

風速変動のウェーブレット解析

山田 道夫・樋口 宗彦・林 泰一・光田 寧

WAVELET ANALYSIS OF HIGH WINDS

By Michio YAMADA, Munehiko HIGUCHI, Taiichi HAYASHI, and Yasushi MITSUTA

Synopsis

Wavelet analysis is a method of time series analysis based on an expansion in terms of temporally localized functions. The basis functions are called wavelets, and are constructed by translation and dilation of a single localized function called analyzing wavelet. The wavelets have two parameters; one specifies the time scale of variation and the other the time of events. The wavelet spectrum is directly related to the Fourier spectrum and enables us to analyze a relation between the characteristics of Fourier spectrum and temporally local events in the time series. Here the wavelet analysis is applied to atmospheric wind data and the power law of the Fourier spectrum is discussed in relation to mean wind speed and environmental terrain.

1. フーリエ解析とウェーブレット解析

自然風の観測データから、特徴的な風の変動周期を取り出す方法としてフーリエ解析はもっとも重要な手法である。風速データの時系列 $u(t)$ のフーリエ変換 $U(\omega)$ は、 $u(t)$ に含まれる調和振動 $\exp(i\omega t)$ の大きさを表しており、風速の時系列に含まれるさまざまな周期変動の強さの指標として、 $U(\omega)$ の絶対値の2乗であるフーリエスペクトル $E(\omega)$ が広く用いられている。

このようなフーリエ解析の利点は、まず第一に、変動を調和振動の和として表現することである。一般に非線形系においても、変動の大きさが十分小さな範囲に留まるなら、系は線形系で近似され、その任意の解は基本解である調和振動の一次結合で表現される。この事実、さまざまな形の周期変動のうちでも調和振動に特別な地位を与え、フーリエ分解が変動の分解としてもっとも基本的なものと考えられる根拠の一つとなっている。通常、「純粋な」周期変動として調和振動をとるのは、それが線形系における基本解であるからに他ならない。

一方、非線形性の強い現象ではこのような基本解はもはや適切なものではなく、調和振動は純粋な周期変動としての特別な意味を失うことになる。しかし、このような強非線形系においても、フーリエ解析はなお有用である。例えば、強い（十分に発達した）一様等方性乱流ではそのフーリエスペクトルに特徴的な $-5/3$ 乗のべき則（コルモゴロフ則）が見られることが知られている。フーリエスペクトルにこのようなべき則が見いだされる系は多数存在し、このことが強非線形系のフーリエ解析に積極的な意味を与えている。このようなべき則の出現は、一般に、次の2つの理由によっている。まず第一に、べき則の存在が示唆するよう

に、系に特徴的なスケールが存在せず生起する現象の構造が自己相似的であることである。また第二に、フーリエ分解の積分核である調和振動が(異なる振動数のもの同士)互いに相似な関数系をなしていることである。すなわちべき則の存在は、系の運動(時系列)に内在する自己相似性と、解析に用いる関数系がもつ相似性の両方を成因している。強非線形系のフーリエ解析においては、調和関数が線形系の基本解であることは、積極的な利点とはなっていない。

このように、フーリエ解析の広い有用性は、調和振動が周期性と相似性の性質を兼ね備えていることによっている。しかし、これらの両者の性質を持つことによって、逆に不便な点も生じている。その最も大きなものは、フーリエスペクトルでは現象の生起した時刻に関する情報が全く欠落してしまうことである。つまり、時刻の情報はフーリエ変換(あるいはフーリエ係数)の位相部分にだけ反映し、その振幅、従ってスペクトルにはまったく含まれない。このため、例えば、一つの時系列の中に異なる種類の現象が混在している場合、フーリエスペクトルからその事実を知ることが困難であり、それぞれの構造を解析することはさらに難しい。すなわち、フーリエ変換は変動の局所性を考慮した解析には適していないのである。例えば、風の観測データから、原因や特徴の異なる風速変動を区別して解析することにはフーリエ解析は向いていないと考えられる。

このような点を改善するため、従来から多くの実用的方法が開発されてきた。データの時系列中の局所的な調和振動の周期を調べたいときには、例えば、あらかじめデータにウィンドウをかけ注目する振動だけを残してからフーリエ変換を用いることが行われる。この方法は、振動周期がウィンドウ幅よりもはるかに小さい時にはよい結果をあたえるが、同程度の大きさのときには、ウィンドウの形への依存性やウィンドウ幅と周波数分解能の間の不確定性関係などの問題を生ずることが知られている。一方、データの時系列において局所的に注目したいものが、振動周期ではなく、スペクトルのべき則などの自己相似的な構造である場合には、上に述べたように、必ずしも調和振動を用いる必要はない。フーリエ解析の欠点は、フーリエ変換の積分核 $\exp(i\omega t)$ が、空間的には一様な大きさ(絶対値は常に1)をもつ関数であることに起因している。そこで積分変換の積分核、すなわち展開の基底関数系を、時間軸上で局在化した、しかも互いに相似的な関数に選ぶことによって、局所事象の相似構造の解析に適した方法を作ることが考えられる。この着想に基づく解析法は1980年初めに石油探査に関連して試みられ、後に80年代後半に数学者によって基礎づけられた。現在この方法はウェーブレット変換法(wavelet transform method)とよばれている。本論文では、このウェーブレット解析の方法の紹介と、それを用いて大気乱流の風速変動を調べた結果を報告する。

