

Property T for C^* algebras

都立大 理 松本健吾 (Kengo Matsumoto)

§1. 序論.

以下の結果は、高井博司氏(都立大.理)との共同研究によるものである。

離散群の中で、Amenability と相反する概念である Kazhdan の性質 T を、作用素環に最初に持ち込んだのは、Connes-Jones [2] である。彼らは、 II_1 -factor (これは一般の von Neumann 環) に、この離散群の Kazhdan の性質 T を自然に一般化した。そして、彼らの意味で性質 T をもった II_1 -factor が hyperfinite 型と極端な差異があることを示し、 II_1 -factor の構造理論に大きく貢献している ([1], [2] 等)。また、最近、G. Skandalis は [4] で Kazhdan の性質 T をもったある離散群の reduced 群 C^* 環が、 KK -理論的に Nuclear にならないことを示して、強い意味の Connes-Kasparov 予想に反例を与えている。従って、Kazhdan の性質 T という K -理論的に病理的でかつ重要な振る舞いをする性質を、 C^* 環のレベルで捉えることは、 C^* 環の K -理論を考

える上で、非常に大切なことと思われる。また、そのことは、上記、Connes-Jones 達の結果から見ても、 C^* 環の構造論の発展に大きく寄与すると思われる。古くとも Kazhdan の性質 T は、その表現論で完全に決定される性質であるから、それを C^* 環に導入することは極めて自然である。そこで、我々は C^* 環に、この離散群の Kazhdan の性質 T を一般化し、その構造論に迫って行きたい。

§2. 離散群の性質 T と Amenability

いまより、 C^* 環に性質 T を定義する前に、この § では、離散群の性質を復習しておく。以下 Γ は可算離散群とする。

まず、 Γ は amenable とする。有限群、可換群や S_∞ (可算無限個の要素の有限置換全体) などは、これらを building block とし、多くの群がその例である。 Γ が amenable ということ、その (full, reduced) 群 C^* 環が Nuclear になることとは同値である。従って、Nuclear 環というのは離散 amenable 群環の一般化と捉えることができる。

一方、 Γ が Kazhdan の性質 T をもつとする。すなわち [5],

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{有限個の } \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma \text{ と } \varepsilon > 0 \text{ が存在して、任意の } \Gamma \text{ の} \\ \text{unitary 表現 } (\pi, \mathcal{H}) \text{ に対して、単位 vector } \xi \in \mathcal{H} \text{ が、} \\ \|\pi(\gamma_i)\xi - \xi\| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n \text{ を満たせば、} 0 \neq \eta \in \mathcal{H} \text{ が} \end{array} \right.$

し存在して, $\pi(x)\zeta = \zeta \quad \forall x \in \Gamma$ を満たす。

有限群, $SL(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$, $PSL(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 2$, $Sp(n, 1)$, $\mathbb{Z}_n \rtimes SL(n, \mathbb{Z})$

等が良く知られている例である。

amenable だが Kazhdan の性質 T をもたない離散群は有限群に限る。従って, Kazhdan の性質 T をもたない離散群の群環が Nuclear であるものは有限次元環に限ることに注意しておく。

§3. C^* 環の性質 T の定義

Kazhdan の性質 T が, 先に書いた様に, 完全に表現論で定義されるので, それを full 群環 $C^*(\Gamma)$ の言葉で言い換えることは可能である。その時 (π) の中での fixed vector $\zeta \in \mathcal{H}$ があるというのは, $C^*(\Gamma)$ の言葉で言うと,

$a \in \ell^1(\Gamma) \subset C^*(\Gamma)$ に対して, $a = \sum_{r \in \Gamma} a(r) r$ と表わしてよくとき

$$\pi(a)\zeta = \sum_r a(r) \pi(r)\zeta = \sum_r a(r) \zeta = \zeta \sum_r a(r) = \zeta \cdot t(a)$$

