

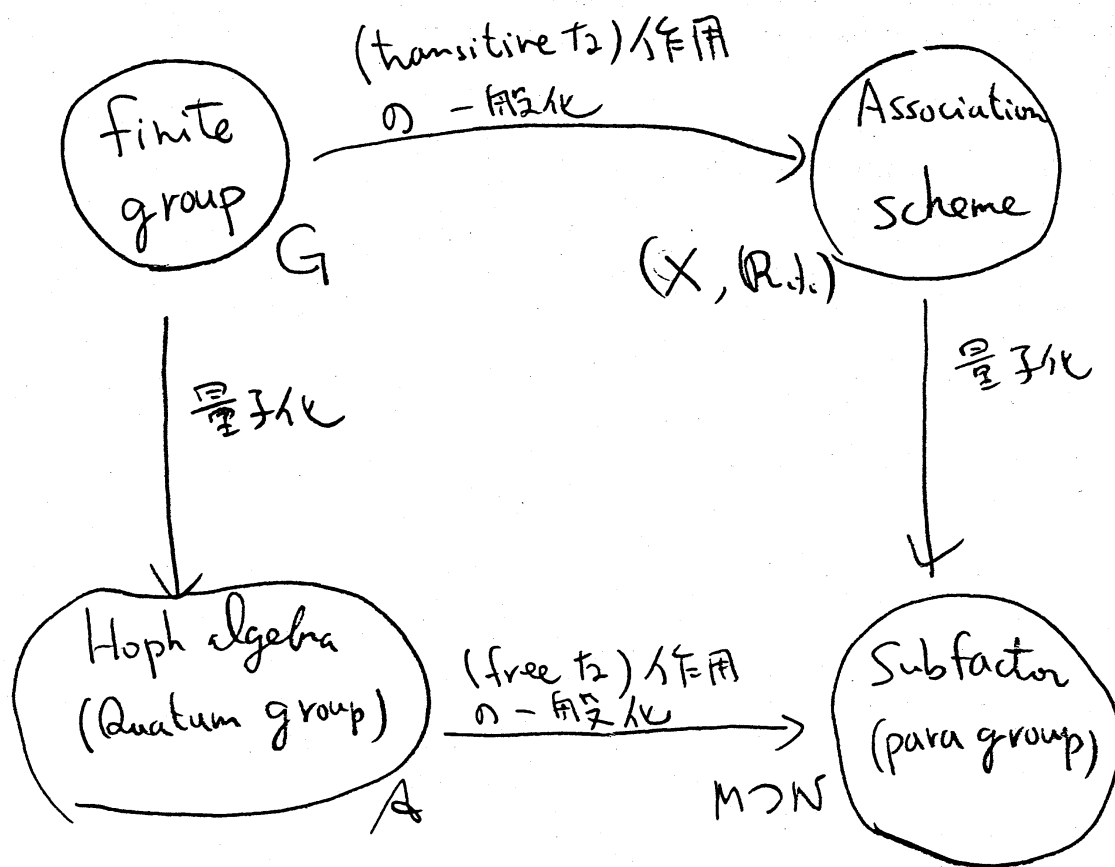
Association scheme, Terwilliger algebras and Takesaki duality

北海道大学・理 綿谷 安男

(Yasuo Watatani)

① はじめに

次の図式を考えてみよう。



有限群 G の有限集合 X への transitive な作用を組み合わせて論的に一般化したのが Association scheme $(X, (R_i)_{0 \leq i \leq d})$ だと思える。

さてこのフルーム全体を量子化してみると何か出てくるかを考えたい。(有限)群 G が量子化されたのが (有限次元) 量子群 A だとしても、(有限)集合 X の量子化は何になるだろうか。そしてその「作用」の量子化とは何だろうか？
これらの問いに答えると自然に作用素環論の subfactor の理論になるのである。

④ 作用素環

ヒルベルト空間 H 上の有界線型作用素全体を $B(H)$ とする。 $B(H)$ の $*$ -subalgebra が適当な位相について閉じたものを作用素環という。たゞし作用素環とはほぼ「無限次元の行列環」と思っていた方がいい。特に weak operator topology について閉じたものを von Neumann 環といい、operator norm topology で閉じたものを C^* -環という。面白いこと知りたい方は Halmos (6) や Kadison-Ringrose (3) をみてもいい。