2. 連続ウェーブレット変換

現在、ウェーブレット変換法には、連続ウェーブレット変換および離散ウェーブレット変換の2種のものがある。歴史的には前者が先に開発され後に後者が提案された。それぞれに長短があり、本論文では離散ウェーブレット変換を用いて強風時の風速変動の解析を行うが、ここではまず歴史的な順序に従い連続ウェーブレット変換を概説する。

関数 $f(t)$ のウェーブレット変換 $T_\psi(a, b)$ は

$$T_\psi(a, b) = (1/\sqrt{c}) \int_{-\infty}^{\infty} \psi((t-b)/a) * f(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

と定義される¹⁾。ここに現れる二つのパラメーター $a(a \neq 0)$ と b は共に実数で、変換の形からわかるように、それぞれスケールと位置に対応している。積分核の関数はただ一つの関数 ψ の平行移動と相似変換によって作られており、この基本的関数 ψ はアナライジング・ウェーブレット(analyzing wavelet)と呼ばれる。上の変換式に現れる定数 c はアナライジング・ウェーブレットのフーリエ変換

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \psi(t) dt, \dots\dots\dots (2)$$

を用いて次のように定義される量である,

$$c = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)/\omega|^2 d\omega, \dots\dots\dots (3)$$

c の値が有限 (admissibility condition) であるような ψ に対しては, 二乗可積分な関数 $f(t)$ のウェーブレット変換には逆変換が存在し,

$$f(t) = (1/\sqrt{c}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\psi}(a, b) \psi((t-b)/a) / a^2 da db, \dots\dots\dots (4)$$

となることが証明される。ここに定義したウェーブレット変換は, $L^2(\mathbf{R})$ から並進とスケール変換の作る群の上の L^2 空間への写像であるが, より一般的には, ヒルベルト空間からそれを表現空間とする局所コンパクト群上の L^2 空間への写像として定式化することが可能である²⁾。なお $\psi(t)$ が $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$ に属す場合には, 上の条件 (admissibility condition) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \dots\dots\dots (5)$$

と同値である。

実際に用いられるアナライジング・ウェーブレットとしては

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 (|t| < 1), \\ -1/2 (1 < |t| < 3), \\ 0 (3 < |t|), \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

のような区分的に定数となる関数や,

$$\psi(t) = (d^2/dt^2) \exp(-t^2/2), \dots\dots\dots (7)$$

のような連続関数があり, 関数の形から前者は French hat, 後者は Mexican hat などと呼ばれている。これらはいずれも原点のまわりに局在化した関数であるが, とくに Mexican hat (7) はそのフーリエ変換も原点のまわりに局在化した関数である。このようなアナライジング・ウェーブレットをもちいると, 実空間とフーリエ空間の双方で同時に局在化した基底 $\{\psi((t-b)/a)\}$ が構成される。ウェーブレット係数 $T_{\psi}(a, b)$ は, ある意味で $f(t)$ に含まれる $\psi((t-b)/a)$ の成分の“強さ”であるから, 例えば, 時刻 (位置) b を固定しスケール a を動かすことで, 実空間の特定の場所における関数の特異性をとらえることができる。このような計算を数値的に実行するための高速のアルゴリズムも開発されており, 連続ウェーブレット変換は, 地震学, 音響学, 力学系理論から相対論的量子力学まで含む広い分野に応用されている^{1,3-6)}。

ウェーブレット変換は, 関数 $f(t)$ とそのウェーブレット変換 $T_{\psi}(a, b)$ の間の対応を与えており, 形時的にはフーリエ変換と類似の形をしている。しかし, ウェーブレット係数 $T_{\psi}(a, b)$ を物理的に解釈するは注意が必要である。確かに, ウェーブレット変換は形の上でフーリエ変換とよく似ており, 実際, $L^2(\mathbf{R})$ の関数 $f(t)$ については, $f(t)$ の“エネルギー”を二乗和に表現する等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |T_{\psi}(a, b)|^2 / a^2 da db, \dots\dots\dots (8)$$

が成り立つことを証明できる。この関係式は, フーリエ解析におけるパーセバル (Parseval) の等式に類似しており, $|T_{\psi}(a, b)|^2$ が各基底成分のもつ“エネルギー”を表しているように見える。しかし, フーリエ変換の場合と基本的に異なるのは, 基底 $\{\psi((t-b)/a)\}$ が, 一般に直交基底ではなく斜交基底であること, および基底として過剰で完全系を真の部分集合として含んでいること (over-complete) である。特に, フーリエ係数の大きさの2乗が“各成分のもつエネルギー”として解釈されるのに対し, ウェーブレット変換では基底の斜交性と過剰性のために $|T_{\psi}(a, b)|^2$ がこのような直載の意味を持たない。そのため, (8) 式の関係に物理的あるいはエネルギー的な内容を与えることは難しく, 特に, 定量的なエネルギー解析には適していない。