但し, $t(a) = t(a)$ は $C^*(\Gamma)$ の 1 次元 trivial 表現を表す。

従って, unitary 表現 π の fixed vector は, その表現に対応する $C^*(\Gamma)$ の左からの表現と (右から a) trivial 表現との可換な vector, すなわち central vector, として捉えることが出来る。逆に, $C^*(\Gamma)$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への左右からの表現, π_L と π_R が与えられたとき, Γ の unitary 表現 π を

$$\pi(x)\xi \equiv \pi_L(x)\xi \pi_R(x)^*, \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad x \in \Gamma$$

で定義する。 $\eta \in \mathcal{H}$ が $\pi_L(x)\eta = \eta \quad \forall x \in \Gamma$ ということと、
 $\pi_R(a)\eta = \eta \pi_R(a) \quad \forall a \in C^*(\Gamma)$ ということとが同値になる。
 つまり、Hilbert 空間への群の unitary 表現の fixed vector は群環の
 その Hilbert 空間への左右からの表現の central vector として、
 見なすことが出来る。このことを頭において、 C^* 環に対する
 性質 T を次で定義する。以下、 C^* 環はすべて可分とする。

定義 単位元をもった C^* 環 A が性質 T をもつとは、
 有限個の $a_1, \dots, a_n \in A$ と $\varepsilon > 0$ と $K > 0$ が存在して、任意の
 対応 (A が非退化に両側から作用する Hilbert 空間) $\mathcal{H}$ に対
 して、単位 vector $\xi \in \mathcal{H}$ が $\|a_i \xi - \xi a_i\| < \delta < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$
 を満たせば、 $0 \neq \eta \in \mathcal{H}$ が存在して、 $a\eta = \eta a \quad \forall a \in A$ かつ
 $\|\eta - \xi\| < K\delta$ を満たす。

最初の $\xi \in \mathcal{H}$ と、central vector $\eta \in \mathcal{H}$ が満たすべき条件 $\|\eta - \xi\| < K\delta$ は、講演では触れなかったが、technical を固く必要なものである。

単位元のない C^* 環に対しては、その単位添加した C^* 環が、
 性質 T をもつことで定義しておく。

§4. 性質 T をもつ C^* 環の基本的性質

我々が定義した C^* 環の性質 T が, Kazhdan の性質 T をもつ 離散群の自然な一般化であることは, 次の定理から分る。

定理 1. Γ を可算離散群とする。このとき, 次の 3 つは同値である。

- (i) Γ は Kazhdan の性質 T をもつ。
- (ii) reduced 群 C^* 環 $C_r^*(\Gamma)$ が性質 T をもつ。
- (iii) full 群 C^* 環 $C^*(\Gamma)$ が性質 T をもつ。

講演では, (ii) $\Rightarrow$ (i) の際に, Γ に少し条件が付くと言ったが, 無条件で示せる。

また, C^* 環の性質 T は, 剰余, 直和, tensor 積, 接合積, 短完全列等, の代数操作に関している。例えば, 次のような命題が成り立つ。

命題 2 A と B が性質 T をもつことと直和 $A \oplus B$ が性質 T をもつことは同値。

命題 3 A と B が性質 T をもてば, tensor 積 $A \otimes B$ も性質 T をもつ。但し, C^* tensor norm は何でも良い。

命題 4. A が性質 T をもつ $\mathbb{C}$ -環, $\Gamma \in \text{Kazhdan}$ の性質 T をもつ離散群とすると, (full, reduced 共に) その接合積 $A \rtimes \Gamma$ は性質 T をもつ。

命題 5. $\mathbb{C}$ -環の短完全列 $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ において, I と A/I が性質 T をもてば, A も性質 T をもつ。

一般に群の Kazhdan の性質 T が正規部分群に遺伝しないのと同様に, $\mathbb{C}$ -環の性質 T も ideal に遺伝しない例がある。しかし, 次の場合は, 命題 5 の逆が成り立つ。

