

退化した楕円型方程式に対する境界値問題と 分数巾のソボレフ空間について

立命大 理工 中岡 明

§1. 序

ここでは、次の方程式をとり扱う。

$$(1, 1) \left\{ \begin{array}{l} -p(x)A(x, D)u + \sum_{j=1}^n p_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u + \lambda u = f(x) \\ \qquad \qquad \qquad \text{in } \Omega \\ B_j(x, D)u|_{\partial\Omega} = \phi \quad (j=1, 2). \end{array} \right.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は十分滑らかな境界をもつ領域で、その境界 $\partial\Omega$ は compact な hypersurface とする。 $A(x, D)$ は Ω で定義された2階の楕円型作用素であり

$$A(x, D) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x).$$

において、 $a_{jk}(x) \in \mathcal{B}^1(\Omega)$ は symmetric で、 $b_j(x)$, $c(x)$ は 各々 $\mathcal{B}^0(\Omega)$ に属しているものとする。又、

我々は $A(x, D)$ の一様楕円性

$$(1.2) \quad \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq C |\xi|^2$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

を仮定する。 $p_j(x)$, $q(x)$ については、各々 $C^0(\Omega)$ に属しているものとする。

さて $p(x)$ は、real valued function であり、次の条件を満たしているものとする。

i) $0 \leq p(x) \leq M$ か $p(x) \in C^0(\bar{\Omega})$.

ii) $p(x)$ は $\partial\Omega$ 上でのみ vanish する。

iii) $p(x)$ は、 $\partial\Omega$ の適当な近傍では、 $r = r(x) = \text{dis}(x, \partial\Omega)$ のみに depend する。

iv) 十分小なる $r = r(x)$ に対して、 $C_1 r^\alpha \leq p(x) \leq C_2 r^\alpha$ となる C_1, C_2 (定数) 及び α ($0 < \alpha < 1$) が存在する。

v) Ω が非有界の時には、 $p(x) \geq K > 0$ ($|x| \rightarrow \infty$) となる K が存在する。

又、境界条件に与える $B_j(x, D)$ ($j=1, 2$) については、

$$B_1(x, D) = 1, \quad B_2(x, D) = \frac{\partial}{\partial \nu} + \sigma \quad \text{とする。ここに}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \nu_j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

であり、 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ は $\partial\Omega$ 上の各点における外向単位法線ベクトルである。 σ については

$\delta \in \mathcal{B}^0(\partial\Omega)$ を仮定する。

退化した楕円型方程式を扱う場合、関数解析的方法によろ
うとすれば、どのような関数空間を課定するかということ
が一つの問題となるが、方程式 (1.1) に対しては、次の
定義 1.1 及び 定義 1.2 で与えられる空間が有効で
ある。

定義 1.1. $L^2(\Omega, p^{-1})$ であって、 Ω 上の関数で

$$\|u\|_{p^{-1}}^2 \equiv \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{p(x)} dx < +\infty$$

であるようなものの全体を表わす。

定義 1.2. $H^m(\Omega, p)$ であって、 Ω 上の関数で

$$\|u\|_{m,p}^2 \equiv \int_{\Omega} (p(x) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + |u|^2) dx < +\infty$$

であるようなものの全体を表わす。

$$L^2(\Omega, p^{-1}) \text{ 及び } H^m(\Omega, p) \text{ は 内積 } (u, v)_{p^{-1}} \equiv \int_{\Omega} \frac{u(x) \overline{v(x)}}{p(x)} dx, \quad (u, v)_{m,p} \equiv \int_{\Omega} (p(x) \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} + u \overline{v}) dx$$

によって 各々 ヒルベルト空間になる。

我々の目的は、次の定理を示すことである。

定理 1. 1 任意の $f(x) \in L^2(\Omega, p^{-1})$ と任意の $\phi \in H^\beta(\partial\Omega)$ に対して、ある実数 λ_0 があって、 $\lambda \geq \lambda_0$ なるすべての λ に対して、方程式 (1.1) は、一意的な解 $u(x) \in H^2(\Omega, p)$ をもつ。ここで β は

$$\beta = \begin{cases} \frac{3-\alpha}{2} & (\text{境界作用素が } B_1) \\ \frac{1-\alpha}{2} & (\text{境界作用素が } B_2) \end{cases}$$

である。

§2 $H^m(\Omega, p)$ に対する imbedding theorem と若干の estimates.