3. 離散ウェイブレット変換 (ウェイブレット展開)

前節で述べたように、ウェイブレット変換の基底は斜交系でありしかも過剰系であるため、ウェイブレット係数 $T\psi(a, b)$ にエネルギー的な内容を与えることが難しい。この点に注目し、エネルギー的な解析に適した形をもつウェイブレット変換を得るために、基底関数の直交化が1980年代半ばにフランスの数学者によって行われた。

直ちに分かるように、直交化されたウェイブレットではパラメーター (a と b) が連続ではあり得ず、離散的になる。実際には、スケール変換を2のべきにとり、適当なアナライジング・ウェイブレット ψ から離散的な平行移動とスケール変換によって

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad (j, k \text{ は整数}, ||\phi_{j,k}|| = 1), \dots\dots\dots(10)$$

のように作ることが多い。ここで、 j はスケール、 k は $k/2^j$ の形で時刻 (位置) を表わす。これらのウェイブレット $\psi_{j,k}(t)$ は、 $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底をなしており、関数 $f(t)$ は次の形 (ウェイブレット展開)

$$f(t) = \sum_j \sum_k \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(t), \dots\dots\dots(9)$$

に展開される。ここで $\alpha_{j,k}$ は展開係数、 $\psi_{j,k}$ は適当なアナライジング・ウェイブレット ψ から離散的な平行移動とスケール変換によって生成される基底である。

アナライジング・ウェイブレットの選び方は、これまでにいくつかの方法が提案されているが、以下では Mayer^{7,8)} のものに従い、フーリエ空間においてコンパクト・サポート、かつ実空間において急減少 C^∞ 関数となるアナライジング・ウェイブレット $\psi(t)$ を、次のように構成して用いることにした。

$$\psi(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{\psi}(\omega) d\omega, \dots\dots\dots(11)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \exp(-i\omega/2) \times \sqrt{[(\hat{\phi}(\omega/2))^2 - (\hat{\phi}(\omega))^2]}, \dots\dots\dots(12)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{(g(\omega)g(-\omega))}, \dots\dots\dots(13)$$

$$g(\omega) = h(4\pi/3 - \omega) / [h(\omega - 2\pi/3) + h(4\pi/3 - \omega)], \dots\dots\dots(14)$$

$$h(\omega) = \begin{cases} \exp(-1/\omega^2), & (\omega > 0) \\ 0, & (\omega \leq 0) \end{cases}, \dots\dots\dots(15)$$

Fig. 1 にアナライジング・ウェイブレット $\psi(t)$ の形を示す。ここで構成したアナライジング・ウェイブレット $\psi(t)$ は急減少関数であるので局在化の程度は非常に良い。また、ウェイブレット展開の特徴は収束性が良いことで、例えば $f(t)$ が C^m 級のときは、大まかに言って

$$f(t) - \sum_{j=-\infty}^J \sum_k \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(t) = O((2^J)^{-m+1}), \quad (j \rightarrow \infty), \dots\dots\dots(16)$$

が成り立つが、これはウェイブレット展開の収束性がフーリエ級数と同程度であることを示している。なおこのような、アナライジング・ウェイブレットの形は唯一ではなく、数学的には非常に多くの可能性があるが、どのようなアナライジング・ウェイブレットを用いても、相似な関数による基底系が作られるので、もとの関数 $f(t)$ の自己相似的な性質に関しては同じ結果をあたえたと期待される。

ウェイブレット展開の係数 $\alpha_{j,k}$ は、各ウェイブレットへの直交射影により

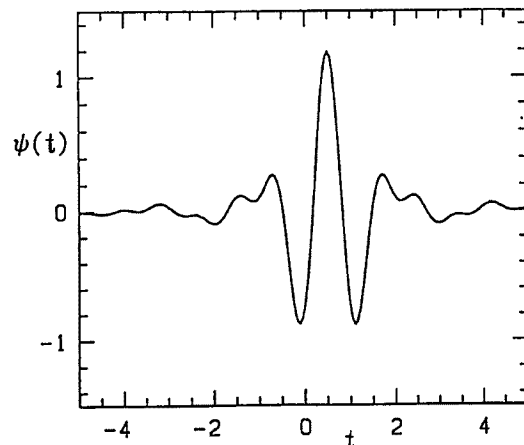


Fig. 1. Analyzing wavelet $\psi(t)$.

$$\alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) * f(t) dt \quad \dots\dots\dots (17)$$

のように求めることができる。この右辺は、 j を固定すると本質的に畳み込み演算であるので、次のように、フーリエ空間では単なるかけ算に帰着される。

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{j,k}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \psi_{j,k}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) 2^{j/2} \psi(2^j t - k) dt \\ &= 2^{-j/2} \exp(-ik 2^{-j} \omega) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \exp(-i\omega 2^{-j} y) dy \\ &= 2^{-j/2} \exp(-ik 2^{-j} \omega) \hat{\psi}(2^{-j} \omega) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\alpha_{j,k} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_{j,k}(\omega) * F(\omega) d\omega = (1/2\pi) 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik\omega) \hat{\psi}(\omega) * F(2^j \omega) d\omega \quad \dots\dots\dots (20)$$

