

Link の Art invariant と polynomial invariants

大阪市立大学理学部 村上 斉 (Hitoshi Murakami)

Alexander, Conway, Jones, Freyd, Yetter, Hoste, Lickorish, Millett, Ocneanu, Przytycki, Traczyk [1, 3, 5, 12, 14, 15, 20, 27] によつて導入された polynomial invariants の持つ性質をいくつか述べる。§1 では, Conway polynomial $\nabla_L(z)$ と Art invariant $\text{Art}(L)$ [28] との関係を, §2 では, Jones polynomial $V_L(t)$ と $\text{Art}(L)$ との関係を, §3 では, n 個の Seifert circles からできる link の 2-variable Jones polynomial $P_L(a, z)$ のみたす公式について論じる。

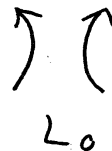
§0 準備

定義 0.1 L を S^3 の中の向き付けられた link とする。 L の 2-variable Jones polynomial $P_L(a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ を, 次の性質 (I), (II) をみたすように定義する。[5, 12, 15, 20, 27]

(I) $P_0(a, z) = 1$, ただし O は trivial knot.

(II) L_+, L_-, L_0 が次の図のように与えられているとき,

$$a^{-1}P_{L_+} - a P_{L_-} + z P_{L_0} = 0,$$



ただし, 上の図以外の部分の diagram はすべて同じ。

Alexander polynomial $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}]$ ([1]) は

$$\Delta_L(t) = P_L(1, t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{で},$$

Conway polynomial $V_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ ([3, 16]) は

$$V_L(z) = P_L(1, z) \quad \text{で},$$

Jones polynomial $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}]$ ([14, 15]) は

$$V_L(t) = P_L(t, t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{で}$$

それぞれ定義する。

次に link の Art invariant を定義する。まず, link $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ が proper であるとは $lk(K_i, L - K_i) \equiv 0 \pmod{2}$ がすべての i について成り立つことである。ただし, lk は

linking number.

定義 0.2 L を proper link, F を L の ^{connected} Seifert surface とするとき, $\mathbb{Z}_2$ 上の quadratic form

$$f: H_1(F; \mathbb{Z}_2) / \text{im } H_1(\partial F; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

を, $f(x) = lk(x, x^+)$ で定義する。ただし x^+ は, cycle x を F の表側に push-off したものである。この f のとり値が, 0 の方が多いとき $Arf(L) = 0$, 1 の方が多いとき $Arf(L) = 1$ と定める。

実際には, 次の Kauffman により与えられた定理を使って Arf invariant を計算することにする。

定理 0.1 [16, 17] K が knot のとき

$$Arf(K) \equiv V_K(z) \text{ の } z^2 \text{ の係数 (mod 2)}.$$

link の場合は, 次の定理が基本的である。

定理 0.2 [28] knot K と proper link L が "relate" しているとき,

$$\text{Arf}(K) = \text{Arf}(L).$$

ただし, relate していふとは, $S^3 \times [0, 1]$ に proper, locally flat にうめ:まれた disk with holes D があり, $D \cap S^3 \times \{0\} = K$, $D \cap S^3 \times \{1\} = -L$ となることをいふ。

§1. Arf invariant と Conway polynomial

この section は [23] の内容を要約したものである。なお, [23] の論文の校正中に, 大阪市大の作間氏に大変お世話になりました。この場をかりてお礼申し上げます。ありがとうございました。

定義 1.1. L の Conway polynomial $V_L(z)$ の $n-1$ 次の係数を mod 2 でみたものを $C(L)$ と表す。 ($\#(L) = n$)

次の定理は [26] の定理を $V_L(z)$ の言葉で言い換えたものである。[10] でも同じ定理が $V_L(z)$ の言葉で示されているが, この証明とは全く違っている。

定理 1.1 $L = K_1 \cup K_2$ を 2-component proper link とする。

このとき

$$\text{Arf}(L) = C(L) + C(K_1) + C(K_2).$$

証明 L の diagram を考え, $x_1, x_2, \dots, x_m$ を K_2 と K_1 の crossing のうち K_2 が K_1 の下を通る, 正しいものとする。 (m は even)