この節では、 $H^m(\Omega, p)$ の性質と、それに伴ういくつかの a priori estimates を準備する。

まず、 $H^m(\Omega, p)$ の通常のソボレフ空間との関係、特に $\partial\Omega$ への trace に関連して、次の定理がある。

定理 2. 1 (Lizorkin and Uspenskii). 次のめ込み (連続) が成り立つ。

$$H^m(G, p) \longrightarrow H^{m-\alpha/2}(G) \longrightarrow H^{(m-\alpha/2-(n-k)/2)}(G_k)$$

$(m - \alpha/2 - (n-k)/2 > 0 \text{ かつ } k < m).$

ただし, $G \subset \mathbb{R}^n$ は十分に滑らかな領域で, G_k は十分に滑らかな k 次元 manifold とする。

(我々が適用するのは, $G_k = \partial\Omega$ の場合である。)

さて, 問題の局所化に備えて, $H^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$ を導入しておこう。ここで, $\mathbb{R}_+^n = \{(x, y); x > 0, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ である。 $H^m(\Omega, \rho)$ (Ω は一般領域) の特に $\partial\Omega$ の近傍での局所化に関連しては, 一般性を失うことなく, ρ は x のみに depend するとしてよい。又, ここで, $[0, 1]$ 上で, $C_1 x^\alpha \leq \rho(x) \leq C_2 x^\alpha$ が成り立っているものとしておく。

命題 2.1. $\forall u(x, y) \in H^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$ に対して次の評価が成り立つ。

$$(2.1) \quad \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|D^\alpha u|^2}{\rho(x)} dx dy \leq \varepsilon \|u\|_{m, \rho}^2 + C_\varepsilon \|u\|^2$$

$$(|\alpha| \leq m-1)$$

ただし, $\varepsilon > 0$ は任意である。

命題 2.1 の系 2.1

系 2.1. $u(x) \in H^m(\Omega, p)$ とする, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(2.2) \quad \|D^\alpha u\|_{p-1} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p} + C_\varepsilon \|u\|$$

がなりたつ。

又, 定理 2.1 によれば, 次の命題も明らかである。

命題 2.2. $u(x) \in H^m(\Omega, p)$ とする, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(2.3) \quad \left| \gamma D^\beta u \right|_{m-|\beta|-\frac{1+p}{2}} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p} + C_\varepsilon \|u\|$$

$$(|\beta| \leq m-1)$$

がなりたつ。ただし, γ は $\partial\Omega$ への trace を表わし
 $|\cdot|_\gamma$ は $H^s(\partial\Omega)$ のノルムを表わす。

方程式 (1.1) に homogeneous な境界条件の場合に帰着させる為に, 次の命題を準備しよう。

命題, 2, 3. $B(x, D)$ を その係数が適当に滑かな, p 階の微分作用素 ($p < m$) とし, $B(x, \nu)$ は決して 0 にならないとする。この時, $\forall \phi \in H^{m-p-\frac{1+p}{2}}(\partial\Omega)$ に対して,

$$B(x, D)u \Big|_{\partial\Omega} = \phi$$

となるような $u(x) \in H^m(\Omega, p)$ が存在する。

§3. 解の a priori estimates

この節では, 解の a priori estimate を導くが, まず, 第一段階として, 半空間 $\mathbb{R}_+^n$ における次のような特別の方程式について考えよう。

$$(3.1) \begin{cases} -p(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y_j} + \sum_{j,k=1}^n b_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} - u \right) = f(x, y) \\ u(x, y) \Big|_{x=0} = \phi(y) \end{cases}$$

ここで, $a_j (j=1, \dots, n-1)$ と $b_{jk} (j, k=1, \dots, n-1)$ は全て real constants であり, $b_{jk} = b_{kj}$ であり,

$$\xi^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} a_j \xi \eta_j + \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{jk} \eta_j \eta_k \geq c(\xi^2 + |\eta|^2)$$

が, $\forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ に対して成り立つものとする。

又, $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}_+^n, \rho^{-1})$ であり, $\phi(y) \in H^{\frac{3-n}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ であるとする。

補題, 3.1. (Inakawa) $f(x) \in L^2(0, \infty)$ とする。

$$(K_\tau f)(x) = \int_0^\infty \tau e^{-\tau|x-\xi|} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} f(\xi) d\xi \quad (-1 < x < 1, \tau > 0)$$