従って、ウェーブレット係数を数値的に求めるときは、上式を離散化し FFT をもちいて $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めた後、(20)に従って、 $\hat{\psi}(\omega) *$ との積を作り再び FFT を用いて実空間に戻せばよい^{9,10)}。

ウェーブレット展開の基底 $\{\psi_{j,k}(t)\}$ は完全正規直交系であるので、展開係数 $\alpha_{j,k}$ の物理的な内容も通常の直交関数展開の場合と全く同様である。従って、特に、ウェーブレット展開においては、 $|\alpha_{j,k}|^2$ を用いて、「ある時刻（場所）においてある時間（空間）スケールをもつ変動成分のエネルギー」について語ることが可能になる。また、前にも述べたように、これらの展開係数に現れるスケーリングの性質はアナライジング・ウェーブレットの選び方によらないと考えられる。いまウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ から、フーリエスペクトルに対応する量であるウェーブレットスペクトル E_j を次のように作ると、

$$E_j = \sum_k |\alpha_{j,k}|^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

これは、スケール j の変動成分のもつエネルギーであり、フーリエスペクトル $E(\omega)$ とは、大まかに言って、

$$E_j \sim \omega E(\omega), \quad \omega \sim 2^{-j} 2\pi/3 \quad \dots\dots\dots (22)$$

の関係（ただし展開の基底関数が異なるので、厳密な関係ではなく、大きさのオーダーの関係）を持つ。この関係は、アナライジング・ウェーブレットのフーリエ変換 $\hat{\psi}(\omega)$ がフーリエ空間でコンパクトサポートであることの直接の結果である。これから、フーリエスペクトルでのべき則とウェーブレットスペクトルでのべき則の間には、

$$E(\omega) \sim \omega^{-p} \leftrightarrow E_j \sim 2^{-(p-1)j} \quad \dots\dots\dots (23)$$

の対応関係が成り立つことが導かれ^{9,10)}、多くの例で確かめられている。

この関係はウェーブレット展開の幅広い応用の可能性を示唆している。例えば、フーリエスペクトルに特徴的なべき則が見いだされるときには、ウェーブレット係数を調べれば、べき則が実空間のどのような位置の事象に起因するのかを判定できる。また、第一章で述べたように、フーリエスペクトルは、異なる構造をもつ現象が混在するときにはそれらをうまく分離・解析できないが、ウェーブレット展開ならば、それらの現象をまず生じた時刻など適当な基準で抽出し、そのあとでそれぞれに対応するウェーブレット係数を調べれば良い。もしそれらから作られるウェーブレットスペクトルがべき則を持てば、(23)のようにフーリエスペクトルの性質に読み変えることができる。以下では、この方法をもちいて、強風時の大気乱流のスペクトルを解析する。またさらに、ウェーブレット展開は、与えられたデータがなんらかの原因で汚れている場合に、汚染されていない部分だけを選び出してフーリエスペクトルなどのべき則を調べたいときにも用いることができる¹⁰⁾。なお、ウェーブレット解析の基礎及びさまざまな応用については文献1)を、数学的側面については文献2)を、またウェーブレット解析の解説としては文献11)などを見られたい。

4. 強風時の乱流変動のウェーブレット解析

ウェーブレット解析の利点は、変動のスケールによる分解に加えて変動の生起した時刻を特定できるところにある。これは時系列解析において、スペクトルの各成分に寄与する事象の時間分布を調べることが可能にする。このような方向の研究は、大気乱流のデータを用いて現在進行中であるが、以下ではウェーブレットスペクトルとフーリエスペクトルとの間に成り立つべき則の関係(23)に着目し条件付き抽出の方法を組み合わせた研究を報告する。

ここでウェーブレット解析を行う風のデータは、JR 西日本余部橋梁上における強風の観測結果である。解析に用いるデータはそれぞれ4096秒間の風の記録(サンプリング周波数 1 Hz)で、いずれも北風によるものである。風速の測定は余部橋梁上の3カ所(山側から Ch. 3, Ch. 1, Ch. 2 の順)に設置された風杯型風速計によって行われた。各データの観測開始時刻、平均風速、風向(Ch.1 のみ)および乱れの強さを Table 1 に示す。

これら強風時の従来の手法によるフーリエスペクトルを Fig. 2 に示した。11月18日のものは特に強い強風で、コルモゴロフ則の $\omega^{-5/3}$ から大きくずれ、むしろ ω^{-1} に近い形を示している。この特徴は谷の東壁に近い Ch.1 や Ch. 3 で顕著に見られ、谷のほぼ中央にあたる Ch. 2 のスペクトルは $\omega^{-5/3}$ と ω^{-1} の中間の傾きを示している。これに対し、10月13日、12月25日、1月14日のスペクトルはおおむね $\omega^{-5/3}$ に近い形をもち、特に、谷のほぼ中央では谷の東壁近くよりも $\omega^{-5/3}$ に近くなる傾向が見られる。

