sum_{j \geq 1, \text{ odd}} \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} p^{-j}$$

とした。 $Y(p)$ は "vertex operator" と呼ばれる。こゝとて、

$$\mathbb{C} \left\{ Y_k (k \in \mathbb{Z}), a_j (j \in \mathbb{Z}, \text{ odd}), 1 \right\}$$

は V に作用する無限次元リ-環となす。より正確には、これは $A_1^{(1)}$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の実現と与える。最高ウェイトベクトルは $1 \in V$ である [LW]。

以上により Virasoro 代数とアフィンリ-環 $A_1^{(1)}$ が V に作用しているわけであるが、両者の関係を述べておこう。
 このフック表現は各 "string" $\{\Lambda - n\delta; n \geq 0\}$ (Λ は極大ウェイト) と不変にすることが検証される。しかも形式指標と見ることにより、各 string は δ で既約であることもわかる。
 すなわち、 V の δ による既約分解は、 V は strings の和に分解することには他ならない。そして既約成分の最高ウェイトベクトルとしての特異ベクトル $S_{\Delta_r}(\alpha)$ は $A_1^{(1)}$ の極大ウェイトベクトルのことである。極大とは限りない一般のウェイトベ

クトルもシュール関数を使って書けたらいいな、という希望が出てくるが、これについては $[ANY], [Y]$ に譲る。

§3 シュールの Q -関数

まず $D_2^{(2)}$ (型 A フィンリ-環) の基本表現 V 上

$$V(t) = \mathbb{C}[t_j; j \geq 1, \text{odd}]$$

上に実現しよう。 $a_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$, $a_{-j} = j t_j$ ($j \geq 1, \text{odd}$) とし

$$Y(p) = \frac{1+i}{2(1-i)} \left\{ e^{\sum (1-i^j) t_j p^j} e^{-2 \sum (1+i^j) \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial t_j} p^{-j}} - 1 \right\}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} Y_k p^{-k} \quad (i = \sqrt{-1})$$

とおく。このとき

$$\mathbb{C}\{Y_k (k \in \mathbb{Z}), a_j (j \in \mathbb{Z}, \text{odd}), 1\}$$

は $D_2^{(2)}$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の $V(t)$ 上の実現を与える。実は、 $\mathfrak{sl}_2$ -環としては $D_2^{(2)} \cong A_1^{(1)}$ である。すなわち $A_1^{(1)}$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の §2 とは少し異なる実現が得られたのである。この実現ではウェイトベクトルは、今から定義する "シュールの Q -関数" により記述される。 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell) \in \mathfrak{n}$ の strict な分割としよう。すなわち $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_\ell > 0$ 。シュールの Q -関数は

$$Q_{\lambda}(t) := \sum_p 2^{\left\lfloor \frac{\ell(\lambda) + \ell(p) + 1}{2} \right\rfloor} \sum_p \frac{t_1^{\nu_1} t_3^{\nu_3} \dots}{\nu_1! \nu_3! \dots}$$

と定義される。ここで和は n の odd な分割 $p = (1^{\nu_1} 3^{\nu_3} \dots)$ を渡る。 $\ell(\cdot)$ は分割の長さ, また $\sum_p^{\lambda}$ は対称群 S_n の λ に対応する "スピン指標" の値である。対称群の 2 枚の被覆群 $\widetilde{S}_n$ の "negative" な指標と言ってもよい。単に S_n のスピ
ン指標というが、実際は符号などいろいろ面倒な制約が必要となるので、ここでは $\sum_p^{\lambda}$ は Hoffman - Humphreys の本 [HH] に載っている指標表の値としておこう。 p が odd な分割なので $Q_{\lambda}(t)$ は $V(t)$ に属する。

定理 $D_2^{(2)}$ の基本表現 $V(t)$ のウエイト基底として、
 $\{ Q_{\lambda}(t) ; \lambda \text{ は strict な分割} \}$ が与えられる。

ここでウエイトの δ -移動と strict な分割との関係は、組合せ論的なゲームとして記述しよう。strict な分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ に対する Q -函数 $Q_{\lambda}(t)$ の $D_2^{(2)}$ としてのウエイト $\in \text{wt}(\lambda)$ と書くことにする。

右のような "カレンダ"- を描いて。

数字 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ のところを $\bigcirc$ でかき、これを

"石" と呼ぶ。右の例では

$$\lambda = (9, 7, 4, 3).$$

1 ③

2

④ 5 ⑦

6

8 ⑨ 11

: : :

このとき $\text{wt}(\lambda) + \delta \leq \text{wt}(\mu)$ にも strict な分割 μ
 (正確には $Q_\mu(t)$ の $\text{wt}(\lambda) + \delta \leq \text{wt}(\mu)$ なる μ) は
 次の手順のどちらかで行える:

- (1) 一番左の列 (偶数列) の石を 1マス上げる。
- (2) 位置 2 にある石を取り去る。

また $\text{wt}(\lambda) + 2\delta \leq \text{wt}(\mu)$ になる方法は次のどちらか:

- (3) (1), (2) を 2 度続ける (これはアリマエ!)
- (4) 1 の列にある 3 の列の石を 1マス上げる。
- (5) 位置 1 と 3 にある石を同時に取り去る。