とあると, 次の estimate が成り立つ。

$$\|K_\tau f\| \leq C \|f\|. \quad (C \text{ は } \tau \text{ に independent}).$$

さて, (3.1) に tangential 方向に Fourier 変換を施して (その image を $\hat{\cdot}$ をつけて表わす) $\hat{u}(x, \eta)$ を explicit に表わすと,

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \hat{u}(x, \eta) = & \frac{1}{2\tau(\eta)} \int_0^\infty e^{\tau(\eta)|x-\xi|} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi + \\ & + e^{\tau(\eta)x} \left(\hat{\phi}(\eta) - \frac{1}{2\tau(\eta)} \int_0^\infty e^{\tau(\eta)\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $\tau(\eta)$ は

$$\tau^2 - 2\lambda \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \eta_j \right) \tau - \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{jk} \eta_j \eta_k - 1 = 0$$

の根で, real part が negative のものがある。

ここで、(3.2) の $\hat{u}(x, \eta)$ に対し、補題 3.1, を適用すれば、次の評価をうる。

$$(3.3) \quad \|u\|_{2,p} \leq \text{const.} \left(\|f\|_{0,p-1} + |\phi|_{\frac{3-\alpha}{2}} \right).$$

全く同様に、方程式

$$(3.4) \quad \begin{cases} -\rho(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y_j} + \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} - (1+\sigma) u \right) \\ \quad \quad \quad = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + \sigma u \Big|_{x=0} = \phi(y) \end{cases}$$

(σ は定数)

に対し、次の評価をうる。

$$(3.5) \quad \|u\|_{2,p} \leq \text{const.} \left(\|f\|_{0,p-1} + |\phi|_{\frac{1-\alpha}{2}} \right).$$

評価式 (3.3) 及び (3.5) を考慮に、 Ω に対する単位分解を用いれば、結局 次の定理を得る。

定理. 3.1, $\forall u(x) \in H^2(\Omega, \rho)$ に対し、次の評価が成り立つ。

$$(3.6) \quad \|u\|_{2,p} \leq \text{const} \left(\|f\|_{p-1} + |\phi|_{\beta} + \|u\| \right)$$

ただし,

$$-p(x)A(x,D)u + \sum_{j=1}^n p_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u = f(x)$$

$$B_j(x,D)u|_{\partial\Omega} = \phi \quad (j=1, 2)$$

であり,

$$\beta = \begin{cases} \frac{3-\alpha}{2} & (j=1) \\ \frac{1-\alpha}{2} & (j=2) \end{cases}$$

である。

§4. Weak solutions. この節では, $(1, 1)$ に対する weak solution を定義し, 併せてその存在を示す。我々は, 命題 2, 3 を考慮して, 寧ろ homogeneous な境界条件のもとで考える。

まず, 次の補題が成り立つことに注意しよう。

補題 4.1, $u(x), v(x) \in \mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$ とする。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(4.1) \quad \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{p-1} \right| \leq \varepsilon \|u\|_1 \|v\|_1 + C_\varepsilon \|u\|_1 \|v\|_1 \\ (j=1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

補題 4.1, に注意して, 我々は, 境界条件 $u(x)|_{\partial\Omega} = 0$

に対する (1.1) の weak solution を次のように定義する。

定義 4.1, $u(x) \in \mathcal{D}'_L(\Omega)$ が, $u(x)|_{\partial\Omega} = 0$ を満たす (1.1) の weak solution であるとは, すべての $v(x) \in \mathcal{D}'_L(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} (4.2) \quad D[u, v] &\equiv \sum_{j,k=1}^n \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) + \sum_{j=1}^n \left(b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right) \\ &+ (c(x)u, v) + \sum_{j=1}^n \left(p_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{p-1} + (q(x)u, v)_{p-1} + \lambda(u, v)_{p-1} \\ &= (f, v)_{p-1} \end{aligned}$$

をみたすときという。

次の補題, 及び命題に注意すれば, unique to weak solution が λ が十分大になれば存在するといえる。

補題 4.2, $f(x) \in L^2(\Omega, p^{-1})$, $v(x) \in H^1(\Omega)$ とする。

$$(4.3) \quad |(f, v)_{p-1}| \leq \text{const.} \|f\|_{p-1} \|v\|_1$$

がなりたつ。

補題 4.3, $u(x) \in \mathcal{D}'_L(\Omega)$ とすれば, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(4.4) \quad \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, u \right)_{p^{-1}} \right| \leq \varepsilon \|u\|_1^2 + C_\varepsilon \|u\|^2$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