この4例の強風データについて上記のウェーブレット展開を行った。ウェーブレット係数から、(21)のように作ったウェーブレットスペクトル E_j は、各フーリエスペクトル $E(\omega)$ に対して、 $E_j \sim \omega E(\omega)$ の関係にあることが確かめられる。フーリエスペクトルの形は、上に述べたように $\omega^{-5/3}$ 、 ω^{-1} 、あるいはこれら中間の傾きを持っている。そこで、これらのスペクトル形が複数の種類の風速変動の混合した結果ではないか、また特に、強い風速変動は弱い風速変動と異なる特性をもつのではないかと、この推測から、これらのスペクトルを以下のように分解して解析した。

ウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ は、スケール j の速度変動(周期 2^{-j} 秒の速度変動に相当)のうち時刻 $k \cdot 2^j$ 秒(データ開始時刻を時刻の原点とする)付近に生起したものの大きさを示している。いま、これら各時刻の速度変動を、強弱2種類のものに分離・抽出し解析することを考える。通常のフーリエ係数を用いてこのような分離を行うと、データが寸断されることになり、分離・抽出されたデータの解析が困難になる。しかし、ウェーブレット係数の場合は、局所化された展開関数を用いているため、分離後のデータに対して、エネルギースペクトルなどを容易に作ることができる。ここでは、ウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ の条件付き抽出法として、次のようなものを採用した。

ウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ を、各スケールにおける R. M. S. の F 倍を基準にして、それ以下のもの(A)とそれ以上のもの(B)の2つに分ける。ここで F は適当な正の数である。すなわち、

$$A: |\alpha_{j,k}| \leq F \sqrt{\langle |\alpha_{j,k}|^2 \rangle_k} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$B: |\alpha_{j,k}| > F \sqrt{\langle |\alpha_{j,k}|^2 \rangle_k} \quad \dots\dots\dots (25)$$

Table 1. Mean wind speed, wind direction (only for Ch. 1) and standard deviation of the wind fluctuation (shown in the parenthesis)

Date	Time	Ch. 1	Ch. 2	Ch. 3
88/10/13	0 : 44	15.3 m/s, 343° (0.27)	10.5 m/s (0.43)	15.7 m/s (0.26)
88/11/18	21 : 48	28.5 m/s, 353° (0.07)	25.1 m/s (0.06)	23.3 m/s (0.24)
88/12/25	6 : 50	12.7 m/s, 355° (0.17)	11.6 m/s (0.16)	9.4 m/s (0.45)
89/ 1/14	15 : 00	12.5 m/s, 12° (0.25)	13.5 m/s (0.11)	5.5 m/s (0.67)