なように。代数幾何学のレベルではよく知られているように、可換環 A と幾何学的空間 X は、双対の関係にあつてお互いに他を規定している。幾何学的空間 X 上の座標関数のつくる可換環が A であり、逆に可換環 A のスペクトルとして X が再現できる。もっとも関数に要求するなめしさの程度によつて色々なカテゴリーがありえるが。

今 X を compact T_2 空間とし、 $A = C(X)$ を X 上の連続関数全体とする。すると $A = C(X)$ は自然に可換な C^* 環になる。逆に C^* 環 A についてある compact T_2 空間 X が存在して A は $C(X)$ と同型になる。この意味で

非可換な C^* 環は局所 T_2 空間の量子化だ。

これはずっと昔に Gelfand-Naimark によって示された定理で別段新しいものではない。作用素環論は元々量子力学を扱う数学として生まれてきたところがあり、不思議でも何でもない。作用素環の創始者 von Neumann 以来のことだから。

次に $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし, $A = \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ を X 上の本質的有界可測関数全体とする。すると $A = \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ は自然に可換 von Neumann 環になる。逆に可換 von Neumann 環 A においてある測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が存在し, $A \cong \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ と同型になる。この意味で

非可換 von Neumann 環は測度空間の量子化だ

② Subfactors

有限群 G の有限集合 X への transitive な作用の組み合わせ論的一般化が Association scheme があった。この場合有限集合 X が幾何学的空間なのでそれを量子化して von Neumann 環 M とする。(しかしこれだけでは G の「作用」を量子化することにはあてにならない。それを定式化するのは Jones [2] により始められた subfactor の理論が必要になる。

Def von Neumann 環 M が Factor であるとはその

中心 $Z(M)$ がスカラーのみからなることである。この時

M の σ -weak closed ideal は 0 または M になるという意味で

M が「単純」であることと同値である。

Def von Neumann 環 M が II₁ 型 factor とは

def ① M は factor である

② $\exists \text{tr}: M \rightarrow \mathbb{C}$ trace とよばれる正の汎関数

$$\text{s.t.} \begin{cases} \text{tr}(xy) = \text{tr}(yx) \\ \text{tr}(1) = 1 \end{cases} \quad \forall x, y \in M$$

例 $M = \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i \right)''$, $A_i \cong M_2(\mathbb{C})$

と 2×2 行列環 $M_2(\mathbb{C})$ の無限つのテンソル積を trace による GNS 表現 (ヒルベルト空間で σ -weakly closure をとったもの) は hyperfinite とよばれる II₁ 型 factor になる

Def ① この II₁ 型 factor M だけでなく, その中の subfactor N の M への包含関係 $N \subset M$ を考える。この時 Jones の index

$$[M:N] \stackrel{\text{def}}{=} \dim_N L^2(M) \quad (\text{coupling constant})$$

は大体 M を N -module とみた時の module 次元ではあるが 値を $[0, \infty)$ にとることに注意する。

Theorem (Jones) II_1 -factor M の subfactor $N \subset M$ の Jones index $(M:N)$ のとりうる値は $|4\cos^2 \frac{\pi}{n}|$ ($n=3, 4, 5, \dots$) $\cup \{4, \infty\}$ である。

③ Association scheme と subfactor

上の有名な定理以降 subfactor の理論は驚くほど発展した。 $(M:N) \leq 4$ の分類, paragrass, 自己同型の分類など色々な話があるが, 青山氏や河東氏がどこかで色々入っているのですね。それを見てみることにする。ここでは Association scheme との関連する所のみを考える。

有限群 G の有限集合 X への transitive な作用の組み合わせ論的一般化が Association scheme であった。それを量子化すると subfactor $N \subset M$ になるのである。それを例でもって検証しよう。