もちろん strict な分割を表わす絵の α で石は重なり、これはいい。
 (1) ~ (5) の操作をくり返し行くと有限回で "手づまり"
 に達する。その手づまりが $D_2^{(2)}$ の極大ウェイトを与えるわけである。
 具体的には、手づまりは

$$HC := \left\{ \emptyset, (4n+1, 4n-3, \dots, 5, 1), (4n+3, 4n-1, \dots, 7, 3) \mid n \geq 0 \right\}$$

で与えられることがすぐにわかる。先程の例 $\lambda = (9, 7, 4, 3)$
 では手づまりは (3) であり、 $\text{wt}(\lambda) = \text{wt}((3)) - 10\delta$ である
 ことが見てとれる。簡単のため HC の strict な分割に

$$L_n = (4n+1, 4n-3, \dots, 5, 1), \quad R_n = (4n+3, 4n-1, \dots, 7, 3)$$

と名前をつけておこう。

§4 変数変換.

ここで $A_1^{(4)} \cong D_2^{(2)}$ の基本表現の V 上の 2 つの実現を問題にしてきた。復習すると.

$$A_1^{(4)} \curvearrowright V(x) \quad (\S 2), \quad D_2^{(2)} \curvearrowright V(t) \quad (\S 3).$$

ソリトン方程式との関係で、私は前者を "KdV picture", 後者を "BKP picture" (正確には 4-reduction of BKP) と呼んでいる。両者は非常に簡単な変数変換で結びついている。

$$\begin{aligned} \omega: V(t) &\longrightarrow V(x) && \text{algebra isomorphism} \\ t_j &\longmapsto \left(\cos \frac{j\pi}{4}\right)^{-1} x_j && (j \geq 1, \text{ odd}) \end{aligned}$$

この変数変換で両者の vertex operator は定数倍を除いて一致することが示される。特に BKP picture の極スライトベクトルは ω により KdV picture のそれに定数倍を除いて一致する。(極スライト空間は 1 次元である) これと具体的に見ていこう。BKP picture の極スライトベクトルは集合 HC で与えられた。ここで

$$|L_n| = \frac{1}{2}(2n+1)(2n+2) = |\Delta_{2n+1}|, \quad |R_n| = \frac{1}{2}(2n+2)(2n+3) = |\Delta_{2n+2}|$$

に注意する。一般に strict な分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ に対して、その "doubling" ε ,

$$\text{dbl}(\lambda) = \left(\left[\frac{\lambda_1+1}{2} \right], \left[\frac{\lambda_1}{2} \right], \left[\frac{\lambda_2+1}{2} \right], \left[\frac{\lambda_2}{2} \right], \dots, \left[\frac{\lambda_\ell+1}{2} \right], \left[\frac{\lambda_\ell}{2} \right] \right)$$

により定義すると $\text{dbl}(L_n) = \Delta_{2n+1}$, $\text{dbl}(R_n) = \Delta_{2n+2}$ となる。変数重複 $\bar{w}$ は多項式の次数と変数 n の $\mathbb{Z}$ 上のことより, $n \geq 0$ に対して,

$$\bar{w}(Q_{L_n}) = (\text{const}) S_{\Delta_{2n+1}}, \quad \bar{w}(Q_{R_n}) = (\text{const}) S_{\Delta_{2n+2}}$$

がわかる。右辺の定数はアフィンリー環の表現論的な立場からは計算できるし、また必要もないものだが、対称群とその被覆群のモジュラー表現の結果と援用することにより、特定できる $[NY]$ 。

$$\begin{aligned} \text{定理} \quad & \begin{cases} \bar{w}(Q_{L_n}) = 2^{\frac{n+1}{2}} S_{\Delta_{2n+1}} \\ \bar{w}(Q_{R_n}) = 2^{\frac{n+1}{2}} S_{\Delta_{2n+2}} \end{cases} \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

基本表現とシュアー函数の話はもう何年も続けており、
 “そろそろ止めよう” と思ってる。ところが決心し
 ようとするとおもしろい側面が見えてくる、ということがく
 り返りして、不適切な関係は断ち切れないでいる。もうしば
 らくつま合ふことになるのだと思う。

————— 某氏は眠ってしまった...

文献

[ANY] S. Ariki, T. Nakajima and H. -F. Yamada: Reduced Schur functions and the Littlewood-Richardson coefficients, J. London Math. Soc. (to appear)

[HH] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys: Projective Representations of the Symmetric Groups, Oxford, 1992

[K] V. G. Kac: Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd. ed., Cambridge, 1990

[LW] J. Lepowsky and R. L. Wilson: Construction of the affine Lie algebra $A_l^{(1)}$, Comm. Math. Phys. **62** (1978), 43-53

[MY] K. Mimachi and Y. Yamada: Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials, Comm. Math. Phys. **174** (1995), 447-455

[NY] T. Nakajima and H. -F. Yamada: Schur's Q-functions and twisted affine Lie algebras, preprint, 1998

[W] M. Wakimoto: Basic representations of extended affine Lie algebras, 数理研講究録 **503** (1983), 36-46

[Y] 山田裕史: 基本表現のウェイトベクトルとシューア函数, 第12回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (1996), 130-149

1999年2月21日.