L_i を, x_1 から x_i までの crossing を入れた link, k_i を L_i の crossing x_i を smoothing ($\nearrow \searrow$ or $\nwarrow \swarrow$ を $\sim (=)$) したものをとする。 $V_L(z)$ の定義より

$$\begin{aligned} V_L(z) &\equiv V_{L_1}(z) + z V_{k_1}(z) \\ &\equiv V_{L_2}(z) + z V_{k_2}(z) + z V_{k_1}(z) \\ &\equiv \dots \equiv V_{L_m} + z \left\{ \sum_{i=1}^m V_{k_i}(z) \right\} \pmod{2}. \end{aligned}$$

$\therefore z$ は L_m は split link だから $V_{L_m} = 0$ 。よって $V_L(z) \equiv z \left\{ \sum_{i=1}^m V_{k_i}(z) \right\} \pmod{2}$ 。つまり $C(L) \equiv \sum_{i=1}^m C(k_i) \pmod{2}$ 。

$\therefore z$ は, k_{2j} と k_{2j+1} は, z を L_{2j} とする proper link に relate してあるから $Arf(k_{2j}) = Arf(k_{2j+1})$ (定理 0.2), 定理 0.1 より $C(k_{2j}) \equiv C(k_{2j+1})$ 。よって, $C(L) \equiv C(k_1) + C(k_m)$ 。

$z=3$ から, $C(k_1) = Arf(k_1) = Arf(L)$, $C(k_m) = Arf(k_m) = Arf(K_1 \# K_2) = Arf(K_1) + Arf(K_2) = C(K_1) + C(K_2)$ だから求める式を得る。

(証明終り)

この方法により, いろいろな種類の link について Arf

invariant を計算することが出来る。(証明は省略)

定理 1.2 L を purely proper link (つまり, 各成分 K_i, K_j について $lk(K_i, K_j) \equiv 0 \pmod{2}$) とすると,

$$Arf(L) = \sum_{l \subseteq L} C(l), \quad (\text{mod } 2),$$

ここで l は L の sublink すべてを動く。

注 [10] でも同じ式が示されている。また [11], [29] によると, 各成分間の linking number が 0 かつ $C(l) = 0$ (ただし $\#(l) \geq 4$) だから, この場合上の式は, と簡単になる。

定理 1.3 $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ を, 次の性質をもつ proper link とする。

「 K_1 と K_2 , K_2 と K_3 , ..., K_n と K_1 のみが, diagram 上で絡んでいる。しかもその linking number はすべて odd。」

このとき

$$Arf(L) = C(L) + (n+1) \left\{ \sum_{i=1}^n C(K_i) \right\} \quad (\text{mod } 2)$$

定理 1.4 $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ を 3-component proper link とする。

(i) L が purely proper ならば

$$\text{Arf}(L) = C(L) + C(K_1 \cup K_2) + C(K_2 \cup K_3) + C(K_3 \cup K_1) \\ + C(K_1) + C(K_2) + C(K_3) \pmod{2}$$

(ii) $\text{lk}(K_i, K_j) \equiv 1 \pmod{2}$ ならば

$$\text{Arf}(L) = C(L)$$

注 上の定理は定理 1.2, 1.3 を組み合わせたもの。

定理 1.5 $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ を 4-component proper link とする。

(i) L が purely proper ならば定理 1.2 の形。

(ii) $\text{lk}(K_4, K_i) \equiv 0 \pmod{2}$, $i=1, 2, 3$ かつ

$$\text{lk}(K_i, K_j) \equiv 1 \pmod{2} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

のときは

$$\text{Arf}(L) = C(L) + C(K_1 \cup K_2 \cup K_3) + C(K_4).$$

(iii) $\text{lk}(K_1, K_3) \equiv \text{lk}(K_2, K_4) \equiv 0 \pmod{2}$,

$$\text{lk}(K_i, K_j) \equiv 1 \pmod{2}, \quad (i, j \text{ は上以外}),$$

のときは

$$\text{Arf}(L) = C(L) + C(K_1 \cup K_3) + C(K_2 \cup K_4) \\ + C(K_1) + C(K_2) + C(K_3) + C(K_4).$$

3 or 4-component link で proper なものは上の定理の場合しかないので, 4 components 以下の link の Art invariant は V_L によって完全に表現される.