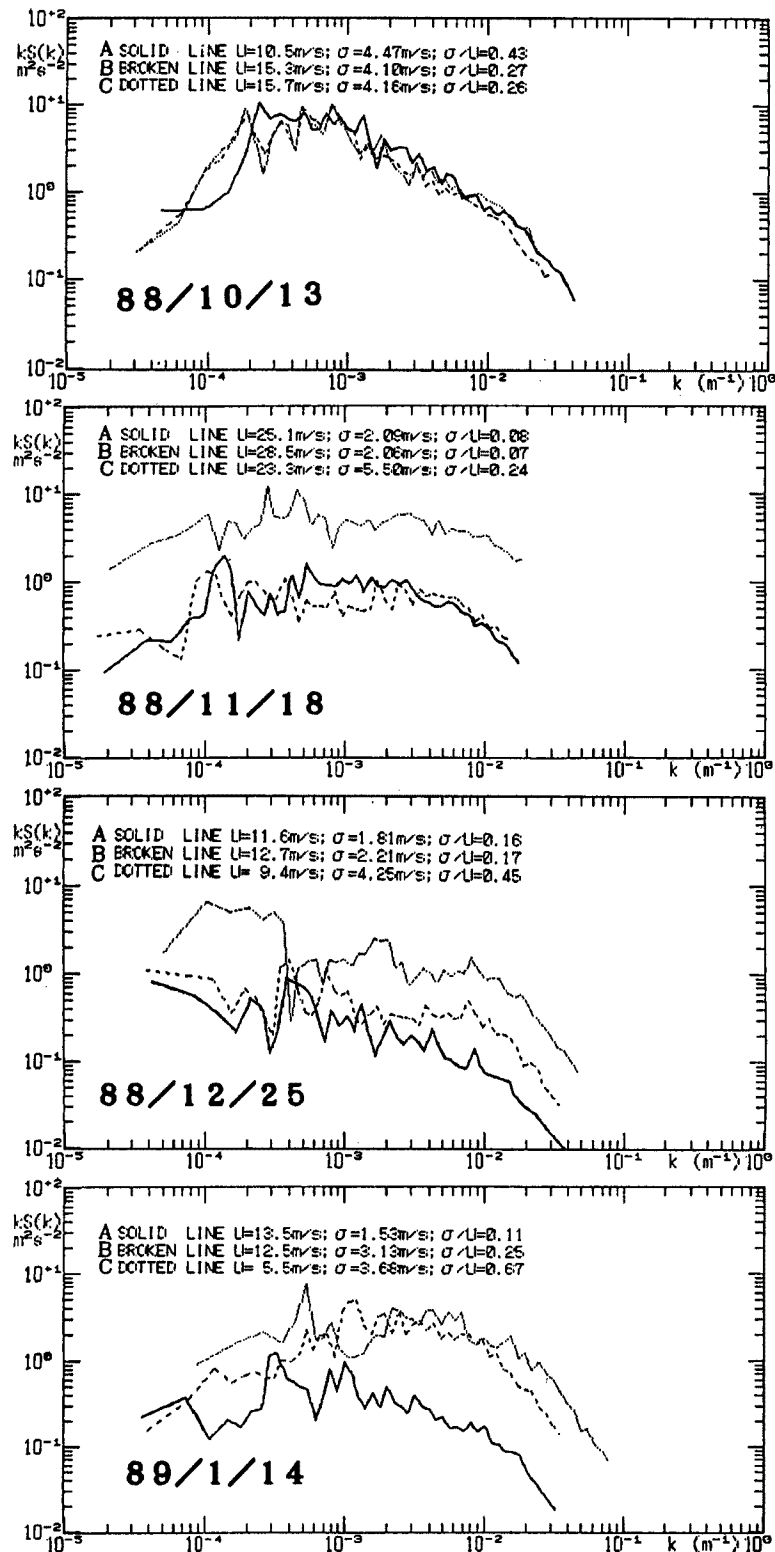


Fig. 2. Fourier spectra of wind. A, B and C correspond to Ch. 2, 1 and 3, respectively.

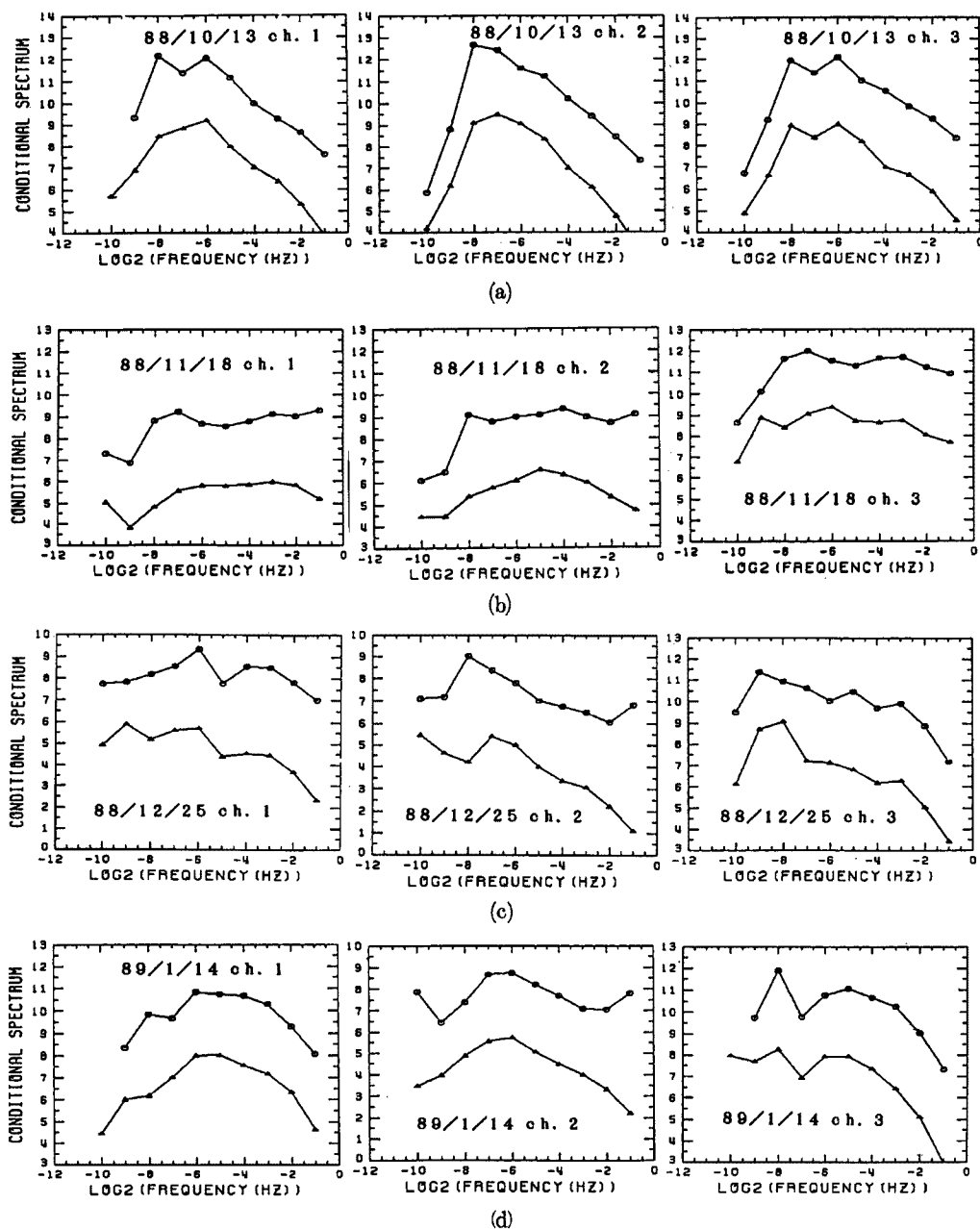


Fig. 3. Conditional wavelet spectra. Each upper graph shows the conditional wavelet spectrum E^B_j , while each lower graph E^A_j . Note that $j=\log_2$ (frequency (Hz)). (a) Oct. 13, 1988, (b) Nov. 18, 1988, (c) Dec. 25, 1988 and (d) Jan. 14, 1989.