命題 6. I が A の ideal で A/I が有限次元とする。このとき, A が性質 T をもてば, I も性質 T をもつ。

§5. 性質 T をもつ $\mathbb{C}$ -環の構造

我々が定義した $\mathbb{C}$ -環の性質 T は, Kazhdan の性質 T をもつ離散群の $\mathbb{C}$ -版である (定理 1)。Amenable かつ Kazhdan の性質 T をもつ離散群は有限群しかないので, 性質 T をもつ Nuclear $\mathbb{C}$ -環は順当なら有限次元環に限ることが予想される。また Nuclear でない性質 T をもつ $\mathbb{C}$ -環は, Kazhdan の性質 T をもつ離散群の群 $\mathbb{C}$ -環に構造が近いと思われる。

そこで、まず性質 T をもつ Nuclear C^* 環を考えてみる。

$K(H)$ は Hilbert 空間 H 上の compact 作用素の成す C^* 環を表わすとする。

補題 7. $K(H)$ が性質 T をもつことと $\dim H < \infty$ は同値である。

従、 2 , 行列環 M_n ($n \in \mathbb{N}$) は性質 T をもつので、命題 2 と合わせて

系 8. 有限次元 C^* 環は性質 T をもつ。

また可換 C^* 環については

補題 9. 可換 C^* 環が性質 T をもてば、有限次元である。

これらの補題と §4 で述べた命題を基礎として、次の定理が証明される。

定理 10. 性質 T をもつ Nuclear C^* 環においては、次が示せる。

$$\begin{array}{ccc} \text{Type I } C^* \text{ 環} & \Rightarrow & \text{AF 環} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \text{有限次元 } C^* \text{ 環} & \Leftarrow & \text{忠実な tracial state がある } C^* \text{ 環} \end{array}$$

つまり, I 型環は AF 環, もしくは忠実な tracial state がある Nuclear 環は性質 T をもてば, 有限次元になる。

また, C^* 環 A に忠実な下半連続 trace τ で $\mathcal{N}_\tau = \{x \in A \mid \tau(x^*x) < \infty\}$ が A で dense なものがあるとき, A を半有限と呼ぶことにすると, 次が示せる。

定理 11. 半有限な Nuclear C^* 環は性質 T をもてば有限次元である。

特に, 連結 Lie ^{の群環} 群 $\mathfrak{g}$ は, 群の性質によらず, どのような群でも Nuclear 環で半有限であるので, 性質 T をもたない。

I 型環, AF 環, 半有限環は単位元をもてば, いずれも tracial state をもつ。そこで, 単位元をもち, tracial state をもたない C^* 環について, 性質 T を考えると, その場合は, Nuclear でない場合も含めて, 次を得る。

定理 12. 単位元をもち, tracial state をもたない C^* 環は性質 T をもつ。例としては, Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ や $\text{Cuntz 環} \otimes (\text{unital } C^*\text{環})$ 。

tracial state をもたない C^* 環は, 本来な tracial state から作れる “良い” 対応が存在しない。そういう意味では離散群の群

環とは掛り離れん位置にある。定理12は、このような群環とは全く異質の群環においては、有限次元環を除き、Nuclearity と正反対の性質であるはずの、性質Tに病理的な現象が生じていることを示している。

最後に、Nuclear 環は dual Banach bimodule への derivation が inner であることによ、とも特徴づけることが出来る。性質Tをもつ群環においても、これに対応する結果を得ることが出来ることを付記しておく。

References

- [1] A. Connes : A factor of type II_1 with countable fundamental group, J. Operator Theory, 4(1980), 151-153.
- [2] A. Connes and V. Jones : Property T for von Neumann algebras, Bull. London Math. Soc., 17(1985), 57-62.
- [3] D. Kazhdan : Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Funct. Anal. Appl., 1(1967), 63-65.
- [4] G. Skandalis : Une Notion de Nuclearité en K-Théorie, K-Theory 1(1988), 549-574.
- [5] P. S. Wang : On isolated points in the dual space of locally compact groups, Math. Ann., 218(1975), 19-34.