同じ方法でこれ以上の components をもつ link についても公式がでそうだが, 一般の式はまだできていない. §2 の結果との関係を考えるのもおもしろいかもしれない. また, [11] にある公式との類似性も興味深い. (Casson invariant については [6] 参照)
Casson invariant の

§2. Art invariant と Jones polynomial

この section は [24] の内容を要約したものである.

$i = \sqrt{-1}$, $\sqrt{i} = e^{\frac{5}{8} \cdot 2\pi i}$ としたとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1

$$V_L(i) = \begin{cases} (\sqrt{2})^{\#(L)-1} \times (-1)^{\#(L)-1} & , L \text{ が proper かつ } \text{Art}(L) = 0 \\ -(\sqrt{2})^{\#(L)-1} \times (-1)^{\#(L)-1} & , L \text{ が proper かつ } \text{Art}(L) = 1 \\ 0 & , L \text{ が non-proper} \end{cases}$$

注 右辺の符号が [24] と違, ているのは, $V_L(x)$ の定義が違, ているからである.

証明は, 次の lemma を使い, resolution tree についての induction で行う. 詳細は省略するので [24] を参照.

補題 2.1 L_+, L_-, L_0 を, §0 の図のような link とし,
 $\#(L_+) = \#(L_-) = \#(L_0) - 1$ とする. L_+ と L_- が proper なら,
 L_0 が non-proper なら $Arf(L_+) \neq Arf(L_-)$.

証明は, [17], [21] で示されている $Arf(K_+) + Arf(K_-)$
 $\equiv lk(k_1, k_2) \pmod{2}$ を使う. ここで K_+, K_- , k_1, k_2
 は, §0 の図のようになっている knot または 2-component link
 である. proper link を fusion しても Arf invariant はかわらない
 (定理 0.2) に注意.

この結果も, §1 と同様, 形式的に示すためにすぎない,
 なぜこうなるのかといふ, 本質的な理由はなぜのままである.

§3. 2-variable Jones polynomial に関する公式

この section は [25] の内容を要約したものである.

D を link L の diagram としたとき crossing の sign の総和を
 $w(D)$ とかき writhe とよぶ. [18, 19] ($\searrow$ が -1 , $\swarrow$ が $+1$)
 L が braid として表すことができるとき $w(D)$ は, その exponent sum
 に一致する. また $w(D)$ は [22] において $\tilde{w}(D)$ とかかれて
 いるものである.

D の Seifert circles とは D の crossing をすべて smoothing した結
 果得られる simple closed curves のことである.

次の式が成り立ち、してしまう。(§1, §2 と同様, 存せざるものはまだわからない。)

定理 3.1 n 個の Seifert circles からなる diagram D の表す link を L とする。このとき

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \prod_{\substack{0 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_j a_k^{-1} - a_j^{-1} a_k) \right\} a_i^{-w(D)} P_L(a_i, z) = 0.$$

注. L を closed n -braid としても表わしても同じ式が成立する。

$P_L(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) = 1$ [20], $P_L(x^{-\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) = (-1)^{\#(L)-1}$,
 $P_L(x^{-1}, x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) = (-1)^{\#(L)-1} V_L(x^{-1})$ および定義 0.1 より,
 次の系が成り立つ。

系 3.1 L を 3 個の Seifert circles からなる link とする。このとき

$$P_L(a, x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) = a^{w(D)} \left\{ \frac{(a - a^{-1})}{(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})(x - x^{-1})} \left\{ x^{-\frac{1}{2}w(D)} (x^{\frac{1}{2}}a - x^{-\frac{1}{2}}a^{-1}) \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^{w(D)} x^{\frac{1}{2}w(D)} (x^{\frac{1}{2}}a^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}a) \right\} + \frac{(x^{\frac{1}{2}}a^{-1} - x^{\frac{1}{2}}a)(x^{\frac{1}{2}}a - x^{-\frac{1}{2}}a^{-1})}{(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2} \Delta_L(x) \right.$$