がなりたつ。

命題. 4. 1, $u(x), v(x) \in \mathcal{D}'_L(\Omega) \in L$, $\lambda(>0)$
を十分大きくとれば

$$(4.5) \quad |D[u, v]| \leq \text{const } \|u\|_1 \|v\|_1$$

$$(4.6) \quad \text{Re } D[u, u] \geq \text{const } \|u\|_1^2$$

がなりたつ。

以上の二とをまとめて、次の定理を得る。

定理. 4. 1, $\forall f(x) \in L^2(\Omega, p^{-1})$ に對し, ある
real number λ_0 があつて, $\forall \lambda \geq \lambda_0$ に對し

$$\begin{cases} -p(x)A(x, D)u + \sum_{j=1}^n p_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u + \lambda u = f(x) \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

は, unique weak solution である。

次に境界条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u|_{\partial\Omega} = 0$ の場合に対する weak solution を定義したいのである。この場合には $p_j(x) \equiv 0$ ($j=1, \dots, n$) としたいと困難である。従って、まず $p_j(x) \equiv 0$ ($j=1, \dots, n$) の時に p 次 weak solution を定義する。

定義 4.2, $u(x) \in H^1(\Omega)$ が $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u|_{\partial\Omega} = 0$ をみたす (1.1) (ただし $p_j(x) \equiv 0$ ($j=1, 2, \dots, n$)) の weak solution であるとは、すべての $v(x) \in H^1(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} (4.7) \quad N[u, v] &\equiv \sum_{j,k=1}^n (a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}) + \sum_{j=1}^n (b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, v) \\ &+ (c(x)u, v) + (q(x)u, v)_{p-1} + \lambda(u, v)_{p-1} + \\ &+ \langle \sigma u, v \rangle_{\partial\Omega} = (f, v)_{p-1} \end{aligned}$$

をみたすときである。ただし、 $\langle, \rangle_{\partial\Omega}$ は $L^2(\partial\Omega)$ の内積を表わす。

$N[u, v]$ が well-defined であるとは、次の補題に注意すればよい。

補題 4.4, $u(x) \in H^1(\Omega)$ とすると、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(4.8) \quad \|u\|_{p^{-1}} \leq \varepsilon \|u\|_1 + C_\varepsilon \|u\|$$

がなりたつ。

定理 4.1 の場合と同様にし、次の定理を得る。

定理 4.2, $\forall f(x) \in L^2(\Omega, p^{-1})$ に対し、ある real number λ_0 があって、 $\forall \lambda \geq \lambda_0$ に対し、

$$\begin{cases} -p(x)A(x, D)u + q(x)u + \lambda u = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

は、unique な weak solution を持つ。

§5. Weak solution の regularity 及び定理 1.1 の証明. この節では、前節で得られた weak solution の regularity, 即ち、weak solution が $H^2(\Omega, p)$ に属することを示し、かつ、定理 1.1 を完全に証明する。

regularity に関して云えば、内部 regularity については退化していない楕円型方程式の理論によって周知であるから問題は、境界の近傍での正則性を示すことにある。

問題は局所的なものであるから, $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ の場合に考察すれば十分である. 従って, 我々の方程式は, 次のようなものとする.

$$(5.1) \quad -p(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} (a_{00}(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} (a_{0j}(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{j0}(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jk}(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y_k} + b_0(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x, y) \frac{\partial u}{\partial y_j} + c(x, y) u \\ + q(x, y) u + \lambda u = f(x, y)$$

境界条件は

$$(5.2) \quad u(x, y) \Big|_{x=0} = 0$$

又は

$$(5.3) \quad a_{00}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{0j}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y_j} + \delta(y) u \Big|_{x=0} = 0.$$

さて, weak solution が $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ に属し $u|_0 = 0$ であることは,

$$-p(x) \left(b_0(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x, y) \frac{\partial u}{\partial y_j} + c(x, y) u \right) + q(x, y) u + \lambda u$$

は $L^2(\mathbb{R}_+^n, p^{-1})$ に属するから, 右辺に等しいことが必要である.