例 G : 有限群

N : II_1 -factor

$\lambda: G \longrightarrow \text{Aut } N$: outer action

$M = N \rtimes G$ (半直積) i.e. N を係数にも

G 上の群環に λ でねた積を入れたもの

M は II_1 -factor になり, N は M の subfactor である

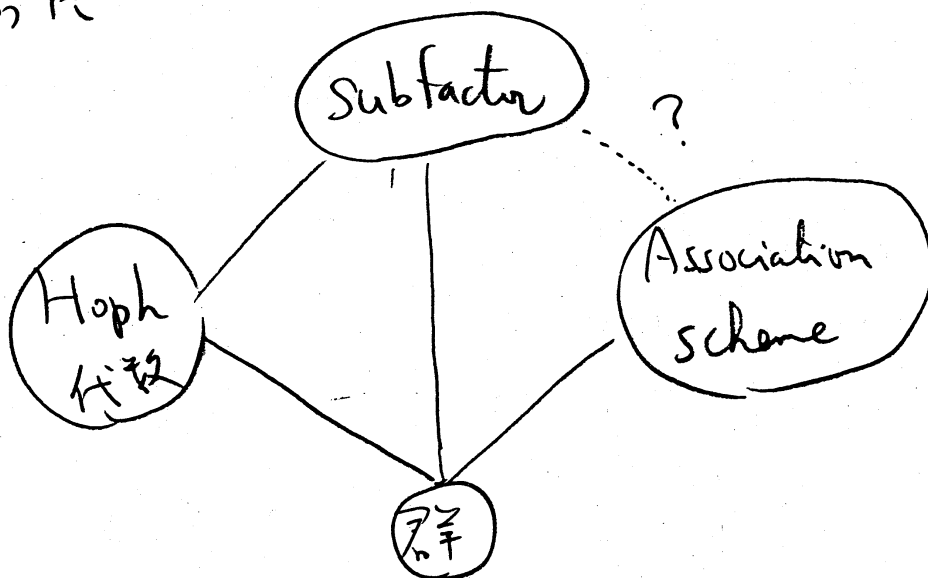
Jones index $(M:N) = |G|$

例 有限群 G が有限集合 X に transitive に作用しているとする。この時 G は von Neumann 環 $\mathcal{L}^0(X)$ に自然に作用する。これを用いて 通常の outer 作用により

$$\begin{cases} M = (R \otimes \mathcal{L}^0(X)) \rtimes G \\ \cup \\ N = R \rtimes G \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ここで } R \text{ は} \\ \text{hyperfinite I-factor} \end{array} \right)$$

と結合積をつくる。すると M は I-factor になり NCM はその subfactor になる。この時 後で示すが、対応する Association scheme の Bose-Mesner algebra の構造が NCM から読みとれることができるのである。

以上みたように 有限群 G を拡張する方向は色々あった



そこでこれらに現われた共通の代数構造を表にしてみよう。

	群 G	Hopf代数 A	Association scheme とその Bose-Mesner 代数 A
積	$m: G \times G \rightarrow G$ $(x, y) \mapsto xy$	$m: A \otimes A \rightarrow A$ product $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ co-product	$m: A \otimes A \rightarrow A$ matrix product $A \cdot B$ $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ Hadamard product $A \circ B$
単位元	単位元 $1 \in G$	$\eta: \mathbb{C} \rightarrow A$ unit $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ co-unit	$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ は 行列積の unit $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ は 対角積の unit $\text{Tr}: A \rightarrow \mathbb{C}$ は $\circ$ の unit $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ は $\cdot$ の unit $\therefore$ $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$ $\varepsilon(A) = \sum_{i,j} A_{i,j}$
逆元	$S: G \rightarrow G$ $\downarrow \quad \downarrow$ $g \mapsto g^{-1}$	$S: A \rightarrow A$ antipode は 逆元 $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\text{Soid}} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$ $\searrow \quad \nearrow$ $\varepsilon \quad \eta$	$S: A \rightarrow A$ 転置 $S(A) = A^t$ は 逆元 $A \xleftarrow{\mu} A \otimes A \xrightarrow{\text{Soid}} A \otimes A \xrightarrow{m} A$ $\searrow \quad \swarrow$ $\varepsilon \quad \text{Tr}$ $\therefore$ $\varepsilon(\overline{B \circ A}) = \text{Tr}(B^* A)$ $\Leftrightarrow \varepsilon(B \circ A) = \text{Tr}(B^t A)$

実は subfactor $N \subset M$ の場合にも同様なものがある。

Def (Ocneanu [4])

$M: \mathbb{I}_1$ -factor

$N \subset M$: subfactor

$[M:N] < \infty$ かつ $N' \cap M = \mathbb{C}$ と仮定す

$e_N: L^2(M, \tau) \rightarrow L^2(N, \tau)$: Jones projection

$\langle M, e_N \rangle \subset M \subset e_N M e_N$ かつ $\mathbb{I}_1$ -factor (basic 構成)

$$A = N' \cap \langle M, e_N \rangle = \{ x \in \langle M, e_N \rangle \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad x n = n x \}$$