系 3.2 L を 4 個の Seifert circle から成る link とする。
 このとき $P_L(a, x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})$ は, Δ_L と V_L または V_L のみ を使,
 て表せる. (くもしい形は [25] 参照)

系 3.3 L を 5 個の Seifert circle から成る link とする。
 このとき $P_L(a, x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})$ は Δ_L と V_L を使, て表せる. (く
 もしい形は [25] 参照)

注. 系 3.1 は [4, 15] に示されている. その証明は,
 ここで述べるものとは全く違っており, Hecke algebra の表現
 によるものである. おそらく系 3.2, 3.3 についても同じよ
 うな説明がもっともなと思われる. ([2] も参照)

定理 3.1 の証明には次の lemma が基本的な役割を果たす.

補題 3.1

$\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{\omega(D)} P_L(a_i, z)$ は, $P_L(a_0, z)$ に関する
 axiom (I) を満たす.

証明は確かめてみるだけで, すぐにできる. 上の補題の意
 味するところは, $\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{\omega(D)} P_L(a_i, z)$ が, $P_L(a_0, z)$ と同じ

“漸化式”をみたすということである。だからそれらの一次結合 $\sum_{i=1}^n f_i \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} p_i(a_i, z)$ (ただし, f_i は L に無関係) も $p_L(a_0, z)$ と同じ“漸化式”をみたす。あとは“初期値”が一致すれば, すべての L について $p_L(a_0, z)$ と等しくなり, 定理 3.1 が従う。その“初期値”が n 個しかなく, 従って f_i についての連立 n 元一次方程式が解けることを保証しているのが次の lemma である。

補題 3.2 すべての link diagram D は, いくつかの crossing を入れかえることにより, writhe が 0 か 1 であるような trivial link にできる。

証明は省略するが, $n + \#(L) \equiv w(D) \pmod{2}$ であることから, 上で得られる trivial link の writhe は一意に定まることが注意されたい。この補題 3.2 と上に述べたことにより, “初期値”は n 個しかなく, つまり任意の link L の resolution ^(tree) をと, たとえ, その一番下にくる leaves は n 個の種類しかないことがわかる。実際に行列式の計算をして, Cramer の方法により一次方程式を解いてもよいが, 次の補題に気付けば, 定理 3.1 の証明は容易である。

補題 3.3
$$F_p = \sum_{i=0}^n (-1)^i \left\{ \prod_{\substack{0 \leq j < k \leq n \\ j \neq i, k \neq i}} (a_j a_k^{-1} - a_j^{-1} a_k) \right\} a_i^p$$

とおくと, $|p| \leq n-1$, $p \equiv n-1 \pmod{2}$ とする整数 p について $F_p = 0$ である.

この lemma は, F_p の次数と, その解の個数 (a_0 の方程式として見たとき $F_p = 0$ の解 $a = z$) を比較することにより示される。これを使い, 補題 3.2 で得られる link L に対しては $a_i^{-w(D)} P_L(a_i, z)$ の a_i についての次数が $n-1$ 以下であることに注意すれば, 定理 3.1 が示される。

また, F_p は, $|p| \geq n$ のときは 0 になることに注意すると, 次の Morton, Franko, Williams による定理が得られる。

定理 3.2 [4, 22]

$$w(D) - (n-1) \leq e \leq E \leq w(D) + (n-1).$$

ただし, n は D の Seifert arcs の数, e, E はそれぞれ $P_L(a, z)$ の a についての最低, 最高次数。

注 定理 3.1 は定理 3.2 から示すことができる。(補題 3.3 を使う) つまり, 定理 3.1 から, 定理 3.2 より強い結果は得られることがわかる。大阪大学の山田氏によれば,

Seifert circles の最小数と braid index とは等しい (つまり, n 個の Seifert circles からできる diagram は, 同じ数の strings からできる braid に移せる. なお, これは神戸大学の中西氏の予想である。) ので, この不等式は braid index についても同じ強さを持つている。また, [15] には, 10-crossing 以下の knot の braid index が示されている。(10₁₃₂, 10₁₅₀, 10₁₅₆ 以外は決定されている。) braid index の決定については, 最近 H.R. Morton と H.B. Short が preprint "The 2-variable polynomial of cable knots" で cabling を使った評価を与えようとしている。