結局, 次の方程式を考へればよい.

$$(5.4) \quad -p \left(\frac{\partial}{\partial x} (a_{00}(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} (a_{0j}(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{j0}(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jk}(x, y) \frac{\partial u}{\partial y_k}) = f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}_+^n, p^{-1}).$$

ここで重要な働きをする tangential mollifier φ_ε^* を考えよう:

$$(\varphi_\varepsilon^* u)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_\varepsilon(y - \eta) u(x, \eta) d\eta.$$

(時には, $\varphi_\varepsilon^* u \in U_\varepsilon$ と表わすことにする。)

φ_ε^* に関し, 次の補題が成り立つ。

補題 5.1, $u(x, y) \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ とする。 $u_\varepsilon(x, y) \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} u(x, y)$ in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

補題 5.2, $u(x, y) \in L^2(\mathbb{R}_+^n, p^{-1})$ とする。 $u_\varepsilon(x, y) \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} u(x, y)$ in $L^2(\mathbb{R}_+^n, p^{-1})$.

補題 5.3 (Friedrichs). $u(x, y) \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$, $a(x, y) \in \beta^1(\mathbb{R}_+^n)$ とする。

$$[\varphi_\varepsilon^*, aD]u \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} 0 \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}_+^n)$$

ただし, D は $\partial/\partial x$ 又は $\partial/\partial y_j$ ($j=1, \dots, n-1$) であり,

$[,]$ は commutator を表わす。

さて, (5,4) において, $a_{00}(x, y) \equiv 1$ と仮定しても一般性を失わないことがわかるから以後 $a_{00}(x, y) \equiv 1$ とする。今, $u(x, y)$ を (5,3) (5,4) をみたす weak solution としよう。((5,2) をみたすものについても同様に, むしろ, より容易にできるので, (5,3) をみたす weak solution についてのみ考察する。) $u(x, y)$ は次の関係をみたしている。

$$\begin{aligned}
 (5,5) \quad & \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{0j} \frac{\partial u}{\partial y_j}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{j0} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) \\
 & + \sum_{j,k=1}^{n-1} \left(a_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j}, \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sigma(y) u(0, y) \overline{v(0, y)} dy \\
 & = (f, v)_{p-1}
 \end{aligned}$$

今, u の代りに u_ϵ を代入して, 整理すると, (5,5) は

$$\begin{aligned}
 (5,6) \quad & \left(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{0j} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y_j}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{j0} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) \\
 & + \sum_{j,k=1}^{n-1} \left(a_{jk} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial y_j}, \frac{\partial v}{\partial y_k} \right) - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sigma(y) u_\epsilon(0, y) \overline{v(0, y)} dy =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f_\varepsilon, v)_{p-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ ([\varphi_\varepsilon^*, a_{0j} \frac{\partial}{\partial y_j}] u, \frac{\partial v}{\partial x}) + ([\varphi_\varepsilon^*, a_{j0} \frac{\partial}{\partial x}] u, \frac{\partial v}{\partial y_j}) \right\} \\
&\quad - \sum_{j,k=1}^{n-1} ([\varphi_\varepsilon^*, a_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k}] u, \frac{\partial v}{\partial y_j}) + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ([\varphi_\varepsilon^*, \sigma] u)(0, y) \overline{v(0, y)} dy
\end{aligned}$$

となり, 従って $u_\varepsilon(x, y)$ は, distribution として,

$$\begin{aligned}
(5.7) \quad & -\rho(x) \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} (a_{0j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_j}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{j0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_k}) \right) = f_\varepsilon(x, y) + \rho \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} ([\varphi_\varepsilon^*, a_{0j} \frac{\partial}{\partial y_j}] u) \\
& \quad + \rho \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} ([\varphi_\varepsilon^*, a_{j0} \frac{\partial}{\partial x}] u) + \rho \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_j} ([\varphi_\varepsilon^*, a_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k}] u)
\end{aligned}$$

をみたす。 $u(x, y) \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ であつたことに注意すれば:

(5.7) を考慮するに依り $u_\varepsilon(x, y) \in H^2(\mathbb{R}_+^n, \rho)$ であることがわかり, 従つて, 又, $u_\varepsilon(x, y)$ は境界条件

$$(5.8) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{0j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_j} + \sigma u_\varepsilon \Big|_{x=0} = [\varphi_\varepsilon^*, \sigma] u \Big|_{x=0}$$