である。ここでブラケット $\langle \rangle_k$ は、与えられたスケール j においてすべての k (時刻) について平均することを意味している。以下に示すグラフでは、 $F=2$ を用いたが、いくつかの場合について試した結果では $F=1$ や $F=3$ を採用しても定性的な変化は見られなかった。

このようにして、A, B の 2 組に分離されたウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ に対して、それぞれのスペクトル密度は

$$E^A_j = \sum_k |\alpha_{j,k}|^2 / (\text{Aのウェイブレット係数の個数}), \dots\dots\dots (26)$$

$$E^B_j = \sum_k |\alpha_{j,k}|^2 / (\text{Bのウェイブレット係数の個数}), \dots\dots\dots (27)$$

のように求められる。ここで $\sum_k$ はAに属すウェイブレット係数についての (k に関する) 和をとることを意味している。 $\sum_k$ についても同様である。

Fig. 3 はこのようにして求められたウェイブレットスペクトル密度である。ここでは主としてスペクトル形に着目するので、縦軸は任意スケール (但し2を底とする対数)、横軸は周波数の (2を底とする) 対数を探っている。各図とも、スペクトル密度の小さい方が E^A_j 、大きい方が E^B_j である。ナイキスト周波数は 0.5 Hz である。多少のばらつきはあるものの、10月28日、12月25日、1月14日の強風については、A, B, のスペクトル形は、ともに一様等方性乱流のコルモゴロフ則 $E(\omega) \sim \omega^{-5/3} (E_j \sim (2^j)^{-2/3})$ に近く、これらの間に大きな相違は見られない。これに対し、11月18日の強風のスペクトル密度は、谷壁側の Ch.1 と Ch. 3 が、A, B, 共に $E(\omega) \sim \omega^{-1} (E_j \sim \text{定数})$ に近い形を持っている。また同日の Ch. 2 は、Aがコルモゴロフ則に近く、Bが $E(\omega) \sim \omega^{-1}$ に近い。

これら4例の強風 (北風) についての解析結果は、とりあえず次のようにまとめることができる。風速が 15 m/s 程度以下の3例 (10月28日、12月25日、1月14日) については谷の中央部、谷壁側によらずスペクトル形は通常のコルモゴロフ則 $\omega^{-5/3}$ に近い。一方、風速が 20 m/s を越える強風時 (11月18日) には、谷壁側では ω^{-1} のスペクトル形が見られ、谷の中央部では変動の大きい部分が ω^{-1} 、変動の小さい部分が $\omega^{-5/3}$ の形に近い。この最後の結果は、11月18日 Ch. 2 の風速変動のフーリエスペクトルが ω^{-1} と $\omega^{-5/3}$ の中間の傾きを持つことを説明する。

以上の結果は、余部橋梁上で 20 m/s を越えるような強風 (北風) の速度変動の性質が、コルモゴロフ則に従ういわゆる一様等方性乱流の性質とは大きく異なっていることを示している。11月18日のデータにおける ω^{-1} と $\omega^{-5/3}$ の傾きについて、それぞれが占める時間およびエネルギーの割合を各スケール j について示したものが **Fig. 4** および **Fig. 5** である。1分以下 ($j > -8$) の時間スケールにおいては、 $\omega^{-5/3}$ の傾きを与える変動が時間的には80%以上の時間を占めるものの、エネルギー的には時間的には残り20%の時間に生じ ω^{-1} を与える変動が約60%を占めている。このことは強風時に1分以下のスケールで変動する風速成分においては、半分以上のエネルギーは通常のコルモゴロフ則とは異なるスペクトル形をもつことを意味している。しかし、今のところ、この結果がどの程度一般性をもつかは明かでなく今後さらに詳しい調査を必要とする。また、11月18日のスペクトルにおいて2種類の速度変動に分離されるのが谷中央部のみであった

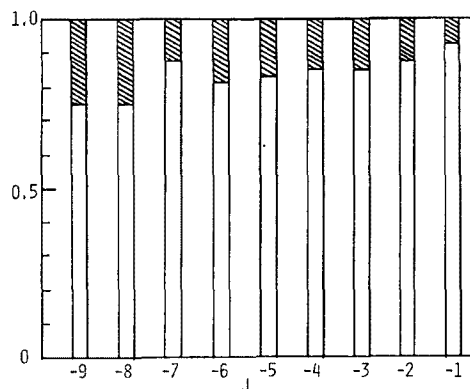


Fig. 4. Ratios of time intervals which contribute to ω^{-1} spectrum and $\omega^{-5/3}$ spectrum. For each j , shaded column shows the ratio of the time interval for ω^{-1} , while blank column for $\omega^{-5/3}$