この A には Association scheme の Bose-Mesner alg の
よりに 2つの積 $\cdot$ と $\circ$ が与える

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sum_i a_i e_N b_i) \cdot (\sum_j c_j e_N d_j) = \sum_i \sum_j a_i E_N(b_i c_j) e_N d_j \\ (\sum_i a_i e_N b_i) \circ (\sum_j c_j e_N d_j) = \sum_i \sum_j \frac{1}{[M:N]} a_i c_j e_N d_j b_i \end{array} \right.$$

この時 I は $(A, \cdot)$ の単位元になる

$J = [M:N] e_N$ は $(A, \circ)$ の単位元になる。

例 群 G が有限集合 X に transitive に作用しているとき
それからつくられた Association scheme $(X, (R_i)_{i \in I})$ の Bose-
Mesner algebra A の2つの積 $\cdot$ と $\circ$ は、対応する $\mathbb{I}_1$ -
型 factor $M = (R \otimes \ell^2(X)) \rtimes G$ とその subfactor $N = R \rtimes G$
からつくられた $A = N' \cap \langle M, e_N \rangle$ での上の2つの積 $\cdot$ と $\circ$ と対応する

また Jaeger が講演で述べていた spin model と Association scheme の P に γ になる色んな内積式,

例えば $\boxed{AJ = JA = \varepsilon(A)J} \quad (A \in A)$

は subfactor $N \subset M$ の設定でも意味があり,

この例では, それは Jones projection e_N の

内積式 $\boxed{\lambda e_N = e_N \lambda = \varepsilon(\lambda) e_N} \quad (\lambda \in A)$

となり γ にも成っている。これは $\frac{1}{2}$ になる

Jones projection e_N の relative commutant algebra

$A = N' \cap M, e_N$ の中で minimal から central なる

projection γ があるという, 事実に対応している。

(ただし $N' \cap M = \mathbb{C}$ の時だけ)。

④ 4つの双対定理と Terwilliger algebra

局所コンパクトアーベル群 G に対してはその dual group $\hat{G}$ が存在してまた局所コンパクトアーベル群になり, γ に対しては Pontryagin の双対定理 $\hat{\hat{G}} \cong G$ が成立し, 2回 dual をとると元にもどる。すなわち Hopf 代数や Association scheme の Bose-Mesner algebra もよく似た duality は存在している。これは作用素環の場合にはどうかというのが次の4つの双対定理である。

Theorem (444奇 (57))

M を von Neuman 環, G を局所コンパクトアーベル群,
 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ を action とする. その接合積
 $M \rtimes G$ 上にはさらに $\hat{G}$ の action $\hat{\alpha}: \hat{G} \rightarrow \text{Aut}(M \rtimes G)$
 が存在し

$$(M \rtimes G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong M \otimes B(L^2(G))$$

このように2回接合積をとると $B(L^2(G))$ を除いて
 M を復元する。ここで余りの $B(L^2(G))$ は実は
 G と $\hat{G}$ の交換関係からつくられた algebra になっ
 ている。これは subfactor の場合にも対応するもの
 が存在し, 2回 basic 構成をすると

$$\langle \langle N, e_N \rangle, e_M \rangle \cong N^{(C(M,N))}$$

ここで $(M, N) = (M, N)$ が 型 $N^{(n)} \cong N \otimes M_n(\mathbb{C})$ である。
 この時 $B(L^2(G))$ に対応するのは

$$N' \cap \langle M, e_N \rangle \text{ と } M' \cap \langle \langle M, e_N \rangle, e_M \rangle$$

がつくられた algebra である。群 G が transitive に
 有限集合 X に作用する場合につくられた特別な subfactor
 $N \subset M$ の場合には, ちょうどこれが対応する Association
 scheme の Terwilliger algebra(7)と一致する。それ
 以上のことはまだよくわかっていないが何か面白いであろう。

Reference

- (1) F. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I, Association scheme, Benjamin, 1984
- (2) V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25
- (3) R. Kadison and J. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Academic Press 1986
- (4) A. Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, University of Tokyo Seminary Note 45, (1991)
- (5) M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type II, Acta Math. 131, (1973) 249-310
- (6) M. Takesaki, Theory of Operator algebras I, Springer-Verlag, (1979)
- (7) P. Terwilliger, The constituent algebra of an association scheme, preprint