をみたすことがわかる。

そこで, 定理 3.1. を用ひれば, (5.7) の右辺を

$f_\varepsilon(x, y) + \rho g_\varepsilon(x, y)$ として, 次の評価を得る。

$$(5.9) \quad \|u_\varepsilon\|_{2,p} \leq \text{const} (\|f_\varepsilon\|_{p-1} + \|Pg_\varepsilon\|_{p-1} + \|u_\varepsilon\| \\ + |[\varphi_\varepsilon^*, \sigma] u |_{x=0} |_{\frac{1-\alpha}{2}}).$$

さて,

$$(5.10) \quad \|Pg_\varepsilon\|_{p-1} \leq \text{const} \|g_\varepsilon\|_1$$

であり, 又, $\tilde{\sigma}(x, y) \in \sigma(y)$ の $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$ への拡張とすれば

$$(5.11) \quad |[\varphi_\varepsilon^*, \sigma] u |_{x=0} |_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \| [\varphi_\varepsilon^*, \tilde{\sigma}] u \|_1$$

となり, 補題 5.1 ~ 5.3 を考慮すれば, $u_\varepsilon(x, y)$ は, $\varepsilon \rightarrow 0$ の時, $H^2(\mathbb{R}_+^n, p)$ で収束するとはわかる。そして, その極限は, weak solution $u(x, y)$ に等しいから結局 $u(x, y) \in H^2(\mathbb{R}_+^n, p)$ が従う。以上の二つを定理としてまとめておく。

定理, 5.1. $f(x) \in L^2(\Omega, p^{-1})$ とすると, §4 で得られた weak solution は $H^2(\Omega, p)$ に属し, 境界条件も $H^\beta(\partial\Omega)$ の意味でみたす。ただし, β は定理 1.1 で与えられたものである。

さて, 定理 1.1 を完全に証明するには, $p_j(x)$ が現われる方程式を考へねばならない。ここでは, 次の逐次近似

$$(5,12) \begin{cases} -P(x)A(x,D)u_m + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(x) \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_j} + qu_m + \lambda u_m \\ \quad \quad \quad = f(x) \\ B_j u_m|_{\partial\Omega} = 0 \quad (j=1,2) \\ \quad \quad \quad (t_2=t_2-L, u_0(x) \equiv 0) \end{cases}$$

によって考えよう。命題 2.1 によって, (5,12) は, $H^2(\Omega, p)$ の中の列 $\{u_m(x)\}$ を作ることもできる。 $\{u_m(x)\}$ について次の補題を得る。

補題. 5.4. $\{u_m(x)\}$ について, ある定数 c が存在して, $\lambda > c$ のとき, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(5,13) \quad \|u_m - u_{m-1}\|_{2,p} \leq \varepsilon \|u_{m-1} - u_{m-2}\|_{2,p} + \frac{C\varepsilon}{\lambda} \|u_{m-1} - u_{m-2}\|_{p-1}$$

$$(5,14) \quad \|u_m - u_{m-1}\|_{p-1} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda - c} \|u_{m-1} - u_{m-2}\|_{2,p} + \frac{C\varepsilon}{\lambda - c} \|u_{m-1} - u_{m-2}\|_{p-1}$$

がなりたつ。

補題の証明は, 命題, 2.1 及び定理, 3.1 を使えばよい。さて, (5,14) の両辺に $C\varepsilon/\varepsilon$ をかけて, 辺々加えれば

$$(5,15) \quad \|u_m - u_{m-1}\|_{2,p} + \frac{C\varepsilon}{\varepsilon} \|u_m - u_{m-1}\|_{p-1} \leq \left(\varepsilon + \frac{C\varepsilon}{\lambda - c}\right) \times \\ \left(\|u_{m-1} - u_{m-2}\|_{2,p} + \frac{C\varepsilon}{\varepsilon} \|u_{m-1} - u_{m-2}\|_{p-1}\right) \quad (n \geq 2)$$

を得るから. $(\varepsilon + \frac{C\varepsilon}{\lambda - c}) < 1$ とおきように $\varepsilon, \lambda \in \mathbb{R}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - u_{n-1}\|_{2,p} < +\infty \quad \text{より} \quad \{u_n(x)\} \text{ は } H^2(\Omega, p)$$

で収束することがわかる。よって, その極限 $u(x)$ は

$$\begin{cases} -p(x) A(x, D)u + \sum_{j=1}^n p_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u + \lambda u = f(x) \\ B_j(x, D)u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

をみたす。以上により定理 1.1 は完全に証明された。