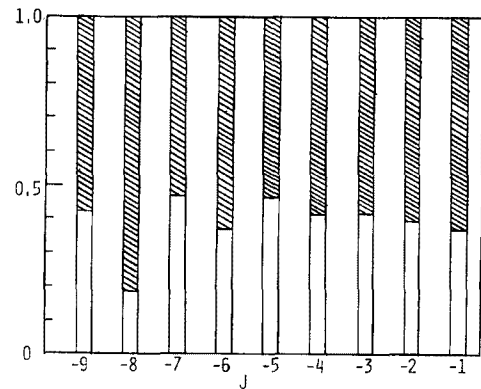


Fig. 5. Ratios of energy associated with ω^{-1} spectrum and $\omega^{-5/3}$ spectrum. For each j , shaded column shows the ratio of the energy for ω^{-1} to total energy, while blank column for $\omega^{-5/3}$

ことは、このような強い速度変動の原因が谷壁面上に生じた乱流境界層にあることを示唆するように思われる。実際、このような ω^{-1} スペクトルは乱流境界層の室内実験でも報告されているが、現段階では、橋梁上の風速変動データのみからこの原因を特定することはできず、さらに詳しい研究が必要である。

5. 結 語

フーリエ解析は、与えられた変動をより基本的な変動の和に分解する方法であり、その有用性は、調和振動が周期性と相似性の2重の性質を持つことによっている。しかし、フーリエ解析では、事象の生起した時刻(位置)に関する情報がスペクトルから完全に欠落するため、異なる構造が混在する時系列に対しては有効な手法を与えない。そこで、時間(空間)的に局在化した関数から、平行移動と相似変換によって、新しい展開基底を作る方法が開発され、これを用いた解析はウェーブレット解析と呼ばれている。

ウェーブレット解析には、連続ウェーブレット変換および離散ウェーブレット変換(ウェーブレット展開)の2つの方法がある。前者は積分変換法であり、与えられた関数(時系列)の局所的な特異性を敏感に反映する方法として広く用いられているが、基底関数系が斜交系かつ過剰系であることから、エネルギー的な解析には適していない。これに対し後者では、基底関数系を正規直交基底に選ぶため、エネルギー的な解析が可能となり、フーリエスペクトルとの間に直接的な関係がつくなどの利点を持っているため、局所事象を扱うデータ解析や気象学上の応用等に適していると考えられる。

ウェーブレット解析の一例として、強風時の乱流変動の記録の解析を行った。変動の大きさによって時系列を2つの部分に分け、それぞれの部分のエネルギースペクトルを調べた結果、強い変動部分はコロモゴロフの $-5/3$ 乗則とは異なり -1 乗に近い形を持つことが分かった。このべき則の原因としては、地形による乱流境界層の影響が考えられる。

謝 辞

本研究の一部は強風の性質に関する鉄道総合技術研究所からの委託研究によるものである。

参 考 文 献

- 1) Combes, J.M., A. Grossmann and Ph. Tchamitchian (ed.): *Wavelets*, Springer, 1989.
- 2) Grossmann, A. and J. Morlet: Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms, in *Mathematics+Physics* (ed. L. Streit), vol. 1, World Scientific, 1985, pp. 135-165.
- 3) Arneodo, A., F. Argoul, J. Elezgaray and G. Grasseau: Wavelet transform analysis of fractals: Application to Nonequilibrium phase transitions, in *Nonlinear Dynamics* (ed.) G. Turchetti, World Scientific, 1989, pp. 130-180.
- 4) Farge, M. and G. Rabreau: Wavelet transform to detect and analyze coherent structures in two-dimensional turbulent flows. *C.R. Acad. Sci.*, vol. II-317, 1988, pp. 1479-1486.
- 5) Argoul, F., A. Arneodo, G. Grasseau, Y. Gagne, E.J. Hopfner and U. Frisch: Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade, *Nature*, vol. 338, 1989, pp. 51-53.
- 6) Arneodo, A., G. Grasseau and M. Holschneider: Wavelet transform of multifractals, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, 1988, pp. 2281-2284.

- 7) Meyer, Y.: Orthonormal wavelets, in *Wavelets* (eds., J.M. Combes, A. Grossmann and Ph. Tchamitchian), Springer, 1989, pp. 21-37.
- 8) Morimoto, A.: On the ondelette expansion, Master thesis in mathematics department of Kyoto University, 1988.
- 9) Yamada, M. and K. Ohkitani: Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence, *Prog. Theor. Phys.*, vol. 83, 1990, pp. 819-823.
- 10) Yamada, M. and K. Ohkitani: Spatial structure of eddies in turbulence, 1990 (発表予定).
- 11) 山口昌哉・山田道夫：ウェーブレット解析，科学，岩波書店，1990年6月，pp. 398-405.