Morton, Frank, Williams の不等式からわかるもう一つのことは, $E - e = 2(n-1)$ のとき $w(0) = \frac{1}{2}(E+e)$ となること, つまり Seifert circles の数がきりきりまで $(\frac{1}{2}(E+e) \text{ まで})$ 落とされたとき, w は link の invariant になることである。

何度も書いたことであるが, 以上の結果は単に式を計算しているだけであったものであり, 理論的な根拠は存在しない。これらの結果が成立する原因を究明することにより, 2-variable polynomial の幾何学的な意味付けを多少なりとも行なうことが今後の課題である。

References

- [1] J.W. Alexander : Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc., 30(1928), 275-306.
- [2] J.S. Birman : On the Jones polynomial of closed 3-braids, Invent. Math. 81(1985), 287-294.
- [3] J.H. Conway : An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Oxford and New York, 1969, 329-358.
- [4] J. Franks and R.F. Williams : Braids and the Jones-Conway polynomial. Preprint, North-Western, 1985.
- [5] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu : A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12(1985), 239-246.
- [6] S. Fukuhara : Casson の不変量について, 「低次元多様体の幾何学的諸相」, 1985.
- [7] C.A. Giller : A family of links and the Conway calculus, Trans. Amer. Math. Soc. 270(1982), 75-109.
- [8] C.McA. Gordon (ed.) : Problems, Knot Theory (Proc., Plans-sur-Bex, 1977), Lecture Notes in Math., 685, Springer-Verlag, 1978, 309-311.
- [9] F. Hosokawa : On V -polynomials of links, Osaka Math. J., 10 (1958), 273-282.
- [10] J. Hoste : The Arf invariant of a totally proper link, Topology Appl., 18(1984), 163-177.
- [11] J. Hoste : A formula for Casson's invariant, Preprint, Rutgers University, 1985.
- [12] J. Hoste : A polynomial invariant of knots and links, Preprint, Rutgers University, 1984.
- [13] V.F.R. Jones : Braid groups, Hecke algebras and type II_1 factors, Geometric Methods in Operator Algebras, Proc. of the US-Japan Seminar (1986), 242-273.
- [14] V.F.R. Jones : A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 12(1985), 103-111.
- [15] V.F.R. Jones : Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Preprint, University of California, Berkeley, 1986.
- [16] L.H. Kauffman : The Conway polynomial, Topology, 20(1981), 101-108.

- [17] L.H. Kauffman : Formal Knot Theory, Math. Notes, 30, Princeton Univ. Press, 1983.
- [18] L.H. Kauffman : A geometric interpretation of the generalized polynomial, Preprint, 1985.
- [19] L.H. Kauffman : An invariant of regular isotopy, Preprint, 1985.
- [20] W.B.R. Lickorish and K.C. Millett : A polynomial invariant of oriented links, to appear in Topology.
- [21] Y. Matsumoto : An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin, Preprint, 1977 (to appear in Astérisque).
- [22] H.R. Morton : Seifert circles and knot polynomials, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 99(1986), 107-109.
- [23] H. Murakami : The Arf invariant and the Conway polynomial of a link, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 11(1983), 335-344.
- [24] H. Murakami : A recursive calculation of the Arf invariant of a link, J. Math. Soc. Japan, 38(1986).
- [25] H. Murakami : A formula for the two-variable Jones polynomial, Preprint, Osaka City University, 1986.
- [26] K. Murasugi : On the Arf invariant of links, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 95(1984), 61-69.
- [27] J.H. Przytycki and P. Traczyk : Invariants of links of Conway type, to appear in Kobe J. Math.
- [28] R.A. Robertello : An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math., 18(1965), 543-555.
- [29] K. Sugisita : アルフ不変量とT-ジナス, 「グラフ理論と3次元多様体」, 数理解析研究所講究録 575